



رابط الحل

E² Mezrouh

التاريخ: 2026/05/03

الموسم الدراسي: 1447 هـ / 2025-2026 م
مديرية التربية لولاية الجزائر غرب
البكالوريا التجريبي في الرياضيات
للسنة الثالثة ثانوي شعبة رياضيات



أستاذ المادة: مزروح يوسف

المدة: 4 ساعات
ونصف

على المترشح إختيار احد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين 1 (5 نقطة)

(I) نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(E): 67x - 3y = 317$.

1 أ) عين حلاً خاصاً $(x_0; y_0)$ للمعادلة (E) يُحقق الشرط: $y_0 - x_0 = 1$.
ب) استنتج حلول المعادلة (E) في $\mathbb{Z}^2$.

2 أ) ليكن $d = \text{PGCD}(x; y)$ حيث $(x; y)$ حل للمعادلة (E) .
أ) عين القيم الممكنة للعدد d .
ب) عين الثنائيات $(x; y)$ التي من أجلها يكون $d = 317$.

α و β عددان طبيعيين حيث $\alpha \neq 0$.
(II) N عدد طبيعي يُكتب في نظام التعداد ذي الأساس 7 على الشكل $N = \overline{\alpha\beta 23}$ ،
ويُكتب في نظام التعداد ذي الأساس 8 على الشكل $N = \overline{3(\beta + 1)\alpha 2}$.

1 أ) عين قيمتي α و β .

2 أ) اكتب العدد N في النظام العشري.

(III)

1 أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 7.

2 عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد A_n مضاعفاً للعدد 7 حيث:

$$A_n = 2026^{6n+2} + 4 \times 2025^{3n} + n$$

3 نضع من أجل كل عدد طبيعي n المجموع S_n حيث:

$$S_n = 2026^0 + 2026^1 + 2026^2 + \dots + 2026^n$$

(أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $2025S_n = 2026^{n+1} - 1$.

(ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون: $S_n \equiv 4(3^{n+1} - 1)[7]$.

(ج) عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون: $S_n \equiv 0[7]$.

التمرين 2 (4 نقطة)

يحتوي قسم على 10 أشخاص: 6 رجال (من بينهم صفوان) و 4 نساء (من بينهم صونيا). نريد اختيار لجنة تضم رئيساً ونائين له (النائبان لا يتمايزان فيما بينهما).

1 ما هو احتمال أن يكون صفوان رئيساً للجنة؟

2 بين أن احتمال أن تكون صونيا نائبة في اللجنة هو $\frac{1}{5}$.

3 ما احتمال أن تضم اللجنة صفوان وصونيا معاً؟

4 ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل اختيار عدد النساء في اللجنة.

(أ) حدد قيم X الممكنة.

(ب) عرّف قانون احتمال X واحسب أمله الرياضي $E(X)$.

الجزء الثاني: نضيف إلى الأشخاص الـ 10 السابقين n شخصاً جديداً (كلهم رجال)، حيث $n \geq 1$. نختار الآن عشوائياً وفي آن واحد شخصين. ليكن P_n احتمال اختيار شخصين من نفس الجنس.

1 بين أن: $P_n = \frac{(n+6)(n+5)+12}{(n+10)(n+9)}$.

2 عيّن قيمة n حتى يكون $P_n = \frac{7}{13}$.

التمرين 3 (4 نقطة)

1 نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية: $z^2 - 2z\sqrt{2} + 4 = 0$: (E).

(أ) حل المعادلة (E)، نعتبر z_1 هو الحل الذي جزؤه التخيلي موجب و z_2 هو الحل الآخر.

(ب) اكتب على الشكل الأسّي العدد المركب $\frac{z_1}{z_2}$.

(ج) عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقياً.

2 في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، الوحدة 1cm، نعتبر النقاط A ، B و Ω لواحقتها على الترتيب:

$$z_A = \sqrt{2}(1+i) \quad , \quad z_B = \sqrt{2}(1-i) \quad , \quad z_\Omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(أ) عين لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالتحاكي h ذو المركز Ω والنسبة -3 .

(ب) عين لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران R ذو المركز O والزاوية $-\frac{\pi}{2}$.

3 مثل بدقة النقاط A ، B و D في المستوي المركب. مع شرح طريقة التمثيل

4 أكتب العدد $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A}$ على الشكل الجبري، ثم فسر النتيجة هندسياً.

5 لتكن I منتصف القطعة $[CD]$ ، و E نظيرة A بالنسبة إلى I . بين أن الرباعي $ACED$ مربع.

6 عين مجموعة النقاط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث:

$$\arg((z - z_\Omega)^2) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

التمرين 4 (7 نقطة)

(I) لتكن g_n الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g_n(x) = nx + e^x$ ، $n \in \mathbb{N}^*$.

1 أدرس اتجاه تغير الدالة g_n ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2 بين أن المعادلة $g_n(x) = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلاً وحيداً α_n ، ثم تحقق أن $-1 < \alpha_n < 0$.

3 استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g_n(x)$.

(II) نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f_n(x) = \frac{(x-1)e^x}{n+e^x}$

1 أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ وفسر النتيجة هندسياً.

2 أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$

ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f_n(x) - (x-1)]$ ، ماذا تستنتج؟

ج- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_n) والمستقيم $y = x - 1$: (Δ) .

3 أ- بين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f'_n(x) = \frac{e^x \cdot g_n(x)}{(n+e^x)^2}$

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f_n ، ثم شكل جدول تغيراتها.

4 بين أن: $f_n(\alpha_n) = \alpha_n$

5 أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1}) .

6 أنشئ كلاً من: (Δ) ، (C_1) ، (C_2) و (C_3) .

(III) نضع: $I = \int_{-1}^0 (x-1)e^x dx$ و $u_n = \int_{-1}^0 f_n(x) dx$

1 أحسب I باستخدام المكاملة بالتجزئة.

2 بين أنه من أجل كل $x \in [-1; 0]$: $\frac{(x-1)e^x}{n} \leq f_n(x) \leq \frac{(x-1)e^x}{n+1}$

3 بين أن المتتالية (u_n) متقاربة، وأحسب نهايتها.

4 نضع: $V_n = \sum_{k=1}^n u_k$

أ- بين أنه من أجل كل $k \in \mathbb{N}^*$: $\int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k+1}$

ب- استنتج أن: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \geq \ln(n+2) - \ln 2$

ج- استنتج: $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$

إنهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين 1 (4 نقطة)

(I) من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ ، نعرف العددين A_n و B_n كما يلي:

$$A_n = 2n^2 + 3n - 2 \quad \text{و} \quad B_n = 2n^2 + 3n + 5$$

ليكن $d_n = \text{PGCD}(A_n; B_n)$ و $m_n = \text{PPCM}(A_n; B_n)$.

1 أ) بين أن العدد d_n قاسم للعدد 7.

ب) تحقق أن: $A_n = (n+2)(2n-1)$.

ج) استنتج قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $d_n = 7$.

2 عبّر عن المضاعف المشترك الأصغر m_n بدلالة n في كل حالة من الحالتين: $d_n = 1$ و $d_n = 7$.

(II) نعتبر العددين الطبيعيين a و b حيث $a < b$ ، والذان يُحققان العلاقة:

$$m - 3d = 273$$

حيث $d = \text{PGCD}(a; b)$ و $m = \text{PPCM}(a; b)$.

1 بين أن d قاسم للعدد 273.

2 علماً أن d عدد أولي، استنتج القيم الممكنة للعدد d .

3 نفرض في هذا السؤال أن $d = 7$.

أ) بين أنه يوجد عدداً طبيعيين x و y أوليان فيما بينهما حيث $a = 7x$ و $b = 7y$ و يُحققان: $xy = 42$.

ب) استنتج الثنائيات $(a; b)$ الممكنة.

ج) تحقق أن الثنائية $(A_4; B_4)$ هي إحدى حلول هذه الجملة.

(III)

1 حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $7x - 6y = 1$: (E).

2 N عدد طبيعي يُحقق الجملة التالية:

$$\begin{cases} N \equiv 3[7] \\ N \equiv 4[6] \end{cases}$$

أ) بين أنه إذا كان N حلاً لهذه الجملة، فإنه توجد ثنائية $(x; y)$ حل للمعادلة (E) بحيث $N = 7x + 3$.
ب) استنتج أن: $N \equiv 10[42]$.

3 عيّن العدد الطبيعي N علماً أن حاصل القسمة الإقليدية للعدد N على A_4 هو $B_4 - 1$.

التمرين 2 (4 نقطة)

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بـ: $u_0 = -\frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = (u_n + 1)e^{u_n} - 1$.

1 برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-1 \leq u_n \leq -\frac{1}{2}$.

2 من أجل كل عدد حقيقي x ، ادرس إشارة

$$(x+1)(e^x - 1)$$

استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

3 بين أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

4 بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$1 + u_n \leq \frac{e^{-\frac{n}{2}}}{2} \quad \text{وأن} \quad 1 + u_{n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{e}}(1 + u_n)$$

استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

5 من أجل كل عدد n من $\mathbb{N}^*$ نضع:

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$$

بين أن: $S_n = \ln(2u_n + 2)$.

التمرين 3 (5 نقطة)

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ الجملة التالية ذات المجهولين α و β :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2\sqrt{2} \\ \bar{\alpha} - \bar{\beta} = -2i\sqrt{6} \end{cases}$$

II. في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقتها:

$$Z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{6} \quad , \quad Z_B = \sqrt{2} - i\sqrt{6} \quad , \quad Z_C = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

1 أكتب كلاً من Z_C و Z_A على الشكل الأسّي.

2 أكتب العدد المركب $\frac{Z_A}{Z_C}$ على الشكلين الجبري والأسّي.

3 استنتج القيم المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

4 عين Γ مجموعة النقط $M(z)$ التي تحقق: $\arg\left(\frac{z - Z_A}{z - Z_B}\right) = \pi + 2k\pi$.

5 نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بـ: $u_n = Z_A^n + Z_B^n$.

(أ) أثبت أن العدد u_n حقيقي مهما تكن قيمة n .

(ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_n = 2^{\frac{3n+2}{2}} \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

(ج) برهن أن المتتالية (u_n) تحقق العلاقة التراجعية: $u_{n+2} - 2\sqrt{2}u_{n+1} + 8u_n = 0$.

(د) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_{n+6} = 512u_n$.

التمرين 4 (7 نقطة)

(I) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt$$

1 بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ وعين دالتها المشتقة $f'(x)$.

2 استنتج إشارة $f'(x)$ حسب قيم x ، ثم حدد اتجاه تغير الدالة f .

3 باستخدام المكاملة بالتجزئة، برهن أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ لدينا: $f(x) = 1 - \frac{1 + \ln x}{x}$.

(II) ليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ وفسر النتيجة هندسياً.

2 أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ واستنتج وجود مستقيم مقارب أفقي (Δ) للمنحنى (C_f) يطلب تعيين معادلته.

3 أحسب $f(1)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

4 استنتج إشارة $f(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

5 أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

6 أنشئ المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) .

(III) نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بـ: $h(x) = f(\ln x)$.

1 أدرس اتجاه تغير الدالة h .

2 أحسب $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$.

3 شكل جدول تغيرات الدالة h .

إنهى الموضوع الثاني

الموضوع الأول



حل التمرين 1

(I) المعادلات الديوفانتية في $\mathbb{Z}^2$:

1 أ) تعيين الحل الخاص $(x_0; y_0)$: 0.5 ن

لدينا الشرط $y_0 - x_0 = 1 \implies y_0 = x_0 + 1$
بتعويض هذا الشرط في المعادلة (E):

$$67x_0 - 3(x_0 + 1) = 317$$

$$67x_0 - 3x_0 - 3 = 317$$

$$64x_0 = 320$$

$$x_0 = \frac{320}{64} = 5$$

ومنه $y_0 = 5 + 1 = 6$

إذن الثنائية الخاصة هي: $(5; 6)$.

ب) استنتاج حلول المعادلة (E): 0.5 ن
لدينا الجملة التالية:

$$\begin{cases} 67x - 3y = 317 \dots (1) \\ 67(5) - 3(6) = 317 \dots (2) \end{cases}$$

ب طرح المعادلة (2) من المعادلة (1) طرفاً لطرف، نجد:

$$67(x - 5) - 3(y - 6) = 0 \implies 67(x - 5) = 3(y - 6)$$

بما أن 3 أولي مع 67 ($3 \wedge 67 = 1$) وحسب مبرهنة غوص، فإن 3 يقسم $(x - 5)$.
إذن يوجد عدد صحيح k بحيث: $x - 5 = 3k \implies x = 3k + 5$.
بالتعويض في المساواة السابقة نجد:

$$67(3k) = 3(y - 6) \implies 67k = y - 6 \implies y = 67k + 6$$

إذن، مجموعة حلول المعادلة (E) هي:

$$S = \{(3k + 5; 67k + 6) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

2 أ) تعيين القيم الممكنة للعدد d : 0.5 ن

لدينا $d = \text{PGCD}(x; y)$ ، إذن d يقسم x و d يقسم y .

حسب خواص القاسم المشترك الأكبر، فإن d يقسم $67x - 3y$ ومنه d يقسم 317.

بما أن 317 عدد أولي (لأنه لا يقبل القسمة على الأعداد الأولية الأقل من جذره $\sqrt{317} \approx 17.8$ وهي $(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17)$ ، فإن قواسمه الموجبة هي 1 و 317. إذن القيم الممكنة للعدد d هي: $\{1; 317\}$.

ب) تعيين الثنائيات $(x; y)$ التي من أجلها يكون $d = 317$: 0.75 ن

يكون $d = 317$ إذا وفقط إذا كان $x \equiv 0[317]$ و $y \equiv 0[317]$. نأخذ $x \equiv 0[317]$ ، ولدينا $x = 3k + 5$:

$$3k + 5 \equiv 0[317]$$

$$3k \equiv -5[317]$$

$$3k \equiv -5 + 317[317]$$

$$3k \equiv 312[317]$$

بما أن $\text{PGCD}(3; 317) = 1$ ، نقسم الطرفين على 3:

$$k \equiv 104[317] \implies k = 317\alpha + 104 \text{ حيث } \alpha \in \mathbb{Z}$$

نعوض قيمة k في عبارتي x و y :

$$x = 3(317\alpha + 104) + 5 = 951\alpha + 312 + 5 = 951\alpha + 317$$

$$y = 67(317\alpha + 104) + 6 = 21239\alpha + 6968 + 6 = 21239\alpha + 6974$$

إذن الثنائيات المطلوبة هي: $(951\alpha + 317; 21239\alpha + 6974)$ مع $\alpha \in \mathbb{Z}$.

(II) أنظمة التعداد:

1 تعيين قيمتي α و β : 0.75 ن

نلاحظ أن الثنائية $(\alpha; \beta)$ هي حل للمعادلة $67\alpha - 3\beta = 317$: (E) .

من الجزء السابق، وجدنا أن الحلول هي من الشكل: $(3k + 5; 67k + 6)$.

بما أن N مكتوب في النظامين ذي الأساس 7 و 8، وجب تحقيق شروط التعداد:

$$0 \leq \beta \leq 6 \text{ و } 1 \leq \alpha \leq 6$$

$$0 \leq \beta + 1 \leq 7 \implies 0 \leq \beta \leq 6 \text{ و } 0 \leq \alpha \leq 7$$

بالتعويض بقيم k في الحل العام:

$$\text{من أجل } k = 0: \alpha = 3(0) + 5 = 5 \text{ و } \beta = 67(0) + 6 = 6$$

نلاحظ أن القيمتين $\alpha = 5$ و $\beta = 6$ تحققان تماماً شروط التعداد $(0 \leq \beta \leq 6 \text{ و } 1 \leq \alpha \leq 6)$.

بينما من أجل أي قيمة أخرى لـ k ، ستخرج قيم α أو β عن المجال المطلوب.

إذن: $\alpha = 5$ و $\beta = 6$.

2 كتابة العدد N في النظام العشري: 0.25 ن

نعوض قيمتي α و β في إحدى العبارتين:

$$N = 343(5) + 49(6) + 17$$

$$N = 1715 + 294 + 17$$

$$N = 2026$$

(III) الموافقات والمجاميع:

1 دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 7: 0.5 ن

$$3^0 \equiv 1[7]$$

$$3^1 \equiv 3[7]$$

$$3^2 \equiv 2[7]$$

$$3^3 \equiv 6[7]$$

$$3^4 \equiv 4[7]$$

$$3^5 \equiv 5[7]$$

$$3^6 \equiv 1[7]$$

نلاحظ أن البواقي تتكرر بشكل دوري، ودورها هو 6.

$n \equiv \dots [6]$	0	1	2	3	4	5
$3^n \equiv \dots [7]$	1	3	2	6	4	5

2 تعيين قيم n حتى يكون $A_n \equiv 0[7]$: 0.5 ن

$$2026 = 7 \times 289 + 3 \implies 2026 \equiv 3[7]$$

$$2025 = 7 \times 289 + 2 \implies 2025 \equiv 2[7]$$

ومنه:

$$A_n = 2026^{6n+2} + 4 \times 2025^{3n} + n$$

$$A_n \equiv 3^{6n+2} + 4 \times 2^{3n} + n[7]$$

$$A_n \equiv (3^6)^n \times 3^2 + 4 \times (2^3)^n + n[7]$$

بما أن $3^6 \equiv 1[7]$ و $2^3 = 8 \equiv 1[7]$ ، فإن:

$$A_n \equiv 1^n \times 9 + 4 \times 1^n + n[7]$$

$$A_n \equiv 9 + 4 + n[7]$$

$$A_n \equiv 13 + n[7]$$

$$A_n \equiv 6 + n[7]$$

لكي يكون $A_n \equiv 0[7]$ يجب أن:

$$6 + n \equiv 0[7]$$

$$n \equiv -6[7]$$

$$n \equiv 1[7]$$

إذن: $n = 7k + 1$ حيث $k \in \mathbb{N}$.

3 المجمع S_n :

أ) تبيان أن $2025S_n = 2026^{n+1} - 1$: 0.25 ن
المجمع S_n هو مجموع حدود متتابعة هندية أساسها $q = 2026$ وحدها الأول $2026^0 = 1$.
عدد الحدود هو $n + 1 = (n - 0 + 1)$.

$$S_n = 1 \times \frac{2026^{n+1} - 1}{2026 - 1}$$

$$S_n = \frac{2026^{n+1} - 1}{2025}$$

بضرب الطرفين في 2025 نجد: $2025S_n = 2026^{n+1} - 1$.

ب) استنتاج أن $S_n \equiv 4(3^{n+1} - 1)[7]$: 0.25 ن

لدينا مما سبق $2025 \equiv 2[7]$ و $2026 \equiv 3[7]$. نعوض في العلاقة:

$$2S_n \equiv 3^{n+1} - 1[7]$$

للتخلص من المعامل 2، نضرب طرفي الموافقة في العدد 4 (لأن $4 \times 2 = 8 \equiv 1[7]$):

$$4 \times 2S_n \equiv 4(3^{n+1} - 1)[7]$$

$$8S_n \equiv 4(3^{n+1} - 1)[7]$$

$$S_n \equiv 4(3^{n+1} - 1)[7]$$

ج) تعيين قيم n حتى يكون $S_n \equiv 0[7]$: 0.25 ن

$$S_n \equiv 0[7] \implies 4(3^{n+1} - 1) \equiv 0[7]$$

بما أن $\text{PGCD}(4; 7) = 1$ ، فإن حسب مبرهنة غوص:

$$3^{n+1} - 1 \equiv 0[7]$$

$$3^{n+1} \equiv 1[7]$$

من جدول البواقي في السؤال (1)، نجد أن القوة التي توافق 1 بترديد 7 هي من مضاعفات 6.

$$n + 1 = 6k \quad (k \in \mathbb{N}^*)$$

$$n = 6k - 1$$

إذن، قيم العدد الطبيعي n هي $n = 6k - 1$ مع $k \in \mathbb{N}^*$

حل التمرين 2



1 احتمال أن يكون صفوان رئيساً للجنة: 0.5 ن

عدد الحالات الكلية لاختيار اللجنة (رئيس ثم نائبان) هو $10 \times C_9^2 = 360$. لتثبيت صفوان رئيساً، نختار النائبين من بين الـ 9 أشخاص المتبقين:

$$\text{Card}(A) = 1 \times C_9^2 = 36$$

الاحتمال هو:

$$P(A) = \frac{36}{360} = \frac{1}{10}$$

2 تبيان أن احتمال أن تكون صونيا نائبة في اللجنة هو $\frac{1}{5}$: 0.5 ن

تكون صونيا نائبة إذا اخترنا رئيساً من بين التسعة المتبقين (غير صونيا)، ثم اخترنا صونيا كواحدة من النائبين، والنائب الآخر من الـ 8 الباقين:

$$\text{Card}(B) = 9 \times (C_1^1 \times C_8^1) = 9 \times 8 = 72$$

الاحتمال هو:

$$P(B) = \frac{72}{360} = \frac{1}{5}$$

3 احتمال أن تضم اللجنة صفوان وصونيا معاً: 0.5 ن

نحسب الحالات التي يتواجد فيها صفوان وصونيا معاً بشكل مباشر:

- صفوان رئيس وصونيا نائبة والنائب الآخر من الـ 8 الباقين: $1 \times 1 \times 8 = 8$ حالات.
- صونيا رئيسة و صفوان نائب والنائب الآخر من الـ 8 الباقين: $1 \times 1 \times 8 = 8$ حالات.
- الرئيس شخص آخر (8 خيارات) والنائبان هما صفوان وصونيا: $8 \times 1 = 8$ حالات.

$$\text{Card}(C) = 8 + 8 + 8 = 24$$

الاحتمال هو:

$$P(C) = \frac{24}{360} = \frac{1}{15}$$

4 المتغير العشوائي X (عدد النساء في اللجنة):

(أ) قيم X الممكنة: 0.25 ن

بما أن اللجنة تضم 3 أعضاء والنساء عددهن 4، فإن: $X \in \{0, 1, 2, 3\}$

(ب) قانون احتمال X وحساب الأمل الرياضي:

$$P(X = 0) = \frac{6 \times C_5^2}{360} = \frac{60}{360} = \frac{1}{6}.$$

$$P(X = 1) = \frac{(4 \times C_6^2) + (6 \times C_4^1 \times C_5^1)}{360} = \frac{60 + 120}{360} = \frac{1}{2}.$$

$$P(X = 2) = \frac{(4 \times C_3^1 \times C_6^1) + (6 \times C_4^2)}{360} = \frac{72 + 36}{360} = \frac{3}{10}.$$

$$P(X = 3) = \frac{4 \times C_3^2}{360} = \frac{12}{360} = \frac{1}{30}.$$

جدول قانون الاحتمال:

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$p_0 = \frac{1}{6}$	$p_1 = \frac{1}{2}$	$p_2 = \frac{3}{10}$	$p_3 = \frac{1}{30}$

الأمّل الرياضياتي $E(X)$:

$$E(X) = \left(0 \times \frac{1}{6}\right) + \left(1 \times \frac{1}{2}\right) + \left(2 \times \frac{3}{10}\right) + \left(3 \times \frac{1}{30}\right) = 1.2$$

5 الجزء الثاني:

(أ) تبيان عبارة P_n : 0.75 ن العدد الإجمالي $n + 10$ شخص (الرجال $n + 6$ والنساء 4). نختار شخصين في آن واحد:

$$\text{Card}(\Omega') = C_{n+10}^2 = \frac{(n+10)(n+9)}{2}$$

الحصول على شخصين من نفس الجنس (رجلان أو امرأتان):

$$\text{Card} = C_{n+6}^2 + C_4^2 = \frac{(n+6)(n+5)}{2} + 6 = \frac{(n+6)(n+5) + 12}{2}$$

$$P_n = \frac{\frac{(n+6)(n+5) + 12}{2}}{\frac{(n+10)(n+9)}{2}} = \frac{(n+6)(n+5) + 12}{(n+10)(n+9)}$$

(ب) تعيين قيمة n حتى يكون $P_n = \frac{7}{13}$: 0.5 ن
بحل المعادلة: $13(n^2 + 11n + 42) = 7(n^2 + 19n + 90)$

$$13n^2 + 143n + 546 = 7n^2 + 133n + 630 \implies 6n^2 + 10n - 84 = 0$$

بالتبسيط: $3n^2 + 5n - 42 = 0$. المميز $\Delta = 529 = 23^2$. الجذر الطبيعي الوحيد المقبول هو:

$$n = \frac{-5 + 23}{6} = 3$$



حل التمرين 3

1 (أ) حل المعادلة E : 0.75 ن
نحسب المميز Δ :

$$\Delta = (-2\sqrt{2})^2 - 4(1)(4) = 8 - 16 = -8$$

بما أن $\Delta < 0$ فإن المعادلة تقبل حلين مركبين مترافقين:

$$z = \frac{2\sqrt{2} \pm i\sqrt{8}}{2} = \frac{2\sqrt{2} \pm 2i\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \pm i\sqrt{2}$$

بما أن z_1 جزؤه التخيلي موجب نجد: $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ و $z_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

(ب) الشكل الأسّي للعدد $\frac{z_1}{z_2}$: 0.5 ن

لدينا $|z_1| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$ وعمدته $\arg(z_1) = \frac{\pi}{4}$ لأن $\cos \theta = \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ إذن $z_2 = \bar{z}_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$ و $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

(ج) قيم n الطبيعية حتى يكون $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقياً: 0.25 ن

لدينا $\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^n = e^{i\frac{n\pi}{2}}$ يكون العدد حقيقياً إذا وفقط إذا كان الجزء التخيلي معدوماً، أي: $\frac{n\pi}{2} = k\pi \Rightarrow n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$) إذن n عدد طبيعي زوجي.

2 (أ) لاحقة النقطة C : 0.5 ن

باستخدام عبارة التحاكي $h(\Omega, -3)$:

$$z_C - z_\Omega = -3(z_B - z_\Omega)$$

$$z_C = -3 \left(\sqrt{2} - i\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= -3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\sqrt{2} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= -\frac{3\sqrt{2}}{2} + 3i\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= -\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}$$

(ب) لاحقة النقطة D : 0.5 ن

باستخدام عبارة الدوران $R \left(O, -\frac{\pi}{2} \right)$:

$$z_D = e^{-i\frac{\pi}{2}} z_B$$

$$= -i(\sqrt{2} - i\sqrt{2})$$

$$= -i\sqrt{2} + i^2\sqrt{2}$$

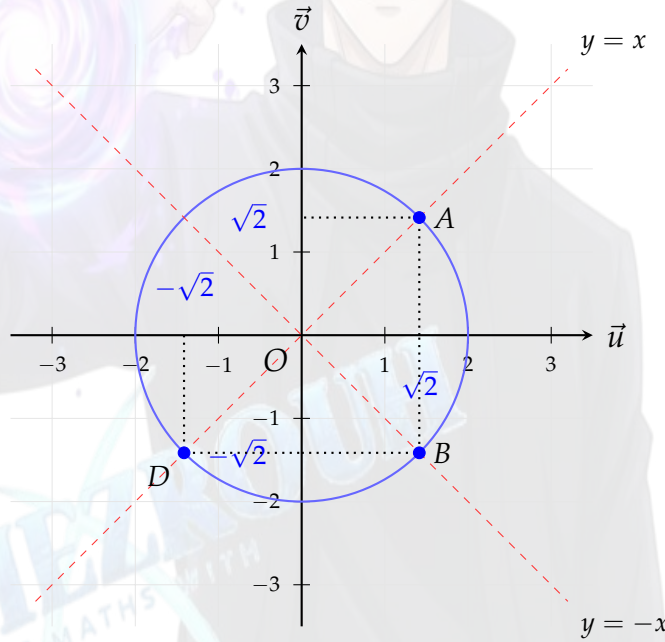
$$= -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

3 تمثيل النقاط (الإنشاء الهندسي المضبوط): 0.5 ن

تمثيل النقاط بدقة دون اللجوء للقيم التقريبية، نعتمد على الخواص الهندسية:

• لدينا $|z_A| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$ وبالمثل نجد أن $|z_B| = |z_D| = 2$ إذن النقاط A و B و D تنتمي جميعها إلى الدائرة (C) التي مركزها المبدأ O ونصف قطرها $R = 2$.

- إحداثيات $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ تحقق المعادلة $y = x$. إذن A هي نقطة تقاطع الدائرة (C) مع المنصف الأول (في الربع الأول).
- إحداثيات $B(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ تحقق المعادلة $y = -x$. إذن B هي نقطة تقاطع الدائرة (C) مع المنصف الثاني (في الربع الرابع).
- إحداثيات $D(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ تحقق المعادلة $y = x$. إذن D هي نقطة تقاطع الدائرة (C) مع المنصف الأول (في الربع الثالث).



4 الشكل الجبري للنسبة وتفسيرها: 0.5 ن

بما أن النسبة هي $-i$ فإن $AC = AD$ و $\arg(-i) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow (\vec{AD}, \vec{AC}) = -\frac{\pi}{2}$ و $|\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A}| = 1 \Rightarrow AC = AD$ إذن المثلث ACD قائم ومتساوي الساقين في A .

5 طبيعة الرباعي ACED: 0.25 ن

بما أن I منتصف $[CD]$ و E نظيرة A بالنسبة إلى I فإن القطرين $[AE]$ و $[CD]$ متناصفان، فالرباعي متوازي أضلاع. وبما أن فيه زاوية قائمة (A) وضلعان متجاوران متساويان ($AC = AD$)، فهو مربع.

6 مجموعة النقاط M : 0.25 ن

المجموعة هي المستقيم الذي يشمل Ω باستثناء النقطة Ω وميله $m = \tan(\frac{\pi}{8})$ أي $\arg(z - z_\Omega) = \frac{\pi}{8} + k\pi \Rightarrow 2\arg(z - z_\Omega) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

إذن، مجموعة النقاط M هي المستقيم الذي يشمل Ω باستثناء النقطة Ω وميله $m = \tan(\frac{\pi}{8})$

(I) دراسة الدالة المساعدة g_n :

1 اتجاه تغير الدالة g_n وجدول تغيراتها: 0.5 ن

الدالة g_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g_n(x) = nx + e^x$ هي مجموع دالتين قابليتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$.
 من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، المشتقة هي: $g'_n(x) = n + e^x$.
 بما أن $n \in \mathbb{N}^*$ (أي $n \geq 1$) وأن الدالة الأسية موجبة تماماً ($e^x > 0$)، فإن مجموع مقدارين موجبين تماماً هو مقدار موجب تماماً.
 إذن $g'_n(x) > 0$ من أجل كل عدد حقيقي x .
 ومنه، الدالة g_n متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$.
 حساب النهايات:
 • $\lim_{x \rightarrow -\infty} nx = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ (لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} g_n(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (nx + e^x) = -\infty$)
 • $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (nx + e^x) = +\infty$
 جدول التغيرات:

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'_n(x)$		+
$g_n(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2 البرهان أن المعادلة $g_n(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α_n : 0.5 ن

الدالة g_n مستمرة ومتزايدة تماماً على $\mathbb{R}$.
 صورة المجال $]-\infty; +\infty[$ بالدالة g_n هي المجال $]-\infty; +\infty[$.
 بما أن العدد $0 \in]-\infty; +\infty[$ ، فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $g_n(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α_n في $\mathbb{R}$.

التحقق من أن $-1 < \alpha_n < 0$:

نحسب صوري العددين 0 و -1 بالدالة g_n :

$$g_n(0) = n(0) + e^0 = 1 \implies g_n(0) > 0$$

$$g_n(-1) = n(-1) + e^{-1} = -n + \frac{1}{e}$$

$$\text{بما أن } n \geq 1 \text{ و } \frac{1}{e} \approx 0.36, \text{ فإن } -n + \frac{1}{e} < 0 \implies g_n(-1) < 0$$

$$\text{بما أن } -1 < \alpha_n < 0, \text{ فإن } g_n(-1) \times g_n(0) < 0$$

3 استنتاج إشارة $g_n(x)$: 0.25 ن

x	$-\infty$	α_n	$+\infty$
$g_n(x)$	-	0	+

(II) دراسة الدالة f_n :

1 حساب النهاية عند $-\infty$ والتفسير الهندسي: 0.5 ن

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)e^x}{n+e^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^x - e^x}{n+e^x}$$

نعلم من التزايد المقارن أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

بالتعويض نجد أن البسط يؤول إلى 0 والمقام يؤول إلى $n+0 = n$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = \frac{0}{n} = 0$$
 إذن

التفسير الهندسي: المنحنى (C_n) يقبل مستقيماً مقارباً أفقياً معادلته $y = 0$ (وهو محور الفواصل) بجوار $-\infty$.

2 أ- حساب النهاية عند $+\infty$: 0.25 ن

في حالة التعويض المباشر نجد حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{+\infty}{+\infty}$
نستخرج e^x كعامل مشترك من المقام للاختزال مع البسط:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)e^x}{e^x \left(\frac{n}{e^x} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{\frac{n}{e^x} + 1}$$

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n}{e^x} = 0$ ، فإن النهاية تؤول إلى $+\infty$

ب- حساب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f_n(x) - (x-1)]$ والاستنتاج: 0.25 ن

نقوم بتوحيد المقامات:

$$\bullet f_n(x) - (x-1) = \frac{(x-1)e^x}{n+e^x} - \frac{(x-1)(n+e^x)}{n+e^x} = \frac{(x-1)e^x - n(x-1) - (x-1)e^x}{n+e^x}$$

بعد اختزال الحدود المتعاكسة يتبقى لدينا: $\frac{-n(x-1)}{n+e^x}$

نحسب النهاية عند $+\infty$ باستخراج x من البسط و e^x من المقام:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-nx \left(1 - \frac{1}{x} \right)}{e^x \left(\frac{n}{e^x} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-n}{\frac{e^x}{x}} \times \frac{1 - \frac{1}{x}}{\frac{n}{e^x} + 1}$$

نعلم أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ ، ومنه $\frac{-n}{+\infty} = 0$. إذن النهاية هي 0.

الاستنتاج: المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_n) بجوار $+\infty$.

ج- دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_n) والمستقيم (Δ) : 0.25 ن

ندرس إشارة الفرق المتبقي: $f_n(x) - (x-1) = \frac{-n(x-1)}{n+e^x}$

المقام $n+e^x$ موجب تماماً من أجل كل $x \in \mathbb{R}$.

بما أن $n > 0$ فإن إشارة الكسر تعتمد على إشارة البسط وتحديدًا إشارة القوس $-(x-1) = -x+1$

ينعدم الفرق عند $x = 1$. من أجل $x < 1$ يكون المقدار موجباً، ومن أجل $x > 1$ يكون المقدار سالباً.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - (\Delta)$	+	0	-
الوضعية			

3 أ- تبين أن $f'_n(x) = \frac{e^x \cdot g_n(x)}{(n + e^x)^2}$: 0.5 ن
الدالة f_n قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث:

$$\begin{aligned}
 f'_n(x) &= \frac{[e^x + (x-1)e^x](n + e^x) - e^x(x-1)e^x}{(n + e^x)^2} \\
 &= \frac{xe^x(n + e^x) - (x-1)e^{2x}}{(n + e^x)^2} \\
 &= \frac{nxe^x + xe^{2x} - xe^{2x} + e^{2x}}{(n + e^x)^2} \\
 &= \frac{nxe^x + e^{2x}}{(n + e^x)^2} = \frac{e^x(nx + e^x)}{(n + e^x)^2}
 \end{aligned}$$

وبما أن $g_n(x) = nx + e^x$ فإن:

$$f'_n(x) = \frac{e^x \cdot g_n(x)}{(n + e^x)^2}$$

ب- استنتاج اتجاه تغير الدالة f_n وجدول تغيراتها: 0.5 ن

- لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، المقدار $e^x > 0$ والمقام $(n + e^x)^2 > 0$.
- ومنه إشارة المشتقة $f'_n(x)$ هي نفس إشارة الدالة المساعدة $g_n(x)$.
- حسب الجزء، (I) $g_n(x)$ سالبة على المجال $]-\infty; \alpha_n[$ وموجبة على $]\alpha_n; +\infty[$.
- إذن، الدالة f_n متناقصة تماماً على $]-\infty; \alpha_n[$ ومنتزعة تماماً على $]\alpha_n; +\infty[$.

x	$-\infty$	α_n	$+\infty$
$f'_n(x)$	-	0	+
$f_n(x)$	0	$f_n(\alpha_n)$	$+\infty$

4 تبين أن $f_n(\alpha_n) = \alpha_n$: 0.25 ن

لدينا $g_n(\alpha_n) = 0$ ومنه $n\alpha_n + e^{\alpha_n} = 0$ أي: $e^{\alpha_n} = -n\alpha_n$

بالتعويض في عبارة الدالة نجد:

$$\begin{aligned} f_n(\alpha_n) &= \frac{(\alpha_n - 1)e^{\alpha_n}}{n + e^{\alpha_n}} \\ &= \frac{(\alpha_n - 1)(-n\alpha_n)}{n - n\alpha_n} \\ &= \frac{-n\alpha_n(\alpha_n - 1)}{n(1 - \alpha_n)} \\ &= \frac{-n\alpha_n(\alpha_n - 1)}{-n(\alpha_n - 1)} \end{aligned}$$

إذن النتيجة النهائية هي:

$$f_n(\alpha_n) = \alpha_n$$

5 دراسة الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1}) : **0.5 ن**

ندرس إشارة الفرق $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ كالتالي:

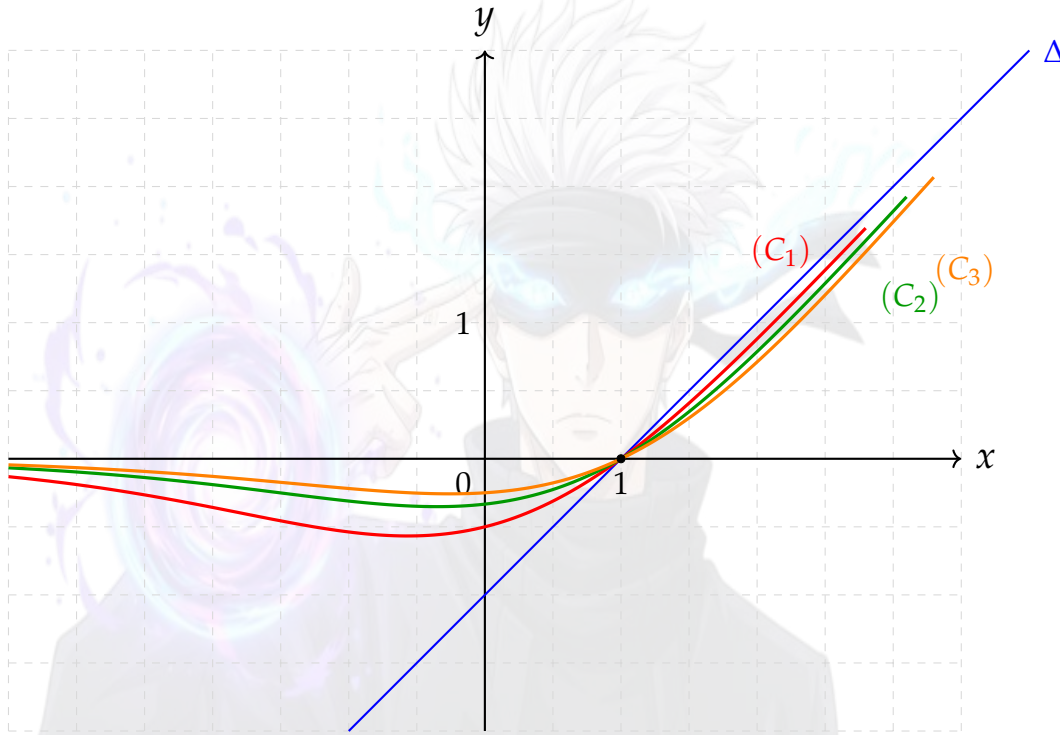
$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) &= \frac{(x-1)e^x}{n+1+e^x} - \frac{(x-1)e^x}{n+e^x} \\ &= (x-1)e^x \left[\frac{(n+e^x) - (n+1+e^x)}{(n+1+e^x)(n+e^x)} \right] \\ &= \frac{-(x-1)e^x}{(n+1+e^x)(n+e^x)} \end{aligned}$$

بما أن $e^x > 0$ والمقامات موجبة تماماً، فإن إشارة الفرق من إشارة $-(x-1)$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - (C_{n+1})$	+	0	-
الوضعية			

6 إنشاء (Δ) ، (C_1) ، (C_2) و (C_3) : **1 ن**

ملاحظات للرسم: جميع المنحنيات تشترك في النقطة $(1,0)$ لأنها نقطة التقاطع مع محور الفواصل والمقارب. الذروة لكل منحنى تنتمي للمستقيم $y = x$ لأن $f_n(\alpha_n) = \alpha_n$.



III الحساب التكامل والمنتاليات:

1 حساب التكامل I باستخدام المكاملة بالتجزئة: 0.5 ن

نضع: $u(x) = x - 1 \Rightarrow u'(x) = 1$ و $v(x) = e^x \Rightarrow v'(x) = e^x$
بتطبيق قانون المكاملة بالتجزئة نجد:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^0 (x-1)e^x dx \\ &= [(x-1)e^x]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 e^x dx \\ &= [(x-1)e^x]_{-1}^0 - [e^x]_{-1}^0 \\ &= (-1 + 2e^{-1}) - (1 - e^{-1}) \end{aligned}$$

إذن النتيجة النهائية هي:

$$I = \frac{3}{e} - 2$$

2 تبيان الحصر من أجل كل $x \in [-1; 0]$: 0.25 ن

من أجل كل $x \in [-1; 0]$ لدينا $-1 \leq x \leq 0$

بإدخال الدالة الأسية المتزايدة تماماً: $\frac{1}{e} \leq e^x \leq 1$

نضيف العدد الطبيعي n للأطراف: $n + \frac{1}{e} \leq n + e^x \leq n + 1$

بما أن $\frac{1}{e} > 0$ فإن $n < n + \frac{1}{e}$ إذن المتراحة تصبح: $n < n + e^x \leq n + 1$

بما أن الأطراف موجبة تماماً، نقرب ونعكس اتجاه الترتيب:

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n+e^x} < \frac{1}{n}$$

الآن نضرب جميع الأطراف في المقدار $(x-1)e^x$.
 بما أن $x \in [-1; 0]$ فإن $x-1 \leq -1 < 0$ (أي سالب)، و $e^x > 0$. إذن المقدار $(x-1)e^x$ سالب.
 عند الضرب في عدد سالب، تُقلب اتجاهات المتراجحة مرة أخرى لنحصل على:

$$\frac{(x-1)e^x}{n} \leq \frac{(x-1)e^x}{n+e^x} \leq \frac{(x-1)e^x}{n+1}$$

$$\frac{(x-1)e^x}{n} \leq f_n(x) \leq \frac{(x-1)e^x}{n+1} \text{ وهو المطلوب:}$$

3 تبيان تقارب المتتالية (u_n) وحساب نهايتها: 0.25 ن

لدينا الحصر السابق ساري المفعول على المجال $[-1; 0]$.
 ندخل رمز التكامل المحدود من -1 إلى 0 (بما أن $-1 < 0$ فإن ترتيب الحدود يُحافظ على التراجع):

$$\int_{-1}^0 \frac{(x-1)e^x}{n} dx \leq \int_{-1}^0 f_n(x) dx \leq \int_{-1}^0 \frac{(x-1)e^x}{n+1} dx$$

باستخراج الثابت $1/n$ و $1/(n+1)$ من التكامل نجد:

$$\frac{1}{n} \int_{-1}^0 (x-1)e^x dx \leq u_n \leq \frac{1}{n+1} \int_{-1}^0 (x-1)e^x dx$$

بما أن التكامل المتبقي هو نفسه I المذكور في السؤال الأول، نجد:

$$\frac{I}{n} \leq u_n \leq \frac{I}{n+1}$$

نحسب نهايات طرفي الحصر عندما $n \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I}{n+1} = 0 \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I}{n} = 0$$

حسب مبرهنة الحصر المتتالية متقاربة ونهايتها هي: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

4 دراسة المجموع V_n :

أ- تبيان أن 0.25 ن: $\int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k+1}$

ليكن $k \in \mathbb{N}^*$ و $t \in [k+1; k+2]$

من المجال لدينا $t \geq k+1$. بقلب الأطراف الموجبة نجد $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{k+1}$

بمكاملة الطرفين من $k+1$ إلى $k+2$:

$$\int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{t} dt \leq \int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{k+1} dt \Rightarrow \int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k+1} [t]_{k+1}^{k+2}$$

$$\int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k+1} (k+2 - (k+1)) \Rightarrow \int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k+1} \times 1$$

ب- استنتاج متراجحة المجموع: 0.25 ن

نأخذ المجموع للأطراف من $k=1$ إلى n :

$$\sum_{k=1}^n \left(\int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{t} dt \right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1}$$

بتطبيق علاقة شال على مجموع التكاملات المتعاقبة:

$$\int_2^3 \frac{1}{t} dt + \int_3^4 \frac{1}{t} dt + \dots + \int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{t} dt = \int_2^{n+2} \frac{1}{t} dt$$

نحسب هذا التكامل المتبقي: $\int_2^{n+2} \frac{1}{t} dt = [\ln(t)]_2^{n+2} = \ln(n+2) - \ln 2$

بترتيب المتراجحة نصل إلى المطلوب: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \geq \ln(n+2) - \ln 2$

ج- استنتاج نهاية المجموع V_n : 0.25 ن

من السؤال (3) أثبتنا أن $u_k \leq \frac{I}{k+1}$

بجمع الأطراف من 1 إلى n نجد: $V_n \leq I \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1}$

نعلم من الفرع (ب) أن المجموع أكبر من أو يساوي $\ln(n+2) - \ln 2$.

ولكن، احذر هنا: الثابت $I = \frac{3}{e} - 2$ هو مقدار سالب (لأن $2 < 1.1 \approx \frac{3}{2.71}$).

عند ضرب المتراجحة $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \geq \ln(n+2) - \ln 2 \right)$ في العدد السالب I ، ينعكس اتجاهها وتصبح:

$$I \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \leq I (\ln(n+2) - \ln 2)$$

بالتالي، نتحصل على التعدي التالي: $V_n \leq I (\ln(n+2) - \ln 2)$

نحسب نهاية الطرف الأكبر: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln(n+2) - \ln 2) = +\infty$

وبما أن الثابت $I < 0$ ، فإن جداء عدد سالب في المالا نهاية الموجبة يعطي مالا نهاية سالبة.

إذن، نهاية المجموع هي $-\infty$

إنتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

حل التمرين 1

(I) دراسة قواسم عبارات بدلالة n :

1 أ) تبيان أن d_n يقسم 7: 0.25 ن

لدينا $d_n = \text{PGCD}(A_n; B_n)$ ، إذن d_n يقسم A_n و d_n يقسم B_n .
ومنه d_n يقسم الفرق بينهما: $B_n - A_n$.
 $B_n - A_n = (2n^2 + 3n + 5) - (2n^2 + 3n - 2) = 7$
إذن، 7 يقسم d_n .

ب) التحقق من عبارة A_n : 0.5 ن
بنشر العبارة المعطاة:

$$(n+2)(2n-1) = 2n^2 - n + 4n - 2 = 2n^2 + 3n - 2$$

وهي مطابقة لعبارة A_n . إذن: $A_n = (n+2)(2n-1)$.

ج) استنتاج قيم n حتى يكون $d_n = 7$: 0.25 ن

بما أن 7 عدد أولي، فإن $d_n \in \{1; 7\}$.
يكون $d_n = 7$ إذا وفقط إذا كان $A_n \equiv 0[7]$ و $B_n \equiv 0[7]$.
بما أن $B_n = A_n + 7$ ، فإن شرط $B_n \equiv 0[7]$ مُحقق تلقائياً إذا كان $A_n \equiv 0[7]$.
 $A_n \equiv 0[7] \iff (n+2)(2n-1) \equiv 0[7]$
بما أن 7 أولي، إما $n+2 \equiv 0[7]$ أو $2n-1 \equiv 0[7]$.
الحالة 1: $n+2 \equiv 0[7] \implies n \equiv 5[7]$
الحالة 2: $2n-1 \equiv 0[7] \implies 2n \equiv 1 \equiv 8[7] \implies n \equiv 4[7]$
إذن، $d_n = 7$ من أجل $n = 7k+5$ أو $n = 7k+4$ ($k \in \mathbb{N}$).

2 التعبير عن m_n بدلالة n : 0.25 ن

نعلم أن: $m_n \times d_n = A_n \times B_n \implies m_n = \frac{A_n \times B_n}{d_n}$
الحالة الأولى (إذا كان $d_n = 7$):

$$m_n = \frac{(2n^2 + 3n - 2)(2n^2 + 3n + 5)}{7}$$

الحالة الثانية (إذا كان $d_n = 1$):

$$m_n = (2n^2 + 3n - 2)(2n^2 + 3n + 5)$$

(II) جملة PGCD و PPCM:

1 تبيان أن d يقسم 273: 0.25 ن

لدينا $m = d \times a' \times b'$ حيث a' و b' أوليان فيما بينهما ($a' \wedge b' = 1$).
 بالتعويض في العلاقة: $da'b' - 3d = 273 \Rightarrow d(a'b' - 3) = 273$
 بما أن $(a'b' - 3)$ عدد صحيح، فإن 273 يقسم d .

2 القيم الممكنة للعدد الأولي d : 0.25 ن

نحلل العدد 273 إلى جداء عوامل أولية: $273 = 3 \times 7 \times 13$.
 القواسم الأولية للعدد 273 هي 3, 7, 13.
 إذن القيم الممكنة للعدد d هي: $\{3; 7; 13\}$.

3 دراسة الحالة $d = 7$:

أ) تبيان أن $xy = 42$: 0.25 ن

بما أن $d = \text{PGCD}(a; b) = 7$ ، فإنه يوجد عددان طبيعيين x, y حيث $a = 7x$ و $b = 7y$ مع $\text{PGCD}(x; y) = 1$.

بما أن $a < b$ فإن $x < y$.

بالتعويض في $7(xy - 3) = 273 \Rightarrow xy - 3 = \frac{273}{7} = 39$

إذن $xy = 42$. ب) استنتاج الثنائيات $(a; b)$ الممكنة: 0.5 ن

نبحث عن الثنائيات $(x; y)$ حيث $xy = 42$ ، $x < y$ ، و $\text{PGCD}(x; y) = 1$.

قواسم 42 هي: 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42.

الثنائيات المقبولة $(x; y)$ هي: (1; 42)، (2; 21)، (3; 14)، (6; 7).

بضرب كل ثنائية في $d = 7$ نحصل على الثنائيات $(a; b)$:

(42; 49)، (21; 98)، (14; 147)، (7; 294). ج) التحقق من الثنائية $(A_4; B_4)$: 0.25 ن

من أجل $n = 4$:

$$A_4 = 2(4)^2 + 3(4) - 2 = 32 + 12 - 2 = 42$$

$$B_4 = 2(4)^2 + 3(4) + 5 = 32 + 12 + 5 = 49$$

نلاحظ أن $(A_4; B_4) = (42; 49)$ ، وهي فعلاً إحدى الثنائيات المستنتجة في السؤال السابق.

(III) المعادلات الديوفانتية والموافقات:

1 حل المعادلة $7x - 6y = 1$ في $\mathbb{Z}^2$: 0.5 ن

$$7x - 6y = 1 \Rightarrow 7x \equiv 1[6]$$

بما أن $7 \equiv 1[6]$ ، فإن الموافقة تصبح: $1x \equiv 1[6]$.

إذن: $x = 6k + 1$ (حيث $k \in \mathbb{Z}$).

بالتعويض في المعادلة الأصلية نجد:

$$7(6k + 1) - 6y = 1$$

$$42k + 7 - 6y = 1$$

$$6y = 42k + 6$$

$$y = \frac{42k + 6}{6} = 7k + 1$$

إذن، مجموعة حلول المعادلة هي:

$$S = \{(6k + 1; 7k + 1) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

2 أ) الارتباط بالمعادلة (E): 0.25 ن

- لدينا $N \equiv 3[7] \implies N = 7x + 3$ (حيث $x \in \mathbb{N}$)
 - لدينا $N \equiv 4[6] \implies N = 6y + 4$ (حيث $y \in \mathbb{N}$)
- بالمساواة بين العبارتين:

$$7x + 3 = 6y + 4$$

$$7x - 6y = 4 - 3$$

$$7x - 6y = 1$$

وهي بالضبط المعادلة (E). إذن الثنائية $(x; y)$ هي حل للمعادلة (E).

ب) استنتاج أن $N \equiv 10[42]$: 0.25 ن

بما أن الثنائية $(x; y)$ حل للمعادلة (E)، فقد وجدنا سابقاً أن $x = 6k + 1$ (حيث $k \in \mathbb{Z}$). بالتعويض في عبارة N :

$$N = 7(6k + 1) + 3$$

$$N = 42k + 7 + 3$$

$$N = 42k + 10$$

ومنه نستنتج أن: $N \equiv 10[42]$.

3 تعيين العدد الطبيعي N : 0.25 ن

من الجزء الثاني (السؤال 3-ج)، لدينا: $A_4 = 42$ و $B_4 = 49$. من السؤال السابق وجدنا أن $N \equiv 10[42]$ ، وهذا يعني وجود عدد طبيعي q بحيث:

$$N = 42q + 10$$

بما أن الباقي 10 أصغر تماماً من القاسم 42 ($10 < 42$)، فإن هذه العبارة تمثل فعلياً القسمة الإقليدية للعدد N على 42 (أي على A_4)، ويكون q هو حاصل القسمة. حسب معطيات السؤال، حاصل القسمة هو $B_4 - 1$.

$$q = B_4 - 1$$

$$q = 49 - 1 = 48$$

نعوض قيمة q لنجد العدد N :

$$N = 42(48) + 10$$

$$N = 2016 + 10$$

إذن، العدد المطلوب هو:

$$N = 2026$$

1 البرهان بالتراجع على أن $-1 \leq u_n \leq -\frac{1}{2}$: 1 ن

نعرف الدالة $f(x) = (x+1)e^x - 1$ حيث $u_{n+1} = f(u_n)$.
 أساس التراجع: من أجل $n=0$ لدينا $u_0 = -\frac{1}{2}$ ، ومنه $-1 \leq -\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2}$ محققة تماماً.
 خطوة التراجع: نفرض أن $-1 \leq u_n \leq -\frac{1}{2}$ صحيحة، ونبرهن أن $-1 \leq u_{n+1} \leq -\frac{1}{2}$ صحيحة أيضاً.
 نحسب المشتقة: $f'(x) = (x+2)e^x$. بما أن $x \in [-1, -\frac{1}{2}]$ فإن $f'(x) > 0$ والدالة f متزايدة تماماً.
 من فرضية التراجع لدينا: $f(-1) \leq f(u_n) \leq f(-\frac{1}{2})$ $\Rightarrow -1 \leq u_n \leq -\frac{1}{2}$.
 بالحساب نجد $f(-1) = -1$ و $f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2\sqrt{e}} - 1$.
 بما أن $\frac{1}{2\sqrt{e}} - 1 < -\frac{1}{2}$ فإن: $-1 \leq u_{n+1} \leq -\frac{1}{2}$.
 إذن حسب مبدأ التراجع، فإنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-1 \leq u_n \leq -\frac{1}{2}$.

2 دراسة إشارة $(x+1)(e^x - 1)$ واستنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n) : 0.5 ن

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$		
$x + 1$		$-$	0	$+$		
$e^x - 1$		$-$	$-$	0	$+$	
$(x + 1)(e^x - 1)$		$+$	0	$-$	0	$+$

اتجاه تغير المتتالية (u_n) : 0.5 ن

نحسب الفرق: $u_{n+1} - u_n = (u_n + 1)(e^{u_n} - 1)$.
 بما أن $u_n \in [-1, -\frac{1}{2}]$ فإن u_n يقع في المجال الذي يكون فيه الجداء سالباً (بين -1 و 0).
 إذن $u_{n+1} - u_n \leq 0$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماماً.

3 تقارب المتتالية (u_n) وحساب نهايتها: 0.5 ن

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد -1 فهي متقاربة.
 نهايتها ℓ تحقق المعادلة $(\ell+1)(e^\ell - 1) = 0$. الحلول الممكنة هي $\ell = -1$ أو $\ell = 0$.
 بما أن $u_n \leq -\frac{1}{2}$ فإن النهاية المقبولة هي $\ell = -1$.

4 المتراجحتان واستنتاج النهاية:

المتراجحة الأولى: 0.25 ن

لدينا $1 + u_{n+1} = (1 + u_n)e^{u_n}$.
 بما أن $u_n \leq -\frac{1}{2}$ فإن $e^{u_n} \leq e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.
 ولأن $1 + u_n \geq 0$ نجد: $1 + u_{n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{e}}(1 + u_n)$.

المترابحة الثانية: 0.25 ن

نكتب المترابحة السابقة من أجل قيم متتابة لـ n وبالضرب طرفاً إلى طرف:

$$1 + u_1 \leq \frac{1}{\sqrt{e}}(1 + u_0)$$

$$1 + u_2 \leq \frac{1}{\sqrt{e}}(1 + u_1)$$

$$\dots$$

$$1 + u_n \leq \frac{1}{\sqrt{e}}(1 + u_{n-1})$$

بعد الاختزال المتسلسل نجد: $1 + u_n \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n (1 + u_0)$

بما أن $1 + u_0 = \frac{1}{2}$ فإن: $1 + u_n \leq \frac{e^{-n/2}}{2}$

استنتاج النهاية: 0.25 ن

بما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-n/2}}{2} = 0$ فإنه حسب مبرهنة الحصر نجد $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + u_n) = 0$ ومنه: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$

5 تبين أن $S_n = \ln(2u_n + 2)$: 0.75 ن

بما أن $e^{u_k} = \frac{1 + u_{k+1}}{1 + u_k}$ فإن $u_k = \ln(1 + u_{k+1}) - \ln(1 + u_k)$

المجموع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$ يعطي بالتعويض:

$$S_n = [\ln(1 + u_1) - \ln(1 + u_0)] + [\ln(1 + u_2) - \ln(1 + u_1)] + \dots + [\ln(1 + u_n) - \ln(1 + u_{n-1})]$$

بملاحظة الاختزال المتتالي يتبقى لنا:

$$S_n = \ln(1 + u_n) - \ln(1 + u_0)$$

بما أن $u_0 = -\frac{1}{2} \implies 1 + u_0 = \frac{1}{2}$ فإن $-\ln(\frac{1}{2}) = \ln(2)$

إذن $S_n = \ln(1 + u_n) + \ln(2)$ أي: $S_n = \ln(2u_n + 2)$



حل التمرين 3

الجزء الأول: حل الجملة في C 1 ن

لدينا الجملة التالية ذات المجهولين α و β :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2\sqrt{2} & \dots (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{\alpha} - \bar{\beta} = -2i\sqrt{6} & \dots (2) \end{cases}$$

نبدأ بتبسيط المعادلة (2). بإدخال مرافق طرفي المعادلة واستعمال خاصية أن مرافق المرافق هو العدد نفسه ومرافق المجموع هو مجموع المرافقات نجد:

$$\overline{\bar{\alpha} - \bar{\beta}} = \overline{-2i\sqrt{6}} \implies \alpha - \beta = 2i\sqrt{6} \quad \dots (3)$$

بجمع المعادلتين (1) و (3) طرفاً لطرف نجد:

$$(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta) = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{6} \implies 2\alpha = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{6}$$

بقسمة الطرفين على 2 نجد النتيجة الأولى:

$$\alpha = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$$

بتعويض قيمة α في المعادلة (1) نجد:
 $\sqrt{2} + i\sqrt{6} + \beta = 2\sqrt{2} \Rightarrow \beta = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} - i\sqrt{6}$
 إذن النتيجة الثانية هي:

$$\beta = \sqrt{2} - i\sqrt{6}$$

الجزء الثاني: دراسة الأعداد المركبة والمتتاليات

نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقتها على الترتيب: $Z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ ، $Z_B = \sqrt{2} - i\sqrt{6}$ ، $Z_C = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

1 كتابة Z_A و Z_C على الشكل الأسّي: **0.5 ن**

بالنسبة لـ Z_A : نحسب الطويلة $|Z_A| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2} = \sqrt{2+6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
 نبحث عن العمدة θ_A حيث تحقق: $\cos \theta_A = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ و $\sin \theta_A = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 إذن $\theta_A = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$$Z_A = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$$

بالنسبة لـ Z_C : نحسب الطويلة $|Z_C| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$
 نبحث عن العمدة θ_C حيث تحقق: $\cos \theta_C = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\sin \theta_C = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 إذن $\theta_C = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$$Z_C = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$$

2 كتابة النسبة $\frac{Z_A}{Z_C}$ على الشكلين الجبري والأسّي: **0.5 ن**

الشكل الأسّي:

بتطبيق خواص الشكل الأسّي نجد $\frac{Z_A}{Z_C} = \frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}$
 إذن:

$$\frac{Z_A}{Z_C} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

الشكل الجبري:

$$\frac{Z_A}{Z_C} = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{6}}{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}$$

نضرب البسط والمقام في مرافق المقام وهو $\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ نجد:

$$\frac{Z_A}{Z_C} = \frac{(\sqrt{2} + i\sqrt{6})(\sqrt{2} - i\sqrt{2})}{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \frac{2 - i\sqrt{4} + i\sqrt{12} - i^2\sqrt{12}}{4}$$

بما أن $i^2 = -1$ و $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ نجد:

$$\frac{Z_A}{Z_C} = \frac{2 - 2i + 2i\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{4} = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{4} + i\frac{2\sqrt{3} - 2}{4}$$

بالاختزال على 2 نجد:

$$\frac{Z_A}{Z_C} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

3 استنتاج القيم المضبوطة لـ $\cos \frac{\pi}{12}$ و $\sin \frac{\pi}{12}$: 0.5 ن

من الشكل الأسي نستنتج الشكل المثلثي للنسبة: $\frac{Z_A}{Z_C} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$

بالمطابقة بين الجزأين الحقيقي والتخيلي للشكلين الجبري والمثلثي نجد:

$$\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \Rightarrow \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

إذن:

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \quad \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

4 تعيين مجموعة النقط Γ : 0.5 ن

لدينا الشرط $\arg \left(\frac{z - Z_A}{z - Z_B} \right) = \pi + 2k\pi$

هذا الشرط يترجم هندسيا إلى الزاوية الموجهة بين الشعاعين: $(\vec{MB}, \vec{MA}) = \pi + 2k\pi$

هذا يعني أن الشعاعين $\vec{MA}$ و $\vec{MB}$ مرتبطان خطيا ومتعاكسان في الاتجاه.

وبالتالي النقطة M تنتمي إلى القطعة المستقيمة المفتوحة التي طرفها A و B .

إذن:

Γ هي القطعة المستقيمة $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B

5 دراسة المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

(أ) إثبات أن u_n حقيقي (الحل الذي): 0.5 ن

نلاحظ أن $Z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ و $Z_B = \sqrt{2} - i\sqrt{6}$ وبالتالي $\overline{Z_B} = Z_A$ ومنه $Z_A = \overline{Z_B}$

نعلم أن العدد المركب Z يكون حقيقيا إذا وفقط إذا كان $\overline{Z} = Z$

نحسب مرافق المتتالية u_n : $\overline{u_n} = \overline{Z_A^n + Z_B^n}$

من خواص المرافق نجد: $\overline{u_n} = (\overline{Z_A})^n + (\overline{Z_B})^n = Z_B^n + Z_A^n = u_n$

بما أن $\overline{u_n} = u_n$ فإن:

$u_n \in \mathbb{R}$ من أجل كل عدد طبيعي n

(ب) تبين عبارة u_n : 0.5 ن

باستخدام دستور "دي موافر" لدينا: $Z_A^n = (2\sqrt{2})^n e^{i \frac{n\pi}{3}} = 2^{\frac{3n}{2}} \left(\cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3} \right)$

وبما أن $Z_B = \overline{Z_A}$ فإن: $Z_B^n = 2^{\frac{3n}{2}} \left(\cos \frac{n\pi}{3} - i \sin \frac{n\pi}{3} \right)$

بجمع العبارتين يختزل الجزء التخيلي ونجد: $u_n = 2^{\frac{3n}{2}} \left(2 \cos \frac{n\pi}{3} \right)$

بضرب القوى $2^{\frac{3n}{2}} \times 2^1 = 2^{\frac{3n+2}{2}}$ نجد:

$$u_n = 2^{\frac{3n+2}{2}} \cos \left(\frac{n\pi}{3} \right)$$

(ج) البرهان على العلاقة التراجعية: 0.5 ن

لدينا المجموع $S = Z_A + Z_B = 2\sqrt{2}$ والجداء $P = Z_A \times Z_B = 8$
 إذن Z_A و Z_B هما حلا المعادلة من الدرجة الثانية: $Z^2 - 2\sqrt{2}Z + 8 = 0 \implies Z^2 - SZ + P = 0$
 بما أن Z_A حل للمعادلة فإنه يحقق: $Z_A^2 - 2\sqrt{2}Z_A + 8 = 0$
 بضرب طرفي المساواة في Z_A^n نجد: $(*) \dots Z_A^{n+2} - 2\sqrt{2}Z_A^{n+1} + 8Z_A^n = 0$
 وبنفس الطريقة لـ Z_B نجد: $(**) \dots Z_B^{n+2} - 2\sqrt{2}Z_B^{n+1} + 8Z_B^n = 0$
 بجمع المعادلتين $(*)$ و $(**)$ طرفاً لطرف واستخراج المعاملات كعامل مشترك نجد:
 $(Z_A^{n+2} + Z_B^{n+2}) - 2\sqrt{2}(Z_A^{n+1} + Z_B^{n+1}) + 8(Z_A^n + Z_B^n) = 0$
 وهو ما يكفي:

$$u_{n+2} - 2\sqrt{2}u_{n+1} + 8u_n = 0$$

(د) البرهان على العلاقة $u_{n+6} = 512u_n$: 0.5 ن

نحسب أولاً Z_A^6 : من الشكل الأسّي نجد $Z_A^6 = \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^6 e^{i(6 \times \frac{\pi}{3})} = 2^9 e^{i2\pi}$
 بما أن $e^{i2\pi} = 1$ و $2^9 = 512$ فإن $Z_A^6 = 512$
 نكتب الآن Z_A^{n+6} على الشكل: $Z_A^{n+6} = Z_A^n \times Z_A^6 = 512Z_A^n$
 وبنفس الطريقة نجد $Z_B^{n+6} = 512Z_B^n$ (لأن $Z_B^6 = \overline{Z_A^6} = \overline{512} = 512$)
 بالجمع نجد $u_{n+6} = Z_A^{n+6} + Z_B^{n+6} = 512Z_A^n + 512Z_B^n = 512(Z_A^n + Z_B^n)$
 إذن:

$$u_{n+6} = 512u_n$$



حل التمرين 4

(I) دالة معرفة بتكامل:

1 قابلية الاشتقاق وحساب المشتقة: 0.75 ن

الدالة $t \mapsto \frac{\ln t}{t^2}$ مستمرة على المجال $]0; +\infty[$
 إذن، الدالة f المعرفة بالتكامل $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt$ هي الدالة الأصلية لهذه الدالة والتي تنعدم عند $x = 1$.
 ومنه، الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ومشتقتها هي:

$$f'(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

2 إشارة $f'(x)$ واتجاه التغير: 0.5 ن

من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، المقام $x^2 > 0$ تماماً، إذن إشارة $f'(x)$ من إشارة $\ln x$
 لدينا $\ln x = 0$ يكافئ $x = 1$
 $\ln x < 0$ من أجل $x \in]0; 1[$ و $\ln x > 0$ من أجل $x \in]1; +\infty[$
 وبالتالي، الدالة f متناقصة تماماً على المجال $]0; 1[$ ومتزايدة تماماً على المجال $]1; +\infty[$.

3 البرهان باستخدام المكاملة بالتجزئة: 0.75 ن

نضع: $u(t) = \ln t \implies u'(t) = \frac{1}{t}$ و $v(t) = -\frac{1}{t} \implies v'(t) = \frac{1}{t^2}$

بتطبيق قانون المكاملة بالتجزئة:

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt &= \left[-\frac{\ln t}{t} \right]_1^x - \int_1^x \left(\frac{1}{t} \right) \left(-\frac{1}{t} \right) dt \\ &= -\frac{\ln x}{x} + \int_1^x \frac{1}{t^2} dt \\ &= -\frac{\ln x}{x} + \left[-\frac{1}{t} \right]_1^x \\ &= -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1 \\ &= 1 - \frac{1 + \ln x}{x}\end{aligned}$$

إذن، من أجل كل $x \in]0; +\infty[$: $f(x) = 1 - \frac{1 + \ln x}{x}$

II دراسة الدالة f :

1 حساب النهاية عند 0 والتفسير الهندسي: 0.5 ن

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{1 + \ln x}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty\end{aligned}$$

(لأن $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$ مسبوقة بإشارة ناقص).

التفسير الهندسي: المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ (محور الترتيب) هو مستقيم مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

2 حساب النهاية عند $+\infty$ واستنتاج المقارب الأفقي: 0.5 ن

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) = 1$$

(حسب التزايد المقارن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$)

الاستنتاج: المنحنى (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً أفقياً (Δ) معادلته $y = 1$ بجوار $+\infty$.

3 حساب $f(1)$ وجدول التغيرات: 0.5 ن

$$f(1) = 1 - \frac{1 + \ln 1}{1} = 1 - 1 = 0$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	1

4 استنتاج إشارة $f(x)$: 0.5 ن

من جدول التغيرات، الدالة تقبل قيمة حدية صغرى قيمتها 0 عند $x = 1$.
ومنه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ لدينا $f(x) \geq 0$.

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$		+	0

5 دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) : 0.5 ن

ندرس إشارة الفرق $f(x) - 1$:

$$f(x) - 1 = 1 - \frac{1 + \ln x}{x} - 1 = \frac{-(1 + \ln x)}{x}$$

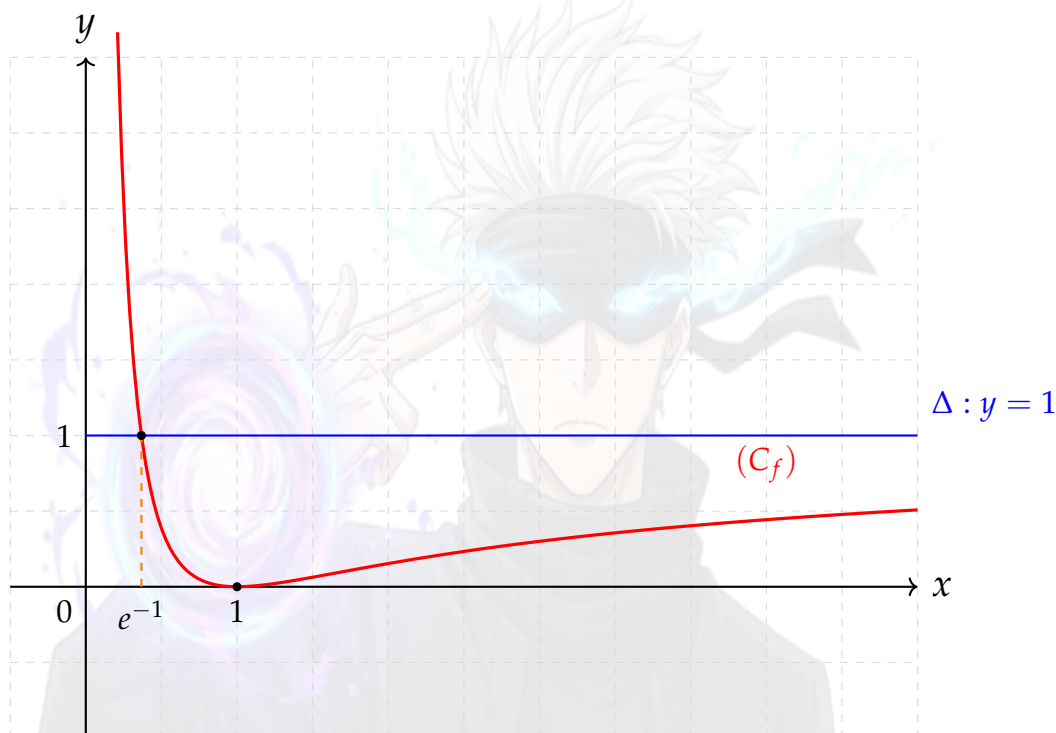
بما أن $x > 0$ فإن إشارة الفرق من إشارة $-(1 + \ln x)$.
نفرض أن الفرق موجب، أي $f(x) - 1 > 0$ ، وهذا يتحقق عندما:

$$x < e^{-1} \iff \ln x < -1 \iff 1 + \ln x < 0 \iff -(1 + \ln x) > 0$$

وعليه، يكون المنحنى فوق المقارب في المجال $]0; e^{-1}[$ وتحت في المجال $]e^{-1}; +\infty[$.

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$f(x) - (\Delta)$		+	0
الوضعية		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) تحت (Δ)

6 الرسم 1 ن



(III) دراسة دالة مركبة $h(x) = f(\ln x)$

1 حساب المشتقة $h'(x)$ ودراسة اتجاه التغير: **0.5 ن**
الدالة h قابلة للاشتقاق على المجال $]1; +\infty[$ ومشتقتها هي:

$$h'(x) = (\ln x)' \cdot f'(\ln x) = \frac{1}{x} f'(\ln x)$$

بما أن $x \in]1; +\infty[$ فإن $\frac{1}{x} > 0$ تماماً.
إذن، إشارة $h'(x)$ هي من نفس إشارة $f'(\ln x)$.
من دراسة الدالة f (في الجزء الأول)، نعلم إشارة $f'(X)$ حيث $X = \ln x$

$$f'(X) = 0 \iff X = 1 \implies \ln x = 1 \implies x = e \cdot$$

$$f'(X) < 0 \iff 0 < X < 1 \implies 0 < \ln x < 1 \implies 1 < x < e \cdot$$

$$f'(X) > 0 \iff X > 1 \implies \ln x > 1 \implies x > e \cdot$$

ومنه، الدالة h متناقصة تماماً على المجال $]1; e]$ و متزايدة تماماً على المجال $[e; +\infty[$

2 حساب النهايات: **0.5 ن**

$$\bullet (X = \ln x \text{ بوضع}) \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{X \rightarrow 0^+} f(X) = +\infty \cdot$$

$$\bullet (X = \ln x \text{ بوضع}) \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} f(X) = 1 \cdot$$

3 جدول تغيرات الدالة h : **0.5 ن**

لدينا القيمة الحدية الصغرى $h(e) = f(\ln e) = f(1) = 0$

x	1	e	$+\infty$
$h'(x)$		- 0 +	
$h(x)$	$+\infty$	0	1

إنتى الموضوع الثاني

E²_MEZROUH
EZ MATHS WITH