

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدّها الأول $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{2u_n^2 + 1}}$.

1 - برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq 1$.

2 - بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة، ثم استنتج أنّها متقاربة.

3 - أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = e^{\frac{1}{u_n^2}}$ ، هي متتالية هندسية أساسها e^2 .

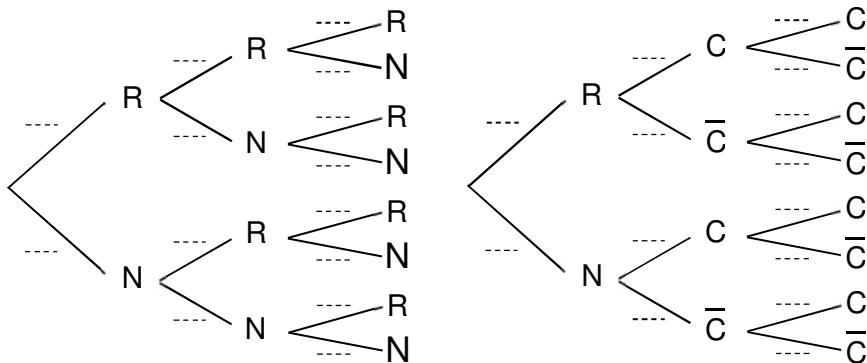
ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم عيّن أصغر عدد طبيعي n_0 بحيث من أجل كل $n \geq n_0$ ، $v_n > 2026^{25}$.

ج) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$. استنتج نهاية المتتالية (u_n).

4 - احسب بدلالة n المجموعين: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $S'_n = \ln v_0 + \ln v_1 + \dots + \ln v_n$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي صندوق U_1 على 3 كريات حمراء وكريتين سوداوين، ويحتوي صندوق U_2 على كرتين حمراوين تحمل الرقمين 1، 1 و 4 كريات سوداء تحمل الأرقام 1، 2، 0، 0، أما الصندوق U_3 فيحتوي على 3 كريات حمراء تحمل الأرقام 1، 1، 0 و 3 كريات سوداء تحمل الأرقام 3، 3، 1. (كل الكريات لا نفرّق بينها عند اللمس).
نسحب من الصندوق U_1 كرية واحدة، إذا كانت حمراء نسحب من U_2 عشوائيا كرتين على التوالي بدون إرجاع، وإذا كانت سوداء نسحب من U_3 عشوائيا كرتين على التوالي مع الإرجاع. نسمي الحادثة R : "سحب كرية حمراء"، الحادثة N : "سحب كرية سوداء"،
الحادثة C : "سحب كرية تحمل رقما زوجيا".



1 - انقل واملاً شجري الاحتمالات

المقابلة والتي تنمذج هذه العملية.

2 - بيّن أنّ احتمال سحب 3 كريات

من نفس اللون هو $p(A) = \frac{7}{50}$.

3 - احسب احتمال سحب كرية حمراء من U_1 علماً أنّ الكرتين المسحوبتين من U_2 و U_3 تحملان رقمين زوجيين.

4 - X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لثلاث كريات عدد الكريات الحمراء المسحوبة.

عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X ، ثم احسب أمله الرياضياتي $E(X)$ ، وتأكد أنّ $E(5X - 7) = 0$.

5 - نضع الآن كل الكريات في صندوق واحد ونسحب منه عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات. احسب $p(E)$

احتمال سحب كرية واحدة سوداء على الأقل، و $p(F)$ احتمال سحب 3 كريات تحمل أرقاما مجموعها عددا فرديا.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

$$\text{I - عيّن العددين المركبين } z_1 \text{ و } z_2 \text{ بحيث: } \begin{cases} z_1 + i \overline{z_2} = 2\sqrt{3} + 2i \\ \overline{z_1} - 2i z_2 = 3\sqrt{3} - 3i \end{cases}$$

II - في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. A و B نقطتان من هذا المستوي لاحقاتهما: $z_A = \sqrt{3} + i$ ، $z_B = 1 + \sqrt{3}i$. وحدة الطول $2cm$.

1 - اكتب كلا من z_B و z_A على الشكل المثلثي، ثم عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث: $\left(\frac{z_A}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{\overline{z_B}}{2}\right)^n = 0$.

2 - عيّن الطويلة وعمدة للعدد المركب $\frac{z_B}{z_A}$ ، ثم حدّد طبيعة المثلث OAB وقيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$.

3 - بيّن أنّ النقطتين A و B تنتميان إلى نفس الدائرة $(\mathcal{C})$ التي يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها ثم أنشئها.

4 - لتكن النقطة I من المستوي منتصف القطعة [AB] و C نظيرة المبدأ O بالنسبة للنقطة I.

(أ) بيّن أنّ: $z_C = (1 + \sqrt{3})(1 + i)$ ، استنتج طبيعة الرباعي OACB ثم مثله.

(ب) بيّن أنّ: $\sqrt{2}OC = (1 + \sqrt{3})OA$ و $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{12}$ ، ثم اكتب على الشكل المثلثي العدد $\frac{z_C}{z_A}$.

(ج) بيّن أنّ: $\frac{z_C}{z_A} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ، ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos \frac{\pi}{12}$ و $\sin \frac{\pi}{12}$.

5 - (E) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث: $|z| = |z_C|$. عيّن وأنشئ المجموعة (E).

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-2; +\infty[$ بـ: $f(x) = -\ln(x^2 - 2x + 4) + 2\ln(x + 2)$.
وليكن $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 - بيّن أنّ: $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$ وأنّ: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ، ثم فسّر هندسيا النتيجة.

2 - (أ) أثبت أنّه من أجل كل $x > -2$ فإنّ: $f'(x) = \frac{-6x + 12}{(x^2 - 2x + 4)(x + 2)}$ ، ثم شكّل جدول تغيرات f .

(ب) اكتب معادلة Δ مماس المنحني $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة المعدومة.

3 - (أ) ارسم المماس Δ والمنحني $(\mathcal{C}_f)$. وحدة الطول $2cm$.

(ب) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = mx$.

4 - g الدالة العددية المعرفة على المجال $]-2; +\infty[$ بـ: $g(x) = -\ln(x^2 - 2x + 4)$.

(أ) ادرس الوضع النسبي للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ والمنحني $(\mathcal{C}_g)$ الممثل للدالة g .

(ب) بيّن أنّ الدالة $x \mapsto (x + 2)\ln(x + 2) - x$ أصلية للدالة $x \mapsto \ln(x + 2)$ على المجال $]-2; +\infty[$.

(ج) استنتج حساب $\mathcal{A}$ مساحة الحيز المستوي المحدّد بـ $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ والمستقيمين: $x = -1$ و $x = 1$.

5 - من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-2; +\infty[$ ، نعتبر النقطة M من $(\mathcal{C}_f)$ فاصلتها x والنقطة N من $(\mathcal{C}_g)$ فاصلتها x ، ولتكن h الدالة المعرفة على المجال $]-2; +\infty[$ بـ: $h(x) = f(x) + g(x)$.

(أ) ادرس الوضع النسبي للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ والمنحني $(\mathcal{C}_g)$ الممثل للدالة $-g$ ، مع تحديد نقاط تقاطعهما.

(ب) ادرس تغيرات h على $]-2; +\infty[$ ، واستنتج أنّ أكبر قيمة للمسافة MN على $[1; 2]$ لما: $x = 2\sqrt{3} - 2$.

(ج) عيّن عددين حقيقيين a و b ($a < b$) من المجال $]-2; 1[\cup]2; +\infty[$ حتى تكون المسافة $MN = 2\ln 2$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

- I - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية: $(2z-1)^2 - 6(2z-1) + 25 = 0$.
- II - في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. لتكن النقط A ، B و C من هذا المستوي التي لاحقاتها: $z_A = 2 + 2i$ ، $z_B = 2 - 2i$ و $z_C = -2\sqrt{2}$. ولتكن النقطة I منتصف القطعة $[AC]$.
- 1 - احسب $|z_A|$ و $|z_C|$ ، استنتج طبيعة المثلث OAC ، ثم مثله حسب وحدة الطول $2cm$.
- 2 - احسب عمدة لكل من الأعداد المركبة: z_A ، z_C و $\frac{z_C}{z_A}$ ، ثم استنتج عمدة للعدد المركب z_I .
- 3 - اكتب z_I على الشكل الجبري، ثم احسب طويلته. استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos \frac{5\pi}{8}$ و $\sin \frac{5\pi}{8}$.
- 4 - عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $\left(\frac{-2\sqrt{2}z_A}{z_B \times z_C}\right)^n$ حقيقياً، ثم احسب $\left(\frac{-2\sqrt{2}z_A}{z_B \times z_C}\right)^{1447}$.
- 5 - (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left|\frac{z-z_A}{z-z_C}\right|=1$. بيّن أنّ O تشمل (E) ثم عيّن وأنشئ (E) .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي صندوق على 10 كريات منها: 5 كريات بيضاء تحمل الأرقام 1، 1، 1، 0، 0، أربع كريات سوداء تحمل الأرقام 2، 2، 1، 0، وكرية واحدة حمراء تحمل الرقم 3. (كل الكريات لا نفرّق بينها عند اللمس). نسحب عشوائياً من هذا الصندوق كرتين في آن واحد. نسمي الحادثة A : "سحب كرتين من نفس اللون"، الحادثة B : "سحب كرتين تحملان رقمين مختلفين".

- 1 - احسب الاحتمالات التالية: $p(A)$ ، $p(B)$ ، $p(A \cap B)$ ، $p(A \cup B)$ و $p_{\bar{B}}(A)$.
- 2 - X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لكرتين: الرقم الأكبر عند سحب كرتين تحملان رقمين أحدهما زوجي والآخر فردي، مجموع ترقيم الكرتين إذا كانا زوجيين، وجداء ترقيم الكرتين إذا كانا فرديين. برّر أنّ مجموعة قيم X هي $\{0; 1; 2; 3; 4\}$ ، ثم عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر X ، واحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.
- 3 - نسحب الآن كرية واحدة من الصندوق، إذا كانت تحمل الرقم 2 نضعها جانباً ثم نسحب كرية واحدة أخرى، وإذا كانت لا تحمل الرقم 2 نعيدها إلى الصندوق ثم نسحب كرتين

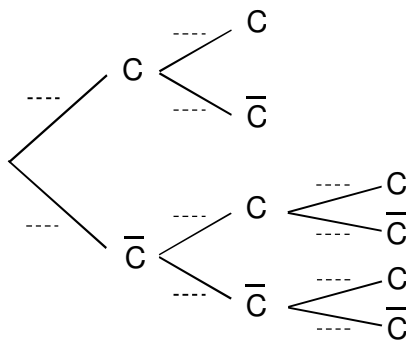
على التوالي مع الإرجاع. الحادثة C : "سحب كرية تحمل الرقم 2".

(أ) انقل واملأ شجرة الاحتمالات المقابلة لنمذجة هذه العملية.

(ب) احسب $p(D)$ احتمال بقاء كرية واحدة في الصندوق تحمل

الرقم 2 على الأقل.

(في كل التمرين، تُعطى النتائج على شكل كسور غير قابلة للاختزال)



التمرين الثالث: (04 نقاط)

I - نعتبر الدالة f المعرفة على $[1; 2]$ بـ: $f(x) = x - (x-2)\ln x$.

1 - بين أنه من أجل كل $1 \leq x \leq 2$ ، $f'(x) = \frac{2-x\ln x}{x}$ وأن $f'(x) > 0$ ، استنتج تغيرات f على $[1; 2]$.

2 - بين أنه من أجل كل x من المجال $[\sqrt{e}; 2]$ فإن $f(x) \geq x$.

II - من أجل كل عدد طبيعي n نعرف المتتالية (u_n) بعدها الأول $u_0 = \sqrt{e}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$.

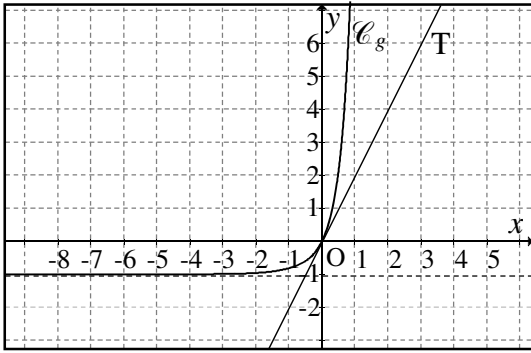
1 - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n \in [\sqrt{e}; 2]$.

2 - ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، بين أنها متقاربة ثم احسب نهايتها.

3 - بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $2 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(2 - u_n)$ و $2 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (2 - u_0)$. استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I - g الدالة المعرفة والمتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = ae^{3x} + bxe^{2x} + c$ ، a, b, c أعداد حقيقية



في الشكل المقابل: $(\mathcal{C}_g)$ هو التمثيل البياني للدالة g و (T) المماس لـ $(\mathcal{C}_g)$ عند O ويشمل النقطة $A(1; 2)$. $(\mathcal{C}_g)$ يقبل

مستقيما مقاربا موازيا لحامل محور الفواصل معادلته: $y = -1$.

1 - بقراءة بيانية: احسب $g'(0)$ وعيّن إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

2 - بقراءة بيانية: عيّن الأعداد الحقيقية a, b, c .

في باقي التمرين، نفرض أن: $a = 1$ و $b = c = -1$.

II - نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x + e^{-x} + \frac{x+2}{e^x + 1}$.

ليكن $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 - بين أن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ، وأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2 - أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x(e^x + 1)^2}$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

3 - أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند $+\infty$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $e^{-x} + x > 0$ ، استنتج وضعية $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة للمستقيم (Δ) .

4 - أ) بين أن المعادلة $f(x) = 10$ تقبل حلا وحيدا α على $]-\infty; 0[$ يطلب حصره بعددين صحيحين متتاليين.

ب) اكتب معادلة للمستقيم (Δ') الذي يوازي (Δ) ويشمل النقطة $B(\alpha; 10)$.

5 - أ) ارسم المستقيمين (Δ) و (Δ') والمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ على المجال $[\alpha; +\infty[$. وحدة الطول $2cm$.

ب) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = x + m$.

6 - إذا علمت أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب: $0 \leq \frac{x+2}{e^x + 1} \leq 1$ ، استنتج حصرا لمساحة الحيز المستوي $\mathcal{A}$

المحدّد بالمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ ، المستقيم المقارب (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتهما: $x = 0$ و $x = 1$.

انتهى الموضوع الثاني

تصحيح البكالوريا التجريبي 2026

تمرين 1: "عبد المطلب"

1) $0 \leq u_0 \leq 1$ و $u_0 = 1$: $n=0$: $0 \leq u_n \leq 1$ متفوقة
نفرص أن $0 \leq u_n \leq 1$ من أجل n كيفي ونبرهن صحة
 $0 \leq u_{n+1} \leq 1$: لدينا : $0 \leq u_n \leq 1$: $0 \leq u_n^2 \leq 1$: $1 \leq 2u_n^2 + 1 \leq 3$: $0 \leq \frac{u_n}{\sqrt{2u_n^2 + 1}} \leq 1$

$\frac{1}{\sqrt{3}} \leq \frac{1}{\sqrt{2u_n^2 + 1}} \leq 1$: $1 \leq \sqrt{2u_n^2 + 1} \leq \sqrt{3}$
أي $0 \leq u_{n+1} \leq 1$ و منه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n \leq 1$

2) $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{\sqrt{2u_n^2 + 1}} - u_n = \frac{u_n(1 - \sqrt{2u_n^2 + 1})}{\sqrt{2u_n^2 + 1}}$
 $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1 - \sqrt{2u_n^2 + 1})(1 + \sqrt{2u_n^2 + 1})}{\sqrt{2u_n^2 + 1}(1 + \sqrt{2u_n^2 + 1})} = \frac{-2u_n^3}{\sqrt{2u_n^2 + 1}(1 + \sqrt{2u_n^2 + 1})}$
طريقة ثانية : لدينا سابقا : $\frac{u_n}{\sqrt{2u_n^2 + 1}} \leq u_n$ أي $u_{n+1} \leq u_n$ و منه (u_n) متناقصة

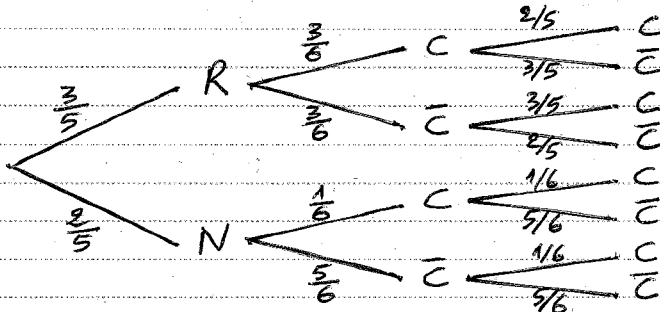
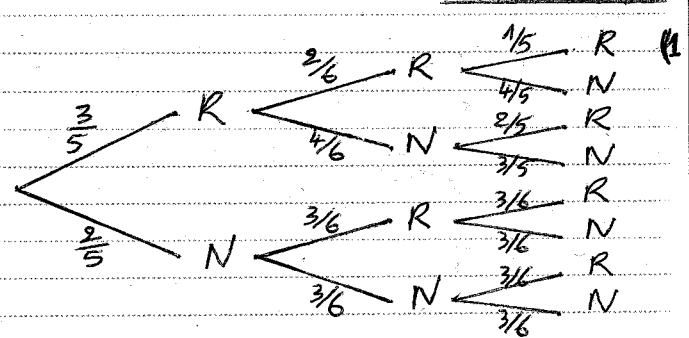
3) $v_{n+1} = e^{\frac{1}{u_{n+1}}} = e^{\frac{1}{\frac{u_n}{\sqrt{2u_n^2 + 1}}}} = e^{\frac{\sqrt{2u_n^2 + 1}}{u_n}} = e^{2 + \frac{1}{u_n^2}} = e^2 \cdot e^{\frac{1}{u_n^2}} = e^2 v_n$
و منه $v_{n+1} = e^2 \cdot e^{\frac{1}{u_n^2}} = e^2 v_n$ متتالية هندسية أساسا

4) $v_n = v_0 \cdot q^n = e(e^2)^n = e^{2n+1}$
 $2n+1 > \ln 2026$: $e^{2n+1} > 2026$: $v_n > 2026$
 $n_0 = 95$: و منه : $n > 94.7$: $n > \frac{25 \ln 2026 - 1}{2}$

$(v_n > e)$: $\ln v_n = \frac{1}{u_n^2}$: $v_n = e^{\frac{1}{u_n^2}}$
 $u_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$: $u_n = \sqrt{\frac{1}{\ln v_n}}$: $u_n^2 = \frac{1}{\ln v_n}$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ (متق) (ع)

4) $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)$: S_n حساب
 $S_n = e \left(\frac{1 - (e^2)^{n+1}}{1 - e^2} \right) = \frac{e}{1 - e^2} (1 - e^{2n+2})$
 $S'_n = \ln v_0 + \ln v_1 + \dots + \ln v_n = \ln e^1 + \ln e^3 + \dots + \ln e^{2n+1}$
 $S'_n = 1 + 3 + \dots + 2n+1 = \frac{n+1}{2} (1 + 2n+1)$: مجموع حساب متتالية حسابية
 $S'_n = (n+1)^2$

تمرين 2 :



$$P(A) = P(RNRNR) + P(NNNNN) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{2}{5}$$

$$P(A) = \frac{1}{25} + \frac{1}{10} = \frac{7}{50}$$

3) الحادثة B : سعب كرتين فضلان رقمين زوجيين
 $P(B) = P(RNCNC) + P(NNCNC) = \frac{3}{25} + \frac{1}{90} = \frac{59}{450}$
 $P(R) = \frac{P(BNR)}{P(B)} = \frac{P(CNCNR)}{P(B)} = \frac{3}{25} \times \frac{450}{59} = \frac{54}{59}$

4) $X = \{0, 1, 2, 3\}$
 $P(X=0) = P(NNNNN) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{10}$

$P(X=1) = P(RNNNN) + P(NNRNN) + P(NNNNR) = \frac{11}{25}$

$P(X=2) = P(RNRNN) + P(RNNNR) + P(NNRNR) = \frac{21}{50}$

$P(X=3) = P(RNRNR) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{11}{25}$	$\frac{21}{50}$	$\frac{1}{25}$

$$E(X) = 0 + \frac{11}{25} + \frac{42}{50} + \frac{3}{25} = \frac{7}{5}$$

$$E(5X-7) = 5E(X) - 7 = 7 - 7 = 0$$

5) $P(E) = 1 - \frac{C_3^8}{C_{17}^3} = \frac{78}{85}$ (عكس لا يوجد سواد)

6) $P(F) = \frac{C_3^8 + C_8^4 \times C_4^2}{C_{17}^3} = \frac{13}{85}$ (زوجية و 1 فردي أو 3 فردية)

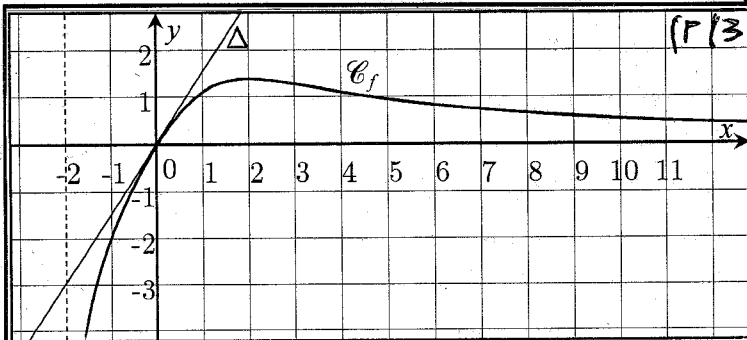
تمرين 3 :

1) $\begin{cases} z_1 + i z_2 = 2\sqrt{3} + 2i \\ \bar{z}_1 - 2i z_2 = 3\sqrt{3} - 3i \end{cases}$: $\begin{cases} z_1 + i z_2 = 2\sqrt{3} + 2i \\ \bar{z}_1 - 2i z_2 = 3\sqrt{3} - 3i \end{cases}$ - I
من (1) نجد : $\bar{z}_1 - i z_2 = 2\sqrt{3} - 2i$ (2)
 $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$: $z_2 = -\sqrt{3} + i$: $\bar{z}_1 - 2i z_2 = 3\sqrt{3} - 3i$ (3)
 $\bar{z}_1 = \sqrt{3} + i$: و منه $z_1 + i(1 - \sqrt{3}i) = 2\sqrt{3} + 2i$

2) $|z_A| = 2$: $\begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = \frac{1}{2} \end{cases}$: $\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$: $(k \in \mathbb{Z})$: (z_A) الشكل المتناهي : $(z_A) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$

3) $|z_B| = 2$: $\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$: $\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$: $(k \in \mathbb{Z})$: (z_B) الشكل المتناهي : $(z_B) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

$$\left(\frac{z_A}{2} \right)^{2n} - \left(\frac{z_B}{2} \right)^n = \left(e^{i\frac{\pi}{3}} \right)^{2n} - \left(e^{i\frac{\pi}{3}} \right)^n = e^{i\frac{2n\pi}{3}} - e^{i\frac{n\pi}{3}}$$



(ب) حاول المعادلة: $f(x) = mx$ هي خواص نقط
تقاطع (ع) مع المستقيمات التي ميلها m وتشمل المبدأ
 $m \leq 0$: حل وحيد معروف $m = 3/2$: حل مضاعف معروف
 $0 < m < 3/2$: حل معروف وآخر موجب
 $m > 3/2$: حل معروف وآخر سالب

$$f(x) - g(x) = 2 \ln(x+2) \quad (P4)$$

$$x > -1 \text{ أي } x+2 > 1 \text{ لـ } 2 \ln(x+2) > 0$$

$$(E_f) \text{ أعلى } (E_g) \text{ لـ } x > -1 \text{ لـ } (E_g) \text{ أسفل } (E_f)$$

$$A(-2, -\ln 4) \text{ عند } x = -2 \text{ لـ } (E_g) \text{ أسفل } (E_f)$$

$$R(x) = (x+2) \ln(x+2) - x$$

$$R'(x) = \ln(x+2) + \frac{x+2}{x+2} - 1 = \ln(x+2)$$

$$x \mapsto \ln(x+2) \text{ أصلية } R(x) \text{ متزايدة}$$

$$A = \int_{-2}^1 f(x) - g(x) dx = 2 \int_{-2}^1 \ln(x+2) dx = 2 \left[(x+2) \ln(x+2) - x \right]_{-2}^1$$

$$A = 2(3 \ln 3 - 2) \text{ u.a} = 8(3 \ln 3 - 2) \text{ cm}^2$$

(P5) دراسة وضعية (ع) بالنسبة لـ (ع) دراسة (ع) دراسة (ع)

$$h(x) = f(x) + g(x) = 2 \ln \left(\frac{x+2}{x^2 - 2x + 4} \right)$$

$$\frac{x+2}{x^2 - 2x + 4} - 1 > 0 \text{ ، } \frac{x+2}{x^2 - 2x + 4} > 1 \text{ لـ } h(x) > 0$$

$$x \in]1; 2[\text{ أي } -1 < \frac{x+2}{x^2 - 2x + 4} < 1 \rightarrow -x^2 + 3x - 2 > 0$$

$$x \in]1; 2[\text{ لـ } (E_g) \text{ أعلى } (E_f)$$

$$x \in]-2; 1[\cup]2; +\infty[\text{ لـ } (E_g) \text{ أسفل } (E_f)$$

$$C(2, \ln 4) \text{ و } B(1, \ln 3) \text{ عند } (E_g) \text{ أسفل } (E_f)$$

$$h'(x) = f'(x) + g'(x) = \frac{2(-x^2 + 4x + 8)}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} \quad (ب)$$

x	-2	$2\sqrt{3}-2$	+∞
$h'(x)$		+	-
$h(x)$			$h(2\sqrt{3}-2)$

$$MN = \sqrt{(f(x) + g(x))^2} = |h(x)|$$

$$MN = f(x) + g(x) = h(x) : x \in [1; 2] \text{ لـ}$$

$$x = 2\sqrt{3}-2 \text{ لـ } MN \text{ أكبر قيمة}$$

$$MN = -h(x) : x \in]-2; 1[\cup]2; +\infty[\text{ لـ } (E_g) \text{ أسفل } (E_f)$$

$$-2 \ln \left(\frac{x+2}{x^2 - 2x + 4} \right) = 2 \ln 2 \text{ يعني } MN = 2 \ln 2$$

$$\frac{x^2 - 2x + 4}{x+2} = 2 \text{ أي } \ln \left(\frac{x^2 - 2x + 4}{x+2} \right) = \ln 2$$

$$x^2 - 4x = 0 \text{ ، } x(x-4) = 0 \text{ ، } x^2 - 4x = 0$$

$$x = 0 \text{ و } x = 4 \text{ و } x = 4 \text{ و } x = 0$$

$$MN = 2 \ln 2 \text{ و } MN = 0 \text{ و } MN = 0$$

$$\left(\frac{z_A}{2} \right)^n - \left(\frac{z_B}{2} \right)^n = \cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3} - \cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3} = 2i \sin \frac{n\pi}{3}$$

$$REN(n=3k) : \text{ متساوي ، } \frac{n\pi}{3} = k\pi \text{ يعني } \sin \frac{n\pi}{3} = 0$$

$$\frac{z_B}{z_A} = \frac{2e^{i\pi/3}}{2e^{i\pi/6}} = e^{i(\pi/3 - \pi/6)} = e^{i\pi/6} \quad (2)$$

$$\arg \left(\frac{z_B}{z_A} \right) = \frac{\pi}{6} \text{ و } \left| \frac{z_B}{z_A} \right| = 1 \text{ و متساوي الساقين}$$

$$OA=OB : \text{ المثلث } OAB \text{ متساوي الساقين}$$

$$(E) \quad (\vec{OA}, \vec{OB}) = \arg \left(\frac{z_B}{z_A} \right) = \frac{\pi}{6}$$



$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2} \quad (P4)$$

$$z_I = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + i \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$z_C = 2z_I = \sqrt{3}+1 + (\sqrt{3}+1)i \text{ و } z_I = \frac{z_O + z_C}{2}$$

$$z_A = z_C - z_B \text{ و } \vec{OA} = \vec{BC}$$

$$OA=OB \text{ و } \vec{OA} = \vec{OB}$$

$$OC = |z_C| = (1+\sqrt{3})\sqrt{2} \text{ و } OA = 2$$

$$\sqrt{2}OC = 2(1+\sqrt{3}) = (1+\sqrt{3})OA$$

$$(\vec{OA}, \vec{OB}) = (\vec{OA}, \vec{OC}) + (\vec{OC}, \vec{OB}) = 2(\vec{OA}, \vec{OC}) = \frac{\pi}{6}$$

$$(\vec{OA}, \vec{OC}) = \frac{\pi}{12} \text{ و متساوي الساقين } OAC$$

$$\frac{z_C}{z_A} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

$$\frac{z_C}{z_A} = \frac{(1+\sqrt{3})(1+i)}{\sqrt{3}+1} = \frac{(1+\sqrt{3})(1+i)(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{2+\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \text{ و } \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \text{ و } \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \sin \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}$$

$$r = OC \text{ و } O \text{ هي مركز الدائرة (E) : } OM = OC$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} (-\ln(x^2 - 2x + 4) + 2 \ln(x+2)) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{(x+2)^2}{x^2 - 2x + 4} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x^2}{x^2} \right) = \ln 1 = 0$$

$$f'(x) = -\frac{2x-2}{x^2-2x+4} + \frac{2}{x+2} = \frac{-6x+12}{(x+2)(x^2-2x+4)}$$

$$f'(x) = \frac{-6x+12}{(x+2)(x^2-2x+4)}$$

$$f'(x) = \frac{-6x+12}{(x+2)(x^2-2x+4)}$$

$$f'(x) = \frac{-6x+12}{(x+2)(x^2-2x+4)}$$

$$f'(x) = \frac{-6x+12}{(x+2)(x^2-2x+4)}$$

$$f'(x) = \frac{-6x+12}{(x+2)(x^2-2x+4)}$$

$$f'(x) = \frac{-6x+12}{(x+2)(x^2-2x+4)}$$

$$f'(x) = \frac{-6x+12}{(x+2)(x^2-2x+4)}$$

$(0,1)$: $P(A \cap B) = \frac{C_1^1 C_1^1 + 1 + C_1^1 C_1^1}{C_{10}^2} = \frac{11}{45}$
 $(0,1)$: $P(A \cap B) = \frac{11}{45}$
 $(1,2)$: $P(A \cap B) = \frac{11}{45}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{8}{9}$

$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{1}{9} \times \frac{9}{2} = \frac{1}{2}$

$X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$(0+0) \quad P(X=0) = \frac{C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{15}$

$(1 \times 1) : (0,1) \quad P(X=1) = \frac{C_4^2 + C_3^1 \times C_4^1}{C_{10}^2} = \frac{2}{5}$

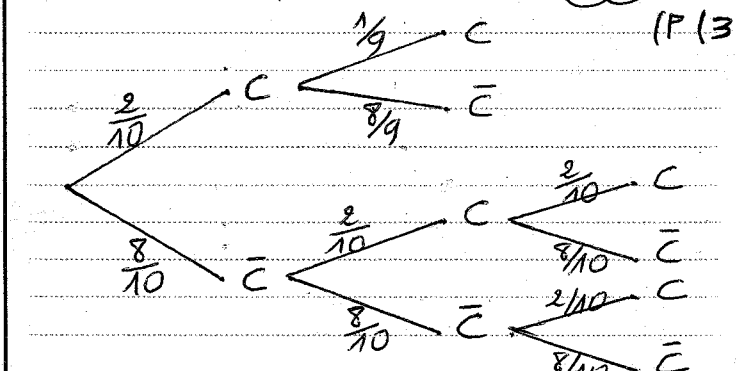
$(0+2) : (4,2) \quad P(X=2) = \frac{C_4^1 \times C_6^1 + C_3^2 \times C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{14}{45}$

$(0,3) : (2,3) \quad P(X=3) = \frac{C_3^1 \times C_7^1 + C_4^1 \times C_6^1 + C_4^1 \times C_6^1}{C_{10}^2} = \frac{1}{5}$

$(2+2) \quad P(X=4) = \frac{C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{45}$

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{14}{45}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{45}$

$E(X) = \frac{2}{5} + \frac{28}{45} + \frac{3}{5} + \frac{4}{45} = \frac{77}{45}$



$P(D) = 1 - P(C \cap C) = 1 - \frac{2}{10} \times \frac{1}{9} = 1 - \frac{1}{45} = \frac{44}{45}$

تمرين 3 :

$f'(x) = 1 - \left[\ln x + \frac{x-2}{x} \right] = \frac{2-x \ln x}{x}$ (1-I)

$0 \leq x \ln x \leq 2 \ln 2$; $0 \leq \ln x \leq \ln 2$; $1 \leq x \leq 2$

$0 < 2 - 2 \ln 2 \leq 2 - x \ln x \leq 2$; $-2 \ln 2 \leq -x \ln x \leq 0$

$f(x) - x = -(x-2) \ln x$ (2)

$f(x) - x \geq 0$ فإن $\sqrt{e} \leq x \leq 2$

$\mu_0 = \sqrt{e}$; $n=0$; $\sqrt{e} \leq \mu_n \leq 2$ (1-II)

$\sqrt{e} \leq \mu_{n+1} \leq 2$ ونريد $\sqrt{e} \leq \mu_n \leq 2$

$f(\sqrt{e}) \leq f(\mu_n) \leq f(2)$: متزايدة

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sqrt{e} \leq \mu_n \leq 2$: متزايدة و $\sqrt{e} \leq 1,8 \leq \mu_{n+1} \leq 2$

$(\mu_{n+1} - \mu_n) = f(\mu_n) - \mu_n \geq 0$ (2)

الموضوع الثاني 2026 م

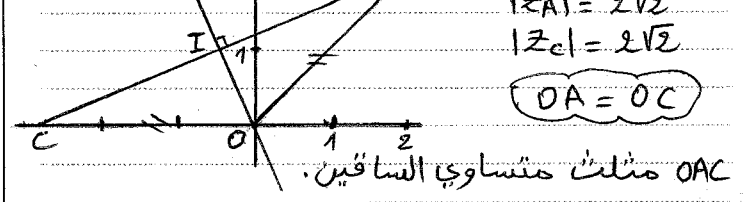
تمرين 1 :

$z^2 - 6z + 25 = 0$: $z = 2 \pm 3i$

$\Delta = -64 = 64i^2 = (\pm 8i)^2$

$z_1 = 2 - 2i$; $2z_1 - 1 = 3 - 4i$; $z_1 = \frac{6 - 8i}{2} = 3 - 4i$

$z_2 = 2 + 2i$; $2z_2 - 1 = 3 + 4i$; $z_2 = \frac{6 + 8i}{2} = 3 + 4i$



$\arg z_A = \frac{\pi}{4}$; $\arg \theta_A = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$; $\cos \theta_A = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin \theta_A = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\arg z_C = \pi$; $\arg \theta_C = \pi + 2k\pi$; $\cos \theta_C = -1$; $\sin \theta_C = 0$

$\arg \left(\frac{z_C}{z_A} \right) = \arg z_C - \arg z_A = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

$(\vec{OA}, \vec{OC}) = (\vec{OA}, \vec{OI}) + (\vec{OI}, \vec{OC}) = 2(\vec{OA}, \vec{OI}) = \frac{3\pi}{4}$

$(\vec{u}, \vec{OI}) = (\vec{u}, \vec{OA}) + (\vec{OA}, \vec{OI}) = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{8} = \frac{5\pi}{8}$

$\arg(z_I) = \frac{5\pi}{8}$

$z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{-2\sqrt{2} + 2 + 2i}{2} = -\sqrt{2} + 1 + i$

$|z_I| = \sqrt{(-\sqrt{2}+1)^2 + 1} = \sqrt{3 - 2\sqrt{2} + 1} = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$

$z_I = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \left(\cos \frac{5\pi}{8} + i \sin \frac{5\pi}{8} \right) = -\sqrt{2} + 1 + i$

$\cos \frac{5\pi}{8} = \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}$; $\sin \frac{5\pi}{8} = \frac{1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}$

$\cos \frac{5\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2} - \sqrt{e}}{2}$; $\sin \frac{5\pi}{8} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{e}}{2}$

$\left(\frac{-2\sqrt{2} z_A}{z_B \times z_C} \right)^n = \left(\frac{-4\sqrt{2}(1+i)}{-4\sqrt{2}(1-i)} \right)^n = i^n = (e^{i\pi/2})^n = e^{in\pi/2}$

$\sin \frac{n\pi}{2} = 0$ يعني $\cos \frac{n\pi}{2} = \pm 1$

$(k \in \mathbb{N})$; $n = 2k$; $\frac{n\pi}{2} = k\pi$

$i^{1447} = i \cdot i^{1446} = i \cdot (i^2)^{723} = i \cdot (-1)^{723} = -i$

$AM = CM$: يعني $|z - z_A| = |z - z_C|$

$OA = OC$ و O تنتمي إلى (E)

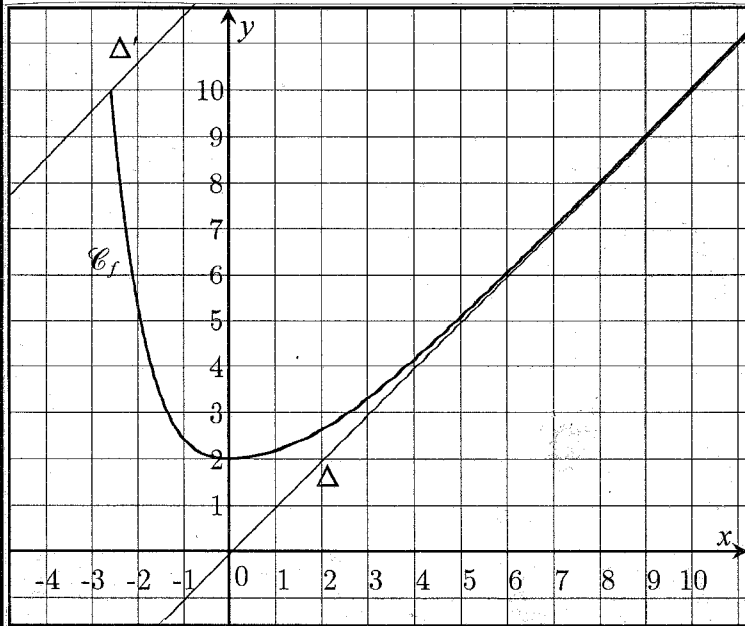
(O, I) هي محور (AC) أي المستقيم

تمرين 2 :

$P(A) = \frac{C_5^2 + C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{16}{45}$

$P(B) = 1 - \frac{C_3^2 + C_4^2 + C_5^2}{C_{10}^2} = \frac{7}{9}$

الوضعية: $f(x) - x = e^{-x} + \frac{x+2}{e^x+1} - \frac{e^x+x+3}{e^x+1}$
 بما أن $e^x + x > 0$ ، و $e^x + x > 0$ ، و $f(x) - x > 0$ (فوق 4)
 4) مستمرة و متناقصة تماماً على $]-\infty; 10]$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $f(0) = 2 < 10$
 القيم المتوسطة $f(x) = 10$ تقبل حلاً وحيداً α
 حيث $-2 < \alpha < -3$ لأن $f(-2) < 10$ و $f(-3) > 10$
 ب) $y = x + b$: (Δ') و يشمل $B(\alpha; 10)$
 (Δ') : $y = x + 10 - \alpha$ و $b = 10 - \alpha$ ، و $10 = \alpha + b$
 (5) الرسم:



ب) حاول المعادلة: $f(x) = x + m$ هي فواصل نقاط تقاطع (ع) مع المستقيمات الموازية لـ (Δ) .
 $m \leq 0$: لا يوجد حلول.
 $0 < m < 2$: حل وحيد موجب.
 $m = 2$: المعادلة تقبل حلاً معروفاً.
 $2 < m \leq 10 - \alpha$: المعادلة تقبل حلاً سالباً.
 $m > 10 - \alpha$: المعادلة لا تقبل حلولاً.

$$A = \int_0^1 (f(x) - x) dx = \int_0^1 \left(e^{-x} + \frac{x+2}{e^x+1} \right) dx \quad (6)$$

لدينا: $0 \leq \frac{x+2}{e^x+1} \leq 1$

$$e^{-x} \leq e^x + \frac{x+2}{e^x+1} \leq e^{-x} + 1$$

$$\int_0^1 e^{-x} dx \leq \int_0^1 \left(e^{-x} + \frac{x+2}{e^x+1} \right) dx \leq \int_0^1 (e^{-x} + 1) dx$$

$$[-e^{-x}]_0^1 \leq A \leq [-e^{-x} + x]_0^1$$

$$(1 - e^{-1}) \leq A \leq 2 - e^{-1} \quad \text{م.ا}$$

$$(4(2 - e^{-1})) \leq A \leq 4(2 - e^{-1}) \quad \text{cm}^2$$

(u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى فهي متقاربة
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln u_n = \ln u_n = \ln e = 1$
 $1 - (1 - 2) \ln e = 1$ لأن $f(1) = 1$
 $1 - (1 - 2) \ln e = 0$ نجد $(1 - 2) \ln e = 0$ و $e = 1$ (مرفوض) لأنها متزايدة
 $2 - u_{n+1} = 2 - u_n + (u_n - 2) \ln u_n \quad (3)$
 $2 - u_{n+1} = (2 - u_n)(1 - \ln u_n)$
 $\frac{1}{2} \leq \ln u_n \leq \ln 2$: $\sqrt{e} \leq u_n \leq 2$
 $1 - \ln 2 \leq 1 - \ln u_n \leq \frac{1}{2}$: $-\ln 2 \leq -\ln u_n \leq -\frac{1}{2}$
 نضرب في $(2 - u_n)$ موجب:

$$2 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(2 - u_n) \quad \text{و} \quad (2 - u_n)(1 - \ln u_n) \leq \frac{1}{2}(2 - u_n)$$

لدينا: $2 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(2 - u_n)$
 $2 - u_1 \leq \frac{1}{2}(2 - u_0)$
 $2 - u_2 \leq \frac{1}{2}(2 - u_1)$
 $\vdots$
 $2 - u_n \leq \frac{1}{2^n}(2 - u_0)$
 الحدود كلها موجبة

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = 0 \quad \text{لأن} \quad 0 < \lim_{n \rightarrow +\infty} (2 - u_n) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n (2 - u_0)$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (2 - u_n) = 0$ (مبرهنه الحصر) لأن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$

تمرين 4:

1-I معامل توجيه المماس $g'(0) = \frac{2-0}{1-0} = 2$
 إشارة $g(x)$: $- \quad 0 \quad +$
 $g'(x) = 3ae^{3x} + b(2x+1)e^{2x} \quad (2)$

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ 3a + b = 2 \\ 0 + c = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} g(0) = 0 \\ g'(0) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1 \end{cases}$$

$c = -1$
 $a = 1$
 $b = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = e^{-x} \left(x e^x + 1 + \frac{x e^x + 2 e^x}{e^x + 1} \right) + \infty \quad (1-II)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x + e^{-x} + \left(\frac{x}{e^x} \right) \left(\frac{1 + \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{e^x}} \right) \right] = +\infty$$

$$f'(x) = 1 - e^{-x} + \frac{e^x + 1 - e^x(x+2)}{(e^x + 1)^2} \quad (2)$$

$$f'(x) = \frac{(1 - e^{-x})(e^x + 1)^2 + 1 - e^x(x+2)}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} - x e^x - e^{-x}}{(e^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{3x} - x e^{2x} - 1}{e^x (e^x + 1)^2} = \frac{g(x)}{e^x (e^x + 1)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^{-x} + \left(\frac{x}{e^x} \right) \left(\frac{1 + \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{e^x}} \right) \right] = 0 \quad (3)$$

و مثل: $(\Delta): y = x$ مقارب صائل لـ (ع) عند $+\infty$
 ب) لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ و $e^x > x$ و $e^x > x$
 يمكن دراسة تغيرات: $h(x) = e^{-x} + x$ حيث
 $h(x) > 0$ ، و $h'(x) = 1 - e^{-x}$