الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية باتنة
إمتحان بكالوريا تجريبي التعليم الثانوي
الشعبة: علوم تجريبية

ثانوية بونحوش مسعود–تالخمت
السنة الدراسية:2025 / 2026
دورة: ماي 2026

إختبار في مادة : الرياضيات — المدة :03 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأوّل :

التمرين الأول: (04 نقاط)

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $\left(z^2+2+2i\sqrt{3}\right)\left(z^2+2z+4\right)=0$

II) في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر A، B، C و D نقط من المستوي لواحقها على الترتيب: $z_A=-1+i\sqrt{3}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_c=-z_A$ و $z_D=-z_B$

1) I) اكتب $\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$ على الشكل الأسي ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

ب) بين أن النقط A ، B ، C و D تنتمي الى نفس الدائرة التي يطلب تعيين مركزا ونصف قطرها.

ج) استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

2) عين مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق: $\arg\left((1+i\sqrt{3})z+4\right)=\dfrac{\pi}{3}+k\pi$

3) I) α عدد مركب حيث: $\left(\dfrac{z_A}{\alpha}\right)=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$. عين طويلة وعمدة العدد المركب α

ب) اكتب على الشكل الجبري $\dfrac{z_A}{\alpha}$ ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(U_n) متتالية هندسية أساسها q وحدودها موجبة تماما ، تحقق جملة المعادلتين التالية: $\begin{cases}\ln(U_0)+\ln(U_1)+\ln(U_2)=3\ln(3)\\ e^{U_2-U_0}=e^{-8}\end{cases}$

1) بيّن أن $U_1=3$، ثم عيّن U_0 والأساس q للمتتالية (U_n).

2) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $U_n=9\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

3) نعتبر المتتاليتين (V_n) و (W_n) المعرفتين من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $V_n=U_0+U_1+\cdots+U_n$ و $W_n=V_n+\dfrac{3}{2}U_n$

I) ادرس اتجاه تغير المتتالية (V_n) ثم بيّن أن المتتالية (W_n) متناقصة تماما .

ب) احسب $\lim\limits_{n\to\infty}(W_n-V_n)$ ، ثم استنتج أن المتتاليتين (V_n) و (W_n) متجاورتان.

ج) اكتب V_n بدلالة n ثم عين نهاية كل (V_n) و (W_n)

4) احسب P_n بدلالة n حيث: $P_n=(W_0-V_0)\times(W_1-V_1)\times\cdots\times(W_n-V_n)$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

I) يحتوي كيس على كريتين بيضاوين و n كرية سوداء، لا يمكن التمييز بينها عند اللمس. يسحب اللاعب عشوائيا وفي آن واحد كريتين من الكيس، ونعتبر الحدث A_2: «اللاعب سحب كريتين بيضاوين».

حدد قيمة n بحيث يكون احتمال الحدث A_2 هو $P(A_2)=\dfrac{1}{15}$.

Prof Halim Math

II) في كل مما يلي، نضع $n = 4$.

1) يسحب اللاعب في آن واحد كريتين من الكيس ونعتبر الأحداث التالية:

A_0: «سحب كريتين سوداوين». A_1: «سحب كرية سوداء وكرية بيضاء». A_2: «سحب كريتين بيضاوين».

ا) احسب احتمال الأحداث A_0 و A_1.

ب) خلال هذا السحب، يسجل اللاعب ثلاث نقاط لكل كرية بيضاء مسحوبة، ونقطتين لكل كرية سوداء مسحوبة.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد النقاط المسجلة.

عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$.

2) بعد هذا السحب الأول، يعيد اللاعب الكريات السوداء المسحوبة فقط إلى الكيس، (الكريات البيضاء المسحوبة لا تعاد)، ثم نسحب كريتين في آن واحد.

ليكن B_i الحدث: «الحصول على i كرية بيضاء في السحب الثاني» حيث $i \in \{0, 1, 2\}$.

ا) احسب الاحتمال الشرطي $P_{A_2}(B_0)$ احتمال الا يسحب اللاعب اي كرية بيضاء علما أنه سحب كريتين بيضاويين في السحب الأول. ثم استنتج $P(B_0 \cap A_2)$.

ب) احسب بنفس الطريقة $P(B_0 \cap A_1)$ و $P(B_0 \cap A_0)$. استنتج أن $P(B_0) = \frac{41}{75}$.

التمرين الرابع: **(07 نقاط)**

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي: $f(x) = 2(x-1)\ln(x) - x^2 + 2x - 3$.

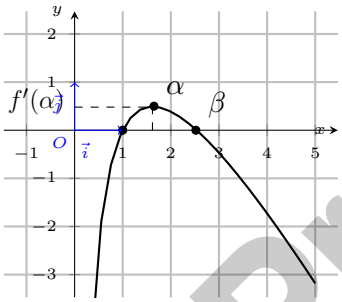
وليكن $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في مستوي منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (الوحدة: 2cm).

1) ا) بين أن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

ب) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ ثم أعط تفسيرا هندسيا للنتيجة.

ج) بين أنه: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0, +\infty[$، $f'(x) = -2x + 4 - \frac{2}{x} + 2\ln(x)$.

2) اعتمادا على منحنى الدالة المشتقة $(\mathcal{C}_{f'})$ المقابل:



ا) حدد إشارة الدالة f' على المجال $]0, +\infty[$.

ب) استنتج جدول تغيرات الدالة f.

ج) اعط جدول إشارة المشتقة الثانية f''.

د) بين أن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نقطة الانعطاف.

3) بين أنه: من أجل كل $x > 0$، $f''(x) = \frac{-2(x^2 - x - 1)}{x^2}$ ثم استنتج القيمة المضبوطة لـ α.

4) بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث: $0.19 < x_0 < 0.2$

5) أنشئ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ (نأخذ $f(\beta) \approx -1.5$ و $f(\alpha) \approx -1.78$).

6) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = |f(x)|$. (C_g) تمثيلها البياني.

(ا) ارسم (C_g) في نفس المعلم السابق.

(ب) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $g(x) = m$

7) (ا) باستعمال المكاملة بالتجزئة، عين الدالة الأصلية للدالة: $x \longmapsto 2(x-1)\ln x$ التي تنعدم عند 1

(ب) احسب بالسنتيمتر المربع $\mathcal{S}$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $y = 0$، $x = 1$ و $x = e$.

إنتهى الموضوع الأول

Prof Haim Math

الموضوع الثّاني :

التمرين الأول: (04 نقاط)

I) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I=[1;2]$ بـ: $f(x)=\dfrac{1+x^2}{2x}$

- بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I.

II) نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة بـ $U_0=2$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1}=\dfrac{1+U_n^2}{2U_n}$

1) (أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، فإن: $1\leq U_n\leq 2$.

(ب) بيّن أن المتتالية (U_n) متناقصة.

(ج) بيّن أن المتتالية (U_n) متقاربة، ثم احسب نهايتها l.

2) (أ) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $U_{n+1}-1\leq\dfrac{1}{2}(U_n-1)$.

(ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $U_n-1\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. ثم احسب نهاية المتتالية (U_n).

3) نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n، $V_n=\dfrac{1}{U_n}$.

بيّن أن المتتاليتين (U_n) و (V_n) متجاورتان.

4) من أجل كل عدد طبيعي n، نضع: $S_n=U_0+U_1+\cdots+U_n$ و

(أ) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $n+1\leq S_n\leq n+3-\dfrac{1}{2^n}$.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

نعتبر كثير الحدود P المعرف على $\mathbb{C}$ بـ: $P(z)=z^3-2z^2+16$.

I) 1) احسب: $P(-2)$ ثم عين العددين الحقيقيين a و b بحيث: $P(z)=(z+2)(z^2+az+b)$.

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$.

II) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B و C لواحقها:

$z_A=4$ ، $z_B=2+2i$ و $z_C=2-2i$.

1) نعتبر العدد المركب $L(z)$ حيث: $L(z)=\dfrac{z-z_C}{z-z_B}$، $z\neq 2+2i$

(أ) اكتب كل من $L(z_A)$ و $z_\omega=L(6+2i)$ على الشكل الجبري ثم الأسي.

(ب) استنتج طبيعة المثلث ABC.

2) عين Γ مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق $\arg(iz-2-2i)+\arg(\bar{z}-2+2i)=0+2k\pi$.

3) نعتبر من من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، M_n ذات اللاحقة z_n حيث: $z_n=(z_\omega)^{2n-2}$ و $v_n=|z_n|$.

(أ) احسب v_1 ثم بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب اساسها 2.

(ب) احسب المجموع $S=|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_{2026}|$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

يحتوي صندوق U_1 على أربع كريات حمراء مرقمة بـ: 3، 3، 2، 0 وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: 3، 3، 0 ويحتوي صندوق U_2 على ثلاث كريات حمراء مرقمة بـ: 3، 3، 2 وكريتين خضراوين مرقمة بـ: 3، 0 .

نرمي قطعة نقدية متوازنة مرتين، فإذا ظهر الوجه مرتان نسحب من الصندوق U_1 كرتين على التوالي دون إرجاع، وفي الحالات الأخرى نسحب من الصندوق U_2 كرتين على التوالي مع الإرجاع.

Prof Halim Math

1) (أ) احسب إحتمال الأحداث التالية :

- A: "الكريتان المسحوبتان من نفس اللون".
- B: "الكريتان المسحوبتان تحمل نفس الرقم".
- C: "ظهور اللون الأحمر مرة على الأقل في الكريتين المسحوبتين".

(ب) هل الحدثان A و B مستقلان؟ علل.

(ج) علما أن الكريتين المسحوبتين من لونين مختلفين، ما إحتمال أن تكونا مسحوبتان من الصندوق U_1 ؟

2) نضع كل كريات الصندوقين U_1 و U_2 في كيس غير شفاف، ونسحب منه ثلاث كريات في آن واحد. نعتبر المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب العدد الأكبر من بين الأعداد الظاهرة.

(أ) عين قيم المتغير العشوائي X ، ثم بيّن أن: $P(X=3)=\frac{21}{22}$

(ب) عيّن قانون إحتماله، ثم أحسب أمله الرياضياتي.

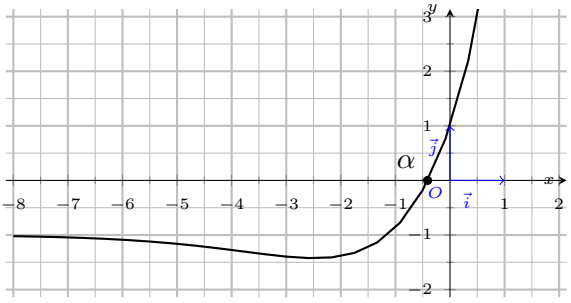
التمرين الرابع: (07 نقاط)

I)

1) h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=e^x-x$.

- أدرس إتجاه تغير الدالة h ثم استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x-x>0$.

2) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=e^{2x}+(1-x^2)e^x-1$ ، (C_g) تمثيلها البياني كما هو موضح في الشكل المقابل.



(أ) لتكن α فاصلة نقطة تقاطع (C_g) مع حامل محور الفواصل ،

- تحقق أن $-0.41<\alpha<-0.40$.

(ب) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\frac{xe^x-1}{e^x-x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

2) (أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

(ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

3) (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=\frac{g(x)}{(e^x-x)^2}$.

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

4) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β على المجال $[0;+\infty[$ ثم تحقق أن: $0.56<\beta<0.57$

5) انشئ كلا من (Δ) و (C_f). (نأخذ: $f(\alpha)\approx-1.18$).

6) Q الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $Q(x)=\frac{xe^x-e^x}{e^x-x}$ ، (C_Q) تمثيلها البياني .

(أ) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (C_Q).

(ب) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، (C_Q) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=-1$ و $x=1$.

إنتهى الموضوع الثاني

Prof Haim Math

تصحيح مقترح لباك تجريبي دورة ماي 2026 في مادة الرياضيات

الأستاذ: حليم مقلاتي | الموضوع الأول | المستوى: 3 علوم تجريبية

التمرين الأول:

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة:

$(z^2+2z+4)(z^2+2+2i\sqrt{3})=0$

المعادلة تكافئ

$$\begin{cases} z^2+2+2i\sqrt{3}=0\cdots(1) & \text{إما} \\ z^2+2z+4=0\cdots(2) & \text{أو} \end{cases}$$

من (1) نجد: $z^2=-2-2i\sqrt{3}$ معناه:

$$\begin{cases} x^2+y^2=4\cdots(3) \\ x^2-y^2=-2\cdots(4) \\ 2xy=-2\sqrt{3}\cdots(5) \end{cases}$$

بجمع (3) و (4) نجد: $2x^2=2$ معناه $x=1$ أو $x=-1$. بالتعويض في (5) نجد: $y=-\sqrt{3}$ أو $y=\sqrt{3}$

ومنه الجذران التربيعيان لـ: (1) هما: $z_1=1-i\sqrt{3}$ و $z_2=-z_1=-1+i\sqrt{3}$

من المعادلة (2) نجد: $\Delta=2^2-4(4)=-12=(2i\sqrt{3})^2$.

الجذران هما: $z_4=-1-i\sqrt{3}$ و $z_3=-1+i\sqrt{3}$.

إذن مجموعة الحلول هي: $S=\{-1-i\sqrt{3}\,;\,-1+i\sqrt{3}\,;\,1-i\sqrt{3}\,;\,-1+i\sqrt{3}\}$

II) لدينا: $z_A=-1+i\sqrt{3}$، $z_B=\overline{z_A}=-1-i\sqrt{3}$، $z_C=-z_A=1-i\sqrt{3}$، $z_D=-z_B=1+i\sqrt{3}$.

01 ا) كتابة النسبة $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$ على الشكل الأسي:

$$\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=\frac{(-1+i\sqrt{3})-(-1-i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})-(-1-i\sqrt{3})}=\frac{2i\sqrt{3}}{2}=i\sqrt{3}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

✔ طبيعة المثلث ABC:

بما أن: $\begin{cases} \left|\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right|=\sqrt{3} \\ \arg\left(\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right)=\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ معناه $\begin{cases} \frac{AB}{BC}=\sqrt{3} \\ \left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)=\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

فإن المثلث ABC قائم في B.

ب) تبيان أن النقط تنتمي لنفس الدائرة:

نلاحظ أن: $|z_A|=|z_B|=|z_C|=|z_D|=2$ فإن النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى الدائرة التي مركزها $O(0,0)$ ونصف قطرها $r=2$.

Prof Haim Math

ج) طبيعة الرباعي $ABCD$:

لدينا:

$$z_B - z_A = -1 - i\sqrt{3} + 1 - i\sqrt{3} = -2i\sqrt{3}$$

و

$$z_C - z_D = 1 - i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3} = -2i\sqrt{3}$$

معناه $z_B - z_A = z_C - z_D$ أي $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ومنه الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

ولدينا مما سبق:

$$\begin{cases} AB \neq BC \\ \left(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}\right) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$$

ومنه الرباعي $ABCD$ مستطيل.

طريقة ثانية: مستطيل (قطراه متناصفان، متساويان، وغير متعامدين).

02 **تعيين مجموعة النقط M:**

لدينا: $\arg((1+i\sqrt{3})z+4) = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$ معناه:

$$\arg\left((1+i\sqrt{3})(z+(1-i\sqrt{3}))\right) = \arg\left((1+i\sqrt{3})(z-(-z_C)\right)$$

معناه:

$$\arg(1+i\sqrt{3}) + \arg(z - z_A) = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

معناه

$$\frac{\pi}{3} + \arg(z - z_A) = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

ومنه $\arg(z - z_A) = k\pi$. المجموعة هي المستقيم الذي يشمل A وموازٍ لحامل محور الفواصل (باستثناء C).

03 ا) **طويلة وعمدة α:**

لدينا: $\dfrac{z_A}{\alpha} = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$ معناه $\alpha = \dfrac{z_A}{\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}}$ معناه:

$$\begin{cases} |\alpha| = \dfrac{|z_A|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \\ \arg(\alpha) = \arg(z_A) - \dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{5\pi}{12} = -\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

ب) **استنتاج القيم المضبوطة:**

نكتب $\dfrac{z_A}{\alpha}$ على الشكل الجبري:

$$\frac{z_A}{\alpha} = \frac{-1+\sqrt{3}}{1-i} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

ولدينا الشكل المثلثي لـ:

$$\frac{z_A}{\alpha} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} \cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = -\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

التمرين الثاني:

(U_n) متتالية هندسية أساسها q وحدودها موجبة تماماً، حيث تحقق الجملة:

$$\begin{cases} \ln(U_0) + \ln(U_1) + \ln(U_2) = 3\ln(3) \\ e^{U_2 - U_0} = e^{-8} \end{cases}$$

Prof Halim Math

01 **تبيان أن $U_1 = 3$ وتعيين U_0 والأساس q:**

- **تبيان أن $U_1 = 3$:** من المعادلة الأولى:

$$\ln(U_0 \times U_1 \times U_2) = \ln(3^3)$$

بما أن $U_0 \times U_2 = U_1^2$ (وسط هندسي)، فإن: $U_1^2 \times U_1 = 27$ معناه $U_1^3 = 27$ ومنه $U_1 = 3$.

- **تعيين U_0 والأساس q:**

من المعادلة الثانية: $U_2 - U_0 = -8$. نعوض بـ $U_0 = \dfrac{3}{q}$ و $U_2 = 3q$ نجد: $3q - \dfrac{3}{q} = -8$ معناه $3q^2 + 8q - 3 = 0$.

بحل المعادلة نجد:

$$\begin{cases} q = \dfrac{1}{3}; & \text{(مقبول)} \\ q = -3; & \text{(مرفوض) أو.} \end{cases}$$

ومنه: $U_0 = \dfrac{3}{1/3} = 9$.

02 **التحقق أن $U_n = 9\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$:**

بما أن $U_0 = 9$ والأساس $q = \dfrac{1}{3}$، فإن عبارة الحد العام هي:

$$U_n = U_0 \times q^n = 9\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

03 لدينا: المتتاليتين (V_n) و (W_n) المعرفتين من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي:

$$V_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n \text{ و } W_n = V_n + \frac{3}{2}U_n$$

ا) **اتجاه التغير:**

- لدينا:

$$\begin{cases} V_{n+1} = U_1 + U_2 + \cdots + U_{n+1} \\ V_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n \end{cases}$$

معناه $V_{n+1} - V_n = U_{n+1} > 0$، إذن (V_n) متزايدة تماماً.

- **اتجاه تغير (W_n):**

$$\begin{aligned} W_{n+1} - W_n &= (V_{n+1} - V_n) + \frac{3}{2}(U_{n+1} - U_n) = U_{n+1} + \frac{3}{2}U_{n+1} - \frac{3}{2}U_n \\ &= \frac{5}{2}U_{n+1} - \frac{3}{2}U_n = \frac{5}{2}(\frac{1}{3}U_n) - \frac{3}{2}U_n = (\frac{5}{6} - \frac{9}{6})U_n = -\frac{2}{3}U_n \end{aligned}$$

بما أن $U_n > 0$ إذن (W_n) **متناقصة تماماً.**

ب) حساب $\lim\limits_{n\to\infty}(W_n - V_n)$:

$$\lim_{n\to+\infty}(W_n - V_n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{3}{2}U_n = 0$$

بما أن:

$$\lim_{n\to+\infty}(W_n - V_n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{3}{2}U_n = 0$$

و (V_n) متزايدة و (W_n) متناقصة ، فهما متجاورتان.

Prof Halim Math

ج) كتابة V_n بدلالة n:

$$V_n = 9\frac{1-(1/3)^{n+1}}{1-1/3} = \frac{27}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$$

النهاية هي: $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \frac{27}{2}$.

04 حساب الجداء P_n بدلالة n:

$$\begin{aligned}
P_n &= (W_0 - V_0)\times(W_1 - V_1)\times\cdots\times(W_n - V_n)\\
&= \left(\frac{3}{2}\right)^0 \times U_0 + \left(\frac{3}{2}\right)^1 \times U_1 + \cdots + \left(\frac{3}{2}\right)^n \times U_n\\
&= \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \times (U_0 \times U_1 \times \cdots \times U_n)\\
&= \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \times 9^{n+1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}\\
&= \frac{27^{n+1}}{2^{n+1}\times 3^{\frac{n(n+1)}{2}}}
\end{aligned}$$

التمرين الثالث:

I)

يسحب اللاعب كرتين في آن واحد من صندوق يحتوي على $n+2$ كرة (كرتان بيضاوان و n كرة سوداء). عدد السحب الممكنة الكلي هو: $C_{n+2}^2 = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$

ليكن الحدث A_2: "سحب كرتين بيضاوتين". بما أن هناك كرتين بيضاوتين فقط، فإن احتمال A_2 هو:

$$P(A_2) = \frac{1}{C_{n+2}^2} = \frac{2}{(n+2)(n+1)}$$

إيجاد قيمة n:

إذا علمنا أن $P(A_2) = \frac{1}{15}$، فإن:

$$\frac{2}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{15}$$

معناه $(n+2)(n+1) = 30$ معناه $n^2+3n+2 = 30$ معناه $n^2+3n-28 = 0$ أي $(n-4)(n+7) = 0$ بما أن n عدد طبيعي (عدد كرات)، فإننا نرفض الحل السالب ونأخذ: $n = 4$.

II) لدينا: $N = 4$ الصندوق يحتوي الآن على 6 كرات (2 بيضاء و 4 سوداء).

01 حساب الاحتمالات:

(ا) • الحدث A_0 (سحب كرتين سوداوين): $P(A_0) = \frac{C_4^2}{C_6^2} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

• الحدث A_1 (سحب كرة بيضاء وكرة سوداء): $P(A_1) = \frac{C_2^1 \times C_4^1}{C_6^2} = \frac{2\times 4}{15} = \frac{8}{15}$

(ب) المتغير العشوائي X والأمل الرياضي :

X يمثل عدد النقاط المسجلة (السوداء بـ 2 نقطة، والبيضاء بـ 3 نقاط).

Prof Halim Math

• إذا تحقق A_0 (سوداوان): $X = 2 + 2 = 4$ نقاط.
• إذا تحقق A_1 (بيضاء وسوداء): $X = 3 + 2 = 5$ نقاط.
• إذا تحقق A_2 (بيضاوان): $X = 3 + 3 = 6$ نقاط.

تعيين قانون احتمال المتغير العشوائي X: $P(X = 4) = P(A_0) = \frac{6}{15}$ ، $P(X = 5) = P(A_1) = \frac{8}{15}$ و $P(X = 6) = P(A_3) = \frac{1}{15}$

جدول قانون الاحتمال:

x_i	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{6}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

الأمل الرياضي $E(X)$:

$$E(X) = \sum x_i p_i = 4\left(\frac{6}{15}\right) + 5\left(\frac{8}{15}\right) + 6\left(\frac{1}{15}\right) = \frac{24 + 40 + 6}{15} = \frac{70}{15} = \frac{14}{3}$$

02 ليكن B_i حدث الحصول على i كرة بيضاء في السحب الثاني.

ا) الاحتمال الشرطي:

$P_{A_2}(B_0) = 1$ (لأن الكيس يصبح خالياً من البيضاء).

استنتاج التقاطع: $P(B_0 \cap A_2) = P(A_2) \times P_{A_2}(B_0) = \frac{1}{15} \times 1 = \frac{1}{15}$.

ب) الاحتمالات الكلية:

• $P(B_0 \cap A_1) = P(A_1) \times P_{A_1}(B_0) = \frac{8}{15} \times \frac{C_4^2}{C_5^2} = \frac{8}{15} \times \frac{6}{10} = \frac{8}{25}$.
• $P(B_0 \cap A_0) = P(A_0) \times P_{A_0}(B_0) = \frac{6}{15} \times \frac{C_4^2}{C_6^2} = \frac{6}{15} \times \frac{6}{15} = \frac{4}{25}$.

حساب $P(B_0)$: باستعمال قانون الاحتمالات الكلية:

$$P(B_0) = \frac{5}{75} + \frac{24}{75} + \frac{12}{75} = \frac{41}{75}$$

التمرين الرابع:

$f(x) = 2(x-1)\ln(x) - x^2 + 2x - 3$.

01 ا) تبيان أن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} f(x) &= \lim_{x \to +\infty} \left(2(x-1)\ln(x) - x^2 + 2x - 3\right) \\
&= \lim_{x \to +\infty} x^2 \left[2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)\ln(x) - 1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right] \\
&= \lim_{x \to +\infty} x^2 \left[2\left(\frac{\ln x}{x}^{0} - \frac{\ln x}{x^2}^{0}\right) - 1 + \frac{2}{x}^{0} - \frac{3}{x^2}^{0}\right] \qquad = -\infty
\end{aligned}$$

ب) حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$:

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \left(2(x-1)\ln(x) - x^2 + 2x - 3\right) = +\infty$$

Prof Halim Math

لأن:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} 2(x-1)\ln(x) = 2(-1)(-\infty) = +\infty \\ \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} (-x^2+2x-3) = -3 \end{cases}$$

التفسير الهندسي: المنحنى (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً عمودياً معادلته $x = 0$.

ج) **تبيان أن** $f'(x) = -2x+4-\dfrac{2}{x}+2\ln(x)$: الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$:

$$f'(x) = 2\ln(x) + 2(x-1)\frac{1}{x} - 2x + 2 = 2\ln(x) + 2 - \frac{2}{x} - 2x + 2$$

إذن: $f'(x) = -2x+4-\dfrac{2}{x}+2\ln(x)$.

02 **اعتماداً على منحنى الدالة المشتقة** $(C_{f'})$:

ا) **إشارة** $f'(x)$:

من الرسم، نلاحظ أن المنحنى يقطع محور الفواصل عند α و β: $f'(x) < 0$ على المجال $]0,\alpha[\cup]\beta,+\infty[$ و $f'(x) > 0$ على المجال $]\alpha,\beta[$. نلخص النتائج في الجدول التالي:

x	0		1		β		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

ب) **جدول التغيرات:**

x	0		1		β		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f(1)$	↗	$f(\beta)$	↘	$-\infty$

ج) **إشارة** $f''(x)$:

x	0		α		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$+$	0	$-$	

د) بما أن المشتقة الثانية f'' تتعدم عند $x = \alpha$ ومغيرة اشارتها فإن النقطة $A(\alpha; f(\alpha))$ نقطة انعطاف لـ (C_f).

03 **تبيان أن** $f''(x) = \dfrac{-2(x^2-x-1)}{x^2}$:

الدالة f' قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$, دالتها المشتقة هي:

$$f''(x) = -2 + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x} = \frac{-2x^2+2x+2}{x^2} = \frac{-2(x^2-x-1)}{x^2}$$

استنتاج القيمة المضبوطة لـ α:

Prof Halim Math

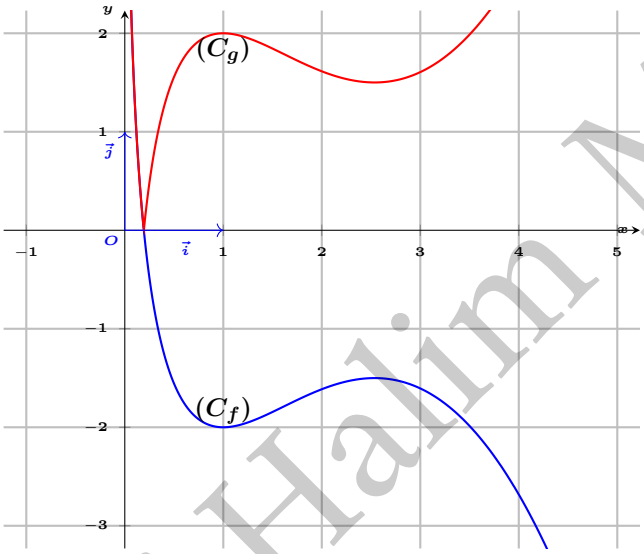
المشتقة الثانية تنعدم عند α ولدينا: $f''(x)=0$ معناه $\dfrac{-2(x^2-x-1)}{x^2}=0$ معناه $x^2-x-1=0$ ومنه المعادلة تقبل حلان ونأخذ الحل الموجب فقط أي: $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$، إذن $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

04 f دالة مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]0;1]$ فهي كذلك على المجال $[0.19;0.2]$ ولدينا:

$$\begin{cases} f(0.19)\approx 2.6903-2.6561\approx 0.0342 \\ f(0.2)\approx 2.5750-2.64\approx -0.065 \end{cases}$$

حيث: $f(0.19)\times f(0.2)<0$ ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة، فالمعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $0.19<\alpha<0.2$ وبالتالي المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة x_0.

05 **الرسم:**



06 **المناقشة البيانية $g(x)=m$:**

بما أن $g(x)=|f(x)|$، فإن الحلول هي فواصل نقط تقاطع (C_g) مع المستقيم ذو المعادلة $y=m$:

- إذا كان $m=0$: المعادلة تقبل حل وحيد،
- إذا كان $0<m<g(\beta)$: المعادلة تقبل حلان،
- $g(\beta)<m<2$ للمعادلة 4 حلول،
- $m=2$ للمعادلة حلان،
- $m>2$ للمعادلة حل وحيد.

07 ا) باستعمال التكامل بالتجزئة، نجد الدالة الأصلية لـ $x\longmapsto 2(x-1)\ln(x)$ التي تنعدم عند 1 هي: $H(x)=\int_1^x 2(t-1)\ln(t)dt$ حيث نضع:

$$\begin{vmatrix} u(x)=\ln(x) & u'(x)=\dfrac{1}{x} \\ v'(x)=2x-2 & v(x)=x^2-2x \end{vmatrix}$$

ومنه

$$\begin{aligned}\int_1^x 2(t-1)\ln(t)dt &= \left[(t^2-2t)\ln(t)\right]_1^x-\int_1^x (t-2)dx \\ &= (x^2-2x)\ln(x)-\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Prof Haim Math

ب) حساب المساحة:

$$S = \int_1^e |f(x)|dx \times 4\text{cm}^2 = -\int_1^e f(x)dx \times 4\text{cm}^2$$
$$= -\int_1^e \left(2(x-1)\ln(x) - x^2 + 2x - 3\right)dx \times 4\text{cm}^2$$
$$= -\left[\int_1^e \left(2(x-1)\ln(x)dx\right) + \int_1^e \left(-x^2+2x-3\right)dx\right] \times 4\text{cm}^2$$
$$= -\left[H(e) - H(1) - \left[-\frac{1}{2}x^3 + x^2 - 3x\right]_1^e\right] \times 4\text{cm}^2$$
$$= \left(\frac{1}{3}e^3 - \frac{3}{2}e^2 + 3e - \frac{5}{6}\right) \times 4\text{cm}^2$$
$$S \approx 4 \times 0.947 \approx 3.79\text{cm}^2$$

الأستاذ: حليم مقلاتي | الموضوع الثاني | المستوى: 3 علوم تجريبية

التمرين الأول:

I) $I = [1,2]$, $f(x) = \dfrac{1+x^2}{2x}$

$$f'(x) = \frac{2x \times 2x - 2(1+x^2)}{4x^2} = \frac{2x^2-2}{4x^2}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $2x^2-2$ لأن $4x^2 > 0$.

$2x^2 - 2 = 0$ معناه $x = 1$ أو $x = -1$.

من أجل $x \in [1,2]$، فإن $f'(x) \geqslant 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[1,2]$.

II) لدينا:

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{1+U_n^2}{2U_n} \end{cases}$$

01 (ا) نسمي $P(n)$ الخاصية $1 < U_n \leqslant 2$:

- من أجل $n = 0$، لدينا $1 < U_0 = 2 \leqslant 2$ و منه $P(0)$ محققة.
- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n كيفي ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $1 < U_{n+1} \leqslant 2$.
- لدينا حسب الفرض $1 < U_n \leqslant 2$.

وبما أن الدالة f متزايدة تماماً على $[1,2]$ فإن: $f(1) < f(U_n) \leqslant f(2)$

أي $1 < U_{n+1} \leqslant \dfrac{5}{4}$ ومنه $1 < U_{n+1} \leqslant 2$.

ومنه حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع فإن، $P(n)$ محققة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

(ب)

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1+U_n^2}{2U_n} - U_n = \frac{1+U_n^2-2U_n^2}{2U_n} = \frac{-U_n^2+1}{2U_n}$$

مما سبق لدينا: $1 \leqslant U_n \leqslant 2$ معناه $-3 \leqslant 1 - U_n^2 \leqslant 0$ و $2U_n > 0$ معناه $U_{n+1} - U_n < 0$.

إذن المتتالية (U_n) متناقصة تماماً.

Prof Halim Math

(ج) المتتالية (U_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بـ 1 فهي متقاربة.

لدينا $U_{n+1}=f(U_n)$ حيث f الدالة المرفقة للمتتالية (U_n) مستمرة ولدينا $\lim U_n=\ell$ معناه $f(\ell)=\ell$.

أي $\ell=\dfrac{1+\ell^2}{2\ell}$ معناه $1+\ell^2=2\ell^2$ معناه $\ell^2=1$.

معناه

$$\begin{cases}\ell=1 & \text{إما}\\ \ell=-1 & \text{أو}\end{cases}\qquad (\text{مرفوض})$$

إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=1$.

02 (ا) تبيان أن $U_{n+1}-1\leqslant\dfrac{1}{2}(U_n-1)$:

$$U_{n+1}-1=\frac{U_n^2-2U_n+1}{2U_n}=\frac{(U_n-1)(U_n-1)}{2U_n}$$

لدينا $1<U_n\leqslant 2$ معناه $0<U_n-1\leqslant 1$ ولدينا:

$$\frac{1}{4}\leqslant\frac{1}{2U_n}<\frac{1}{2}$$

معناه

$$\frac{U_n-1}{2U_n}<\frac{1}{2}$$

إذن

$$U_{n+1}-1\leqslant\frac{1}{2}(U_n-1)$$

(ب) بالاستنتاج:

$$\begin{aligned}&U_1-1\leqslant\frac{1}{2}(U_0-1) &&:n=0 \text{ من أجل}\\ &U_2-1\leqslant\frac{1}{2}(U_1-1) &&:n=1 \text{ من أجل}\\ &\vdots\\ &U_n-1\leqslant\frac{1}{2}(U_{n-1}-1) &&:n=n-1 \text{ من أجل}\end{aligned}$$

بالضرب طرفاً لطرف ثم الاختزال نجد:

$$U_n-1\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n(U_0-1)$$

ومنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $U_n-1\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

لدينا $U_n-1>0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ ومنه حسب مبرهنةالنهاية بالحصر فإن، $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n-1)=0$ معناه

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=1$$

03 تبيان أن (V_n) و (U_n) متجاورتان:

$$V_{n+1}-V_n=\frac{1}{U_{n+1}}-\frac{1}{U_n}=\frac{-(U_{n+1}-U_n)}{U_{n+1}\times U_n}$$

لدينا $U_{n+1}-U_n<0$ و $U_{n+1}\times U_n>0$ ومنه $V_{n+1}-V_n>0$.

Prof Haim Math

إذن المتتالية (V_n) متزايدة تماماً.
وبما أن (U_n) متناقصة تماماً و (V_n) متزايدة تماماً، و $\lim(U_n - V_n) = 1 - 1 = 0$.
فإن، المتتالية (U_n) و (V_n) متجاورتان.

04 لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$

(ا) لدينا مما سبق: $U_n - 1 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

معناه:

$$\begin{aligned} U_0 - 1 &\leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^0 \\ U_1 - 1 &\leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^1 \\ \vdots &\leqslant \vdots \\ U_n - 1 &\leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

بجمع المتباينات طرفاً لطرف من 0 إلى n:

$$S_n - (n+1) \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

معناه

$$S_n - (n+1) \leqslant \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 2 - \frac{1}{2^n}$$

إذن:

$$S_n \leqslant n + 1 + 2 - \frac{1}{2^n} = n + 3 - \frac{1}{2^n}$$

وبما أن $U_n > 1$ فإن $S_n > n + 1$.
إذن:

$$n + 1 < S_n \leqslant n + 3 - \frac{1}{2^n}$$

التمرين الثاني:

I) $P(z) = z^3 - 2z^2 + 16$

01 التحقق من أن $P(-2) = 0$:

$$P(-2) = (-2)^3 - 2(-2)^2 + 16 = -8 - 8 + 16 = 0$$

بما أن $P(-2) = 0$ فإن -2 جذر لـ $P(z)$.
بإجراء القسمة الإقليدية (أو مطابقة المعاملات):

Prof Halim Math

$$\begin{array}{rrl|l} x^3 & -2x^2 & +16 & x+2 \\ \hline -x^3 & -2x^2 & & x^2-4x+8 \\ \hline & -4x^2 & & \\ & 4x^2 & +8x & \\ \hline & & 8x+16 & \\ & & -8x-16 & \\ \hline & & 0 & \end{array}$$

$$z^3-2z^2+16=(z+2)(z^2-4z+8)$$

02 حل المعادلة $P(z)=0$:

إما $z+2=0$ معناه $z=-2$

أو $z^2-4z+8=0$

$$\Delta=(-4)^2-4(1)(8)=16-32=-16=(4i)^2$$

الجذران هما: $z_1=\dfrac{4-4i}{2}=2-2i$, $z_2=\dfrac{4+4i}{2}=2+2i$

مجموعة الحلول: $S=\{-2,2-2i,2+2i\}$.

(II

01 (ا) حساب $L(z_A)$:

$$L(z_A)=\frac{z_A-z_C}{z_A-z_B}=\frac{2+2i-(-2)}{2+2i-(2-2i)}=\frac{4+2i}{4i}=i$$

$|L(z_A)|=|i|=1$ و $\arg(L(z_A))=\arg(i)=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$

إذن: $L(z_A)=e^{i\frac{\pi}{2}}$.

$$z_w=L(6+2i)=\frac{6+2i-2+2i}{6+2i-2-2i}=\frac{4+4i}{4}=1+i$$

$|z_w|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

إذن: $\arg(z_w)=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$ $z_w=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

(ب) طبيعة المثلث ABC:

بما أن $|L(z_A)|=1$ معناه $\dfrac{AC}{AB}=1$ أي $AC=AB$.

وبما أن $\arg(L(z_A))=\dfrac{\pi}{2}$ معناه $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$.

إذن المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين.

02 تعيين مجموعة النقط M:

لدينا:

$$\arg(iz-2-2i)+\arg(\bar{z}-2+2i)=0+2k\pi$$

معناه

$$\arg\left(i\left(z-\frac{2+2i}{i}\right)\right)+\arg(\overline{z-(2-2i)})=0+2k\pi$$

معناه $\arg(i)+\arg(z-z_C)-\arg(z-z_B)=0+2k\pi$ (باستخدام خواص العمدة والمرافق)

$$\frac{\pi}{2}+\arg\left(\frac{z-z_C}{z-z_B}\right)=0+2k\pi$$

معناه

$$\arg\left(\frac{z-z_C}{z-z_B}\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

Prof Halim Math

ومنه $\left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

مجموعة النقط M هي نصف دائرة قطرها BC (ما عدا النقطتين B و C).

03 لدينا من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $v_n = |z_n|$ و $z_n = (z_\omega)^{2n-2}$

(ا) لدينا من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم:

$$v_n = |z_n| = |z_w|^{2n-2} = (\sqrt{2})^{2n-2}$$

معناه $v_1 = |z_0| = |z_w|^0 = 1$

ولدينا:

$$v_{n+1} = (\sqrt{2})^{2(n+1)-2} = (\sqrt{2})^{2n-2+2} = (\sqrt{2})^{2n-2} \times (\sqrt{2})^2 = 2v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 2$.

(ب) حساب المجموع S حيث: $S = |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_{2026}|$

لدينا S يكافئ $S = v_1 + v_2 + \cdots + v_{2026}$ ومنه S عبارة عن مجموع لمتتالية هندسية أساسها $q = 2$ وحدها الأول $v_1 = 1$ ومنه:

$$S = v_1 \times \frac{q^{2026} - 1}{q - 1} = 1 \times \frac{2^{2026} - 1}{2 - 1} = 2^{2026} - 1$$

التمرين الثالث:

$$U_1 \begin{cases} 4R : 3, 3, 2, 0 \\ 3V : 3, 3, 0 \end{cases} \quad , \quad U_2 \begin{cases} 3R : 3, 3, 2 \\ 2V : 0, 3 \end{cases}$$

01 **حساب الاحتمالات:**

نرمز لحدث السحب من U_1 بـ S_1 حيث $P(S_1) = \frac{1}{4}$، ولحدث السحب من U_2 بـ S_2 حيث $P(S_2) = \frac{3}{4}$.

- الحدث A: "الكريتان من نفس اللون"

$$P(A) = P(S_1) \times P_{S_1}(A) + P(S_2) \times P_{S_2}(A)$$

في U_1 (بدون إرجاع):

$$P_{S_1}(A) = \frac{A_4^2 + A_3^2}{A_7^2} = \frac{12 + 6}{42} = \frac{18}{42} = \frac{3}{7}$$

في U_2 (مع الإرجاع):

$$P_{S_2}(A) = \frac{3^2 + 2^2}{5^2} = \frac{9 + 4}{25} = \frac{13}{25}$$

ومنه

$$P(A) = \frac{1}{4} \times \frac{A_4^2 + A_3^2}{A_7^2} + \frac{3}{4} \times \frac{3^2 + 2^2}{5^2} = \frac{87}{175}$$

- الحدث B: "الكريتان تحملان نفس الرقم" الأرقام المتوفرة هي (0، 2، 3).

في U_1:

$$P_{S_1}(B) = \frac{A_4^2 + A_2^2}{A_7^2} = \frac{12 + 2}{42} = \frac{14}{42} = \frac{1}{3}$$

في U_2:

$$P_{S_2}(B) = \frac{3^2 + 1^2 + 1^2}{5^2} = \frac{9 + 1 + 1}{25} = \frac{11}{25}$$

$$P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{A_4^2 + A_2^2}{A_7^2} + \frac{3}{4} \times \frac{3^2 + 1^2 + 1^2}{5^2} = \frac{31}{75}$$

Prof Halim Math

- الحدث C: "ظهور اللون الأحمر مرة على الأقل"

نستعمل الحدث العكسي $\overline{C}$: "عدم ظهور أي كرية حمراء" (أي كلاهما خضراء).

في U_1:

$$P_{S_1}(\overline{C}) = \frac{A_3^2}{A_7^2} = \frac{6}{42} = \frac{1}{7}$$

في U_2:

$$P_{S_2}(\overline{C}) = \frac{2^2}{5^2} = \frac{4}{25}$$

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \left(\frac{1}{4} \times \frac{A_3^2}{A_7^2} + \frac{3}{4} \times \frac{2^2}{5^2}\right) = \frac{591}{700}$$

02 **استقلالية الحادثين:**

نحسب $P(A \cap B)$ (نفس اللون ونفس الرقم):

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} \times \frac{A_2^2 + A_2^2}{A_7^2} + \frac{3}{4} \times \frac{2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2}{5^2} = \dots$$

بما أن $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ إذن الحادثان A و B غير مستقلتين.

03 **الاحتمال الشرطي:** نرمز لـ R الحدث: " الكريتان مسحوبتان من U_1" نرمز لحدث لونين مختلفين بـ $\overline{A}$.

$$P_{\overline{A}}(R) = \frac{P(R \cap \overline{A})}{P(\overline{A})}$$

$$= \frac{\frac{1}{4} \times (1 - \frac{3}{7})}{1 - \frac{87}{175}} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{4}{7}}{\frac{88}{175}} = \frac{1/7}{88/175} = \frac{1}{7} \times \frac{175}{88} = \frac{25}{88}$$

04 **المتغير العشوائي X:**

قيم X هي $\{0, 2, 3\}$.

- $$P(X = 3) = \frac{C_7^1 \times C_5^2 + C_7^2 \times C_5^1}{C_{12}^3} = \frac{21}{22}$$
- $$P(X = 2) = \frac{C_{12}^1 \times C_3^2 + C_{12}^2 \times C_3^1}{C_{12}^3} = \frac{9}{220}$$
- $$P(X = 0) = \frac{C_3^3}{C_{12}^3} = \frac{1}{220}$$

جدول قانون الاحتمال:

x_i	0	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{220}$	$\frac{9}{220}$	$\frac{210}{220}$

الأمل الرياضياتي:

$$E(X) = \sum P_i x_i = 0 \times \frac{1}{220} + 2 \times \frac{9}{220} + 3 \times \frac{210}{220} = \frac{648}{220}$$

Prof Halim Math

التمرين الرابع:

I) الدالة h معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = e^x - x$.

01 دراسة اتجاه تغير الدالة h المشتقة هي: $h'(x) = e^x - 1$.
لندرس إشارة $h'(x)$: $h'(x) = 0$ معناه $e^x = 1$ معناه $x = 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	

ومنه الدالة h متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$.
بما أن القيمة الحدية الصغرى للدالة h هي 1 عند $x = 0$، فإن: من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $h(x) \geqslant 1$.
وعليه: $h(x) > 0$ أي $e^x - x > 0$ معناه $e^x > x$.

02 (ا) التحقق من أن $-0.41 < \alpha < -0.40$:
لدينا: $\begin{cases} g(-0.40) \approx 0.05 \\ g(-0.41) \approx -0.01 \end{cases}$ حيث: $g(-0.41) \times g(-0.4) < 0$ ومنه: $-0.41 < \alpha < -0.40$
(ب) جدول إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
إشارة $g(x)$		$-$	0	$+$	

II) $f(x) = \dfrac{xe^x - 1}{e^x - x}$.

01 **النهايات:** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب افقي معادلته $y = 0$ عند $-\infty$

02 لدينا: $f(x) - x = \dfrac{x^2 - 1}{e^x - x}$. بما أن

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 1}{e^x - x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)} = 0$$

فإن $(\Delta) : y = x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

03 (ا) $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(e^x - x)^2}$. إشارة f' من إشارة g.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

Prof Halim Math

(ب) الوضع النسبي:

$f(x)-y=\dfrac{x^2-1}{e^x-x}$ ومنه اشارة الفرق من إشارة x^2-1 لأن: $e^x-x>0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(-1;1)$	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $B(1;1)$	(C_f) فوق (Δ)	

(ا)

(ب) **المشتقة وتغيرات f:** لدينا من أل كل عدد حقيقي x،

$$f'(x)=\frac{(e^x+xe^x)(e^x-x)-(e^x-1)(xe^x-1)}{(e^x-x)^2}$$

$$=\frac{g(x)}{(e^x-x)^2}$$

ومنه اشارة المشتقة من اشارة $g(x)$ لأن; $(e^x-x)^2>0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty;\alpha[$

جدول التغيرات:

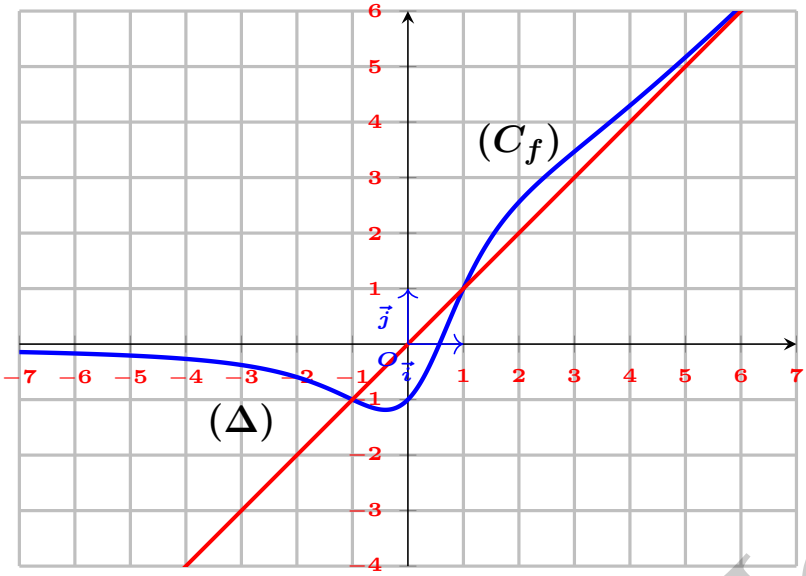
x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

04 الدالة f مستمرة ورتيبة تماماً على المجال $[0.56,0.57]$.

ولدينا: $f(0.56)\approx -0.017$ و $f(0.57)\approx 0.012$. بما أن $f(0.56)\times f(0.57)<0$ فإنه حسب نظرية القيم المتوسطة، المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً β في المجال $]0.56,0.57[$.

05 الإنشاء:

Prof Halim Math



06 (ا) نحسب الفرق: $f(x)-Q(x)=\dfrac{xe^x-1-(xe^x-e^x)}{e^x-x}=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$. بما أن $e^x-x>0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$، فإن إشارة الفرق من إشارة e^x-1.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	(C_f) تحت (C_Q)	(C_f) يقطع (C_Q) في النقطة $A(0;-1)$	(C_f) فوق (C_Q)

(ب) حساب مساحة الحيز A المساحة محصورة بين المنحنيين والمستقيمين $x=-1$ و $x=1$:

$$A=\int_{-1}^{1}|f(x)-Q(x)|dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(Q(x)-f(x))\,dx-\int_{0}^{1}(f(x)-Q(x))\,dx$$
$$=\int_{-1}^{0}\frac{1-e^x}{e^x-x}dx+\int_{0}^{1}\frac{e^x-1}{e^x-x}dx$$
$$A=[-\ln(e^x-x)]_{-1}^{0}+[\ln(e^x-x)]_{0}^{1}$$
$$A=(-\ln(1)+\ln(e^{-1}+1))+(\ln(e-1)-\ln(1))$$
$$A=\ln\left(\frac{1+e}{e}\right)+\ln(e-1)=\ln\left(\frac{e^2-1}{e}\right)$$
$$A=\ln\left(e-e^{-1}\right)u.a$$

Prof Hlim Math