الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المدرسة العليا للأساتذة بورقلة
مصلحة النشاطات الثقافية والرياضية
دورة أفريل 2025
الشعبة: رياضيات
المادة: رياضيات
المدّة: 4 ساعات و 30 د

امتحان البكالوريا التجريبي

على المترشّح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

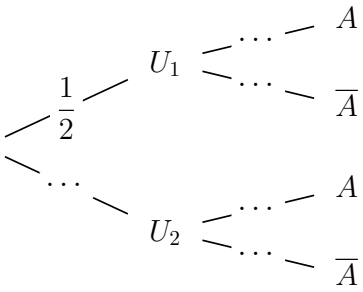
الموضوع الأوّل

التمرين الأوّل (4 ن)

نعتبر صندوقين غير شفّافين U_1 و U_2 بهما كريّات متماثلة لا نفرّق بينها عند اللّمس.

- U_1 يحتوي على 5 كريّات حمراء و 3 كريّات خضراء .
- U_2 يحتوي على 3 كريّات حمراء و 4 كريّات خضراء .

نرمي عشوائيا قطعة نقود غير مزيّفة، إذا تحصّلنا على وجه نسحب كريّتين عشوائيا في آن واحد من U_1، وإذا تحصّلنا على ظهر نسحب عشوائيا كريّتين على التوالي دون إرجاع من U_2، ونعتبر الأحداث الآتية.



- الحدث A: " الحصول على كريّتين من نفس اللّون " .
- الحدث U_i: " سحب الكريّتين من الصندوق U_i " مع $i \in \{1;2\}$

1. أ. بيّن أنّ $P_{U_1}(A) = \frac{13}{28}$ و $P_{U_2}(A) = \frac{3}{7}$

ب. أُنقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثمّ أكملها.

2. أُحسب احتمال أن تكون الكريّتين المسحوبتين من الصندوق U_2 علما أنّهما مختلفتين في اللّون.
3. نعتبر X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكلّ إمكانية عدد الكريات الخضراء المسحوبة.

أ. بيّن أنّ $P(X=0) = \frac{1}{4}$ و $P(X=1) = \frac{31}{56}$ ثمّ استنتج قانون احتمال المتغيّر العشوائي X

ب. أُحسب احتمال الحدث $(X^{1962} + X^{2025} + 2 \equiv 0\,[X+1])$

التمرين الثاني (4 ن)

المتتالية العددية $(U_n)_{n\geq 1}$ معرّفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $U_n = \frac{2^n}{n!}$

1. أ. بيّن أنّه: من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ ، $U_n > 0$

ب. بيّن أنّ $(U_n)_{n\geq 1}$ متناقصة على $\mathbb{N}^*$ ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

2. المتتالية العددية $(V_n)_{n\geq 1}$ معرّفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $V_n = \frac{U_{n+1}}{U_n}$

أ. بيّن أنّه من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ حيث $n \geq 2$ ، $V_n \leq \frac{2}{3}$

ب. أثبت أنّه : من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ حيث $n \geq 2$ ، $U_n \leq \frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ثمّ استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

3. من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ نضع : $S_n = \log(2V_1) + \log(3V_2) + \cdots + \log(nV_{n-1})$

• أُحسب S_n بدلالة n ثمّ استنتج أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = \log 2$

التمرين الثالث (5 ن)

نعتبر في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة (E) المعرّفة كما يلي $(E) : 1962x - 977y = 8$

1. أ. بيّن أنّ العدد 977 أوّلي ثمّ استنتج أنّ المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

ب. عيّن الحلّ الخاص $(x_0; y_0)$ للمعادلة (E) الذي يحقّق $x_0 + 5y_0 = 11$

ج. استنتج مجموعة حلول المعادلة (E)

2. نعتبر L عددا طبيعيا يكتب $\overline{\alpha\gamma\gamma\beta\beta\alpha}$ في نظام التعداد الذي أساسه 4 حيث α ، β و γ تشكّل بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية حسابية والثنائية $(\alpha;\beta)$ حلّ للمعادلة (E)

• عيّن كُلّا من α ، β و γ ثمّ أُكتب L في النظام العشري.

3. حلّل العدد 2025 إلى جداء عوامل أوليّة ثمّ استنتج قيم العدد الطبيعي n التي تحقّق $2025 \equiv 0\,[n^3]$

4. نضع : $PGCD(a;b) = d$ و $PPCM(a;b) = m$ حيث $(a;b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$

• عيّن كلّ الثنائيات $(a;b)$ حيث $a > b$ و التي تحقّق

$$\begin{cases} m = 6d \\ a^3 + b^4 = 2025 \end{cases}$$

التمرين الرّابع (7 ن)

I) الدّالة العددية g معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = x\ln x - 1$

1. شكّل جدول تغيّرات الدّالة g على $]0;+\infty[$

2. أ. بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $1,7 < \alpha < 1,8$

ب. استنتج حسب قيم x من $]0;+\infty[$ إشارة $g(x)$

II) الدّالة العددية f معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = (x-1)(\ln x - 1)$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث $||\vec{j}|| = 1cm$

1. أ. أُحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وفسّر النتيجة هندسيا ثمّ أُحسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$

ب. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$

ج. بيّن أنّ f متناقصة تماما على $]0;\alpha]$ ومتزايدة تماما على $[\alpha;+\infty[$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2. أ. أُكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة التي فاصلتها 1

ب. أُدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T)

3. أ. أنشئ كُلّا من (T) و (C_f). (تُعطى: $f(\alpha) \approx -0,33$).

ب. باستخدام (C_f) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = -x + m$

4. نعتبر λ عددا حقيقيا حيث $0 < \lambda < 1$

أ. أُكتب بدلالة λ العدد $\mathcal{A}(\lambda)$ المعرّف بـ : $\mathcal{A}(\lambda) = \int_{\lambda}^{1} [f(x) + x - 1]\, dx$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

ب. بيّن أنّ $\lim\limits_{\lambda \overset{>}{\to} 0} \mathcal{A}(\lambda) = \frac{3}{4}\ cm^2$

5. المتتالية العددية (ω_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\omega_n = 1 - \frac{f(e^{-n})}{n+1}$

• أُحسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = \omega_0 + \omega_1 + \cdots + \omega_n$ ثمّ استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

انتهى الموضوع الأوّل

الموضوع الثاني

التمرين الأوّل (4 ن)

كيس غير شفّاف به 5 كريّات متماثلة لا نفرّق بينها عند اللّمس، منها كريّتين خضراوين تحملان العددين: 0 و 0 ، كريّتين بيضاوين تحملان العددين المركّبين: $-i$ و i ، كريّة حمراء تحمل العدد المركّب: $-i$
نسحب عشوائيا من الكيس ثلاث كريّات في آن واحد.

I) 1. أُحسب احتمال كلّا من الحدثين الآتيين.
أ. A: " الحصول على ثلاث كريّات مجموعها عدد حقيقي ".
ب. B: " الحصول على ثلاث كريّات تشكّل ألوان العلم الوطني ".
2. بيّن أنّ $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$ ، ثمّ استنتج $P\left(\overline{A \cup B}\right)$

II) نضيف إلى الكيس n كريّة تحمل العدد 0 حيث $n \in \mathbb{N}^*$ ، ونسحب عشوائيا من الكيس كريّتين على التوالي دون إرجاع، ونعتبر X المتغيّر العشوائي الذي يُرفق كل إمكانية بطويلة مجموع العددين المحصّل عليهما.
1. أ. بيّن أنّ $P(X=0) = \frac{n^2+3n+6}{n^2+9n+20}$
ب. عرّف قانون احتمال المتغيّر العشوائي X
2. عيّن قيمة n التي تحقّق $P(A_X^2 = 2) = \frac{1}{15}$

التمرين الثاني (4 ن)

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ نضع: $a_n = 3 \times 2^n - 1$ و $b_n = 3 \times 2^n + 1$
1. أ. بيّن أنّ $PGCD(a_n; b_n) = PGCD(a_n; 2)$
ب. استنتج أنّ $PGCD(a_n; b_n) = 1$
2. من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ نضع: $S_n = n + a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$
أ. بيّن أنّه من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ ، $S_n = 12(4^n - 1)$
ب. استنتج أنّ $S_n \equiv 0\,[9]$
3. أ. عيّن قيم n من $\mathbb{N}^*$ التي يكون من أجلها S_n مضاعفا للعدد 5
ب. استنتج أنّ مجموعة قيم رقم آحاد العدد S_n هي $\{0; 6\}$
4. عيّن قيم n من $\mathbb{N}^*$ التي يكون من أجلها $S_{2025} + S_{1962} + n \equiv 0\,[5]$

التمرين الثالث (5 ن)

من أجل كلّ z من $\mathbb{C}$ نضع : $P(z) = z^4 + z^3 - z^2 + z - 2$
I) 1. بيّن أنّه من أجل كلّ z من $\mathbb{C}$ ، $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$
2. حلّ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$ علما أنّها تقبل حلّا تخيّليا صرفا.

II) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها z_A ، z_B و z_C على الترتيب حيث : $z_A=i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=|z_A|$

1. بيّن أنّ النقط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.
2. أ. أُكتب العدد المركّب $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}$ على الشّكل الجبري.
   ب. استنتج طبيعة المثلّث ABC
3. نعتبر النقطة M من المستوي ذات اللّاحقة z حيث $z=\sin\alpha+i(\sin\alpha-1)$ مع $\alpha\in\mathbb{R}$.
   • حدّد طبيعة مجموعة النقط M ذات اللّاحقة z لمّا α يمسح المجال $[0;\pi]$

التمرين الرّابع (7 ن)

نعتبر k عددا من $\mathbb{N}^*$ ، الدّالة العددية f_k معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f_k(x)=x-ke^{-x}$
و (C_k) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1. أ. أُحسب كُلّا من $\lim\limits_{x\to+\infty}f_k(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f_k(x)$
   ب. بيّن أنّ الدّالة f_k متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.
2. أ. أُحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f_k(x)-x]$ ثمّ فسّر النتيجة هندسياً.
   ب. أُدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_k) و المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$
3. أ. أنشئ كُلّا من (Δ) و (C_2)
   ب. باستخدام (C_2) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f_2(x)=x+\ln m$
4. أ. أُدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_k) و (C_{k+1})
   ب. بيّن أنّ المعادلة $f_k(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا α_k حيث $\alpha_k>0$
   ج. استنتج أنّ المتتالية (α_k) متزايدة تماما
5. أ. بيّن أنّه من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$: $x<e^x$
   ب. استنتج أنّه: من أجل كلّ k من $\mathbb{N}^*$ ، $\alpha_k>\ln\sqrt{k}$
6. المتتالية العددية $(\mu_k)_{k\geq1}$ معرّفة على $\mathbb{N}^*$ بـ $\mu_k=\dfrac{1}{\alpha_{k+1}-\alpha_k}\displaystyle\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}}f_k(t)dt$
   أ. بيّن أنّه: من أجل كلّ k من $\mathbb{N}^*$ ، $0\leq\mu_k\leq f_k(\alpha_{k+1})$
   ب. تحقّق أنّه: من أجل كلّ k من $\mathbb{N}^*$ ، $f_k(\alpha_{k+1})=e^{-\alpha_{k+1}}$ ثمّ استنتج $\lim\limits_{k\to+\infty}\mu_k$

انتهى الموضوع الثاني

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المدرسة العليا للأساتذة بورقلة
مصلحة النشاطات الثقافية والرياضية

امتحان البكالوريا التجريبي

دورة أفريل 2025
الشعبة: رياضيات
المادة: رياضيات
المدّة: 4 ساعات ونصف

الإجابة النموذجية + سلّم التنقيط

شكر وعرفان

باقة من الشّكر والعرفان للطلبة الآتية أسماؤهم على مجهوداتهم المبذولة خلال عملية التصحيح وكذلك على ملاحظاتهم القيّمة التي ساهمت في إنجاز هذا العمل لفائدة التلاميذ المُقبلين على امتحان شهادة البكالوريا.

- رضوان أحمودة
- عمرة طويل
- آمنة العايب
- جمانة بوعرقية
- سهام دبقة
- كوثر بدرة
- لؤي دغوم
- مسعودة باوية
- معتز لصفر

رئيس لجنة التصحيح

إجابة نموذجية مقترحة للموضوع الأوّل

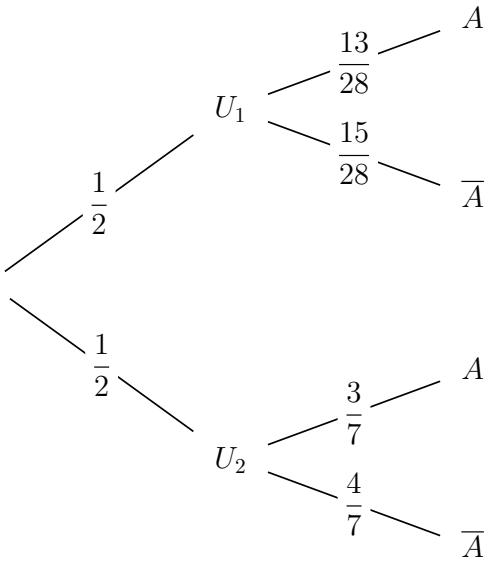
التمرين الأوّل (6 نق)

1. أ. تبيين أنّ $P_{U_1}(A)=\frac{13}{28}$ **و** $P_{U_2}(A)=\frac{3}{7}$

$$P_{U_1}(A)=\frac{C_5^2+C_3^2}{C_8^2}=\frac{13}{28}$$

$$P_{U_2}(A)=\frac{A_3^2+A_4^2}{A_7^2}=\frac{18}{42}=\frac{3}{7}$$

ب. نقل شجرة الاحتمالات ثمّ إكمالها.



2. حساب احتمال أن تكون الكريّتين المسحوبتين من الصندوق U_2 **علما أنّهما مختلفتين في اللّون.**

$$P_{\bar{A}}(U_2)=\frac{P\left(U_2\cap\bar{A}\right)}{P\left(\bar{A}\right)}=\frac{P\left(U_2\cap\bar{A}\right)}{P\left(U_1\cap\bar{A}\right)+P\left(U_2\cap\bar{A}\right)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{4}{7}}{\frac{1}{2}\times\frac{15}{28}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{7}}=\frac{16}{31}$$

3. أ. تبيين أنّ $P(X=0)=\frac{1}{4}$ و $P(X=1)=\frac{31}{56}$ ثمّ استنتاج قانون احتمال المتغيّر العشوائي X

$$P(X=1)=P\left(\bar{A}\right)=\frac{31}{56}$$

$$\begin{aligned}P(X=0)&=\frac{1}{2}\times\frac{C_5^2}{C_8^2}+\frac{1}{2}\times\frac{A_3^2}{A_7^2}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{10}{28}+\frac{1}{2}\times\frac{6}{42}\\&=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X هي $\{0;1;2\}$ ، عندئذ لدينا

$$\begin{aligned}P(X=2)&=1-[P(X=0)+P(X=1)]\\&=1-\left(\frac{1}{4}+\frac{31}{56}\right)\\&=\frac{11}{56}\end{aligned}$$

وبالتالي

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{31}{56}$	$\frac{11}{56}$

ب. حساب احتمال الحدث $(X^{1962}+X^{2025}+2\equiv 0\,[X+1])$

لدينا

$$X+1\equiv 0\,[X+1]$$

ومنه

$$X\equiv -1\,[X+1]$$

وعليه

$$X^{2025}\equiv(-1)^{2025}\,[X+1]\equiv -1\,[X+1]$$

$$X^{1962}\equiv(-1)^{1962}\,[X+1]\equiv 1\,[X+1]$$

وبالتالي

$$\begin{aligned}X^{1962}+X^{2025}+2&\equiv 1-1+2\,[X+1]\\&\equiv 2\,[X+1]\end{aligned}$$

ومنه

$$2\equiv 0\,[X+1]$$

وعليه

$$X+1=2 \quad \text{أو} \quad X+1=1$$

أي

$$X=1 \quad \text{أو} \quad X=0$$

عندئذ نستنتج أنّ

$$\begin{aligned} P\left(X^{1962}+X^{2025}+2\equiv 0\,[X+1]\,\right) &= P(X=0)+P(X=1)\\ &= \frac{1}{4}+\frac{31}{56}\\ &= \frac{45}{56} \end{aligned}$$

■

التمرين الثاني (4 نق)

1. أ. تبيين أنّه: من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ ، $U_n>0$

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$\begin{cases} 2^n>0\\ n!>0 \end{cases}$$

ومنه $U_n>0$

ب. تبيين أنّ $(U_n)_{n\geq 1}$ متناقصة على $\mathbb{N}^*$ ثمّ استنتاج أنّها متقاربة.

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$\begin{aligned} \frac{U_{n+1}}{U_n} &= \frac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{2^n}{n!}}\\ &= \frac{2^n\times 2}{(n+1)\,n!}\times\frac{n!}{2^n}\\ &= \frac{2}{n+1} \end{aligned}$$

ولدينا

$$n\geq 1$$

ومنه

$$n+1\geq 2$$

وعليه

$$\frac{2}{n+1}\leq\frac{2}{2}$$

أي

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}\leq 1$$

وبالتالي $(U_n)_{n\geq 1}$ متناقصة على $\mathbb{N}^*$.

استنتاج التقارب

لدينا

- $(U_n)_{n\geq 1}$ متناقصة على $\mathbb{N}^*$
- من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ ، $U_n>0$ ، وعليه $(U_n)_{n\geq 1}$ محدودة من الأسفل بالعدد 0

وبالتالي $(U_n)_{n\geq 1}$ متقاربة.

2. أ. تبيين أنّه من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ حيث $n \geq 2$ ، $V_n \leq \frac{2}{3}$

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ حيث $n \geq 2$ لدينا

$$n \geq 2$$

ومنه

$$n+1 \geq 3$$

وعليه

$$\frac{2}{n+1} \leq \frac{2}{3}$$

أي

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{2}{3}$$

وبالتالي

$$V_n \leq \frac{2}{3}$$

ب. إثبات أنّه : من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ حيث $n \geq 2$ ، $U_n \leq \frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ثمّ استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

- نرمز للخاصية " $U_n \leq \frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ " بالرمز $P(n)$.
- نتحقّق من صحّة $P(2)$

لدينا

$$U_2 = \frac{2^2}{2!} = 2$$

$$\frac{9}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{9}{2} \times \frac{4}{3} = 2$$

ومنه

$$U_2 \leqslant \frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

وعليه $P(2)$ صحيحة.

- من أجل عدد طبيعي كيفي k حيث $k \geq 2$ نفترض صحّة $P(k)$ ونبرهن صحّة $P(k+1)$.

لدينا

$$\begin{aligned} U_{k+1} &= \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} \\ &= \frac{2}{k+1} \times \frac{2^k}{k!} \\ &= V_k U_k \end{aligned}$$

وبما أنّ

$$\begin{cases} 0 < U_k \leqslant \frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^k \\ 0 < V_k \leqslant \frac{2}{3} \end{cases}$$

فإنّ

$$\begin{aligned} U_{k+1} &\leqslant \frac{2}{3} \times \frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{k} \\ &\leqslant \frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} \end{aligned}$$

وبالتالي $P(k+1)$ صحيحة.

• وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع نستنتج أنّ $P(n)$ صحيحة من أجل كلّ $\mathbb{N}^* - \{1\}$.

وبما أنّ $-1 < \frac{2}{3} < 1$ فإنّ $\lim\left(\frac{2}{3}\right)^{n} = 0$ ، ومنه $\lim U_n = 0$

3. • **حساب S_n بدلالة n ثمّ استنتاج أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = \log 2$**

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$\begin{aligned} S_n &= \log(2V_1) + \log(3V_2) + \cdots + \log(nV_{n-1}) \\ &= \log(2V_1 \times 3V_2 \times \cdots \times nV_{n-1}) \\ S_n &= \log(V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_{n-1} \times 2 \times 3 \times \cdots \times n) \\ &= \log\left(\frac{U_2}{U_1} \times \frac{U_3}{U_2} \times \cdots \times \frac{U_n}{U_{n-1}} \times n!\right) \\ &= \log\left(\frac{U_n}{U_1} \times n!\right) \\ &= \log\left(\frac{2^n}{n!} \times \frac{1!}{2^1} \times n!\right) \\ &= \log(2^{n-1}) \\ &= (n-1)\log 2 \end{aligned}$$

وعندئذ لدينا

$$\begin{aligned} \lim \frac{S_n}{n} &= \lim\left(\frac{n-1}{n}\log 2\right) \\ &= \lim\left(\frac{n}{n}\log 2\right) \\ &= \log 2 \end{aligned}$$

■

التمرين الثالث (5 نق)

1. **أ. تبيين أنّ العدد 977 أوّلي ثمّ استنتاج أنّ المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$**

لدينا $\sqrt{977} \approx 31,25$ ، وبما أنّ

$2 \nmid 31$	$13 \nmid 31$
$3 \nmid 31$	$17 \nmid 31$
$5 \nmid 31$	$19 \nmid 31$
$7 \nmid 31$	$23 \nmid 31$
$11 \nmid 31$	$29 \nmid 31$

فإنّ 977 عدد أوّلي.

الاستنتاج. بما أنّ 977 عدد أوّلي و 1962 لا يقبل القسمة على 977 فإنّ $PGCD\,(1962;977)=1$ ومنه المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

ب. تعيين الحلّ الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E) الذي يحقّق $x_0+5y_0=11$

لدينا

$$x_0+5y_0=11$$

ومنه

$$x_0=11-5y_0$$

وبما أنّ $(x_0;y_0)$ حلّ للمعادلة (E) فإنّ

$$1962x_0-977y_0=8$$

أي

$$1962\,(11-5y_0)-977y_0=8$$

ومنه

$$y_0=2$$

وعليه

$$\begin{aligned}x_0&=11-5\times 2\\&=1\end{aligned}$$

ج. استنتاج مجموعة حلول المعادلة (E)

لدينا

$$\begin{cases}1962x-977y=8\\1962x_0-977y_0=8\end{cases}$$

ومنه

$$1962\,(x-x_0)-977\,(y-y_0)=0$$

وعليه

$$1962\,(x-1)=977\,(y-2)$$

وبما أنّ $PGCD\,(1962;977)=1$ فإنّ $1962\mid y-2$ وينتج عن ذلك أنّ

$$\begin{cases}y=1962k+2\\k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

ومنه

$$\begin{cases}x=977k+1\\k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة هي S حيث

$$S=\{(977k+1\ ;\ 1962k+2)\mid k\in\mathbb{Z}\}$$

2. تعيين كُلّا من α ، β و γ ثمّ كتابة L في النظام العشري.

الثنائية $(\alpha;\beta)$ حلّ للمعادلة (E) معناه

$$\begin{cases}\alpha=977k+1\\\beta=1962k+2\\k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

وبما أنّ

$$\begin{cases}0<\alpha<4\\0\leqslant\beta<4\end{cases}$$

فإنّ $k=0$ ، وبالتالي $\alpha=1$ و $\beta=2$، وبما أنّ $\alpha+\gamma=2\beta$ فإنّ

$$\begin{aligned}\gamma &= 2\beta-\alpha\\ &= 2\times 2-1\\ &= 3\end{aligned}$$

كتابة L على الشكل العشري

$$\begin{aligned}L &= \alpha\times 4^0+\beta\times 4^1+\beta\times 4^2+\gamma\times 4^3+\gamma\times 4^4+\alpha\times 4^5\\ &= 1\times 4^0+2\times 4^1+2\times 4^2+3\times 4^3+3\times 4^4+1\times 4^5\\ &= 2025\end{aligned}$$

3. تحليل العدد 2025 إلى جداء عوامل أوليّة ثمّ استنتاج قيم العدد الطبيعي n التي تحقّق $1962\equiv 0\,[n^3]$

لدينا

2025	3
675	3
225	3
75	3
25	5
5	5
1	

ومنه $2025=3^4\times 5^2$ ونستنتج أنّ قيم العدد الطبيعي n التي تحقّق $2025\equiv 0\,[n^3]$ هي : 1 و 3

4. تعيين كلّ الثنائيات $(a;b)$ حيث $a>b$ و التي تحقّق $m=6d$ و $a^3+b^4=2025$

لدينا

$$\begin{cases}m\times d=a\times b\\ a=d\times a'\\ b=d\times b'\\ PGCD\,(a'\,;b')=1\end{cases}$$

ومنه

$$\begin{cases}m=d\times a'\times b'\\ a=d\times a'\\ b=d\times b'\\ PGCD\,(a'\,;b')=1\end{cases}$$

وعليه

$$\begin{cases}d\times a'\times b'=6d\\ (d\times a')^3+(d\times b')^4=2025\\ PGCD\,(a'\,;b')=1\end{cases}$$

وبالتالي

$$\begin{cases}a'\times b'=6\\ d^3\left[(a')^3+d(b')^4\right]=2025\\ d\in\{1;3\}\\ PGCD\,(a'\,;b')=1\end{cases}$$

وينتج

$$\begin{cases}(a';b') \in \{(6;1);(3;2)\} \\ d^3\left[(a')^4 + d(b')^3\right] = 2025 \\ d \in \{1;3\}\end{cases}$$

- في حالة $d=1$ الجملة غير محقّقة لأنّ

$$\begin{cases}6^4 + 1^3 < 2025 \\ 3^4 + 2^3 < 2025\end{cases}$$

- في حالة $d=3$، لدينا

$$\begin{cases}(a';b') \in \{(6;1);(3;2)\} \\ (a')^4 + 3(b')^4 = 75\end{cases}$$

ومنه $a'=3$ و $b'=2$ ، وعليه $a=9$ و $b=6$

■

التمرين الرابع (7 نق)

I) 1. تشكيل جدول تغيّرات الدّالة g على $]0;+\infty[$

لدينا

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (x\ln x - 1) = +\infty$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0} g(x) = \lim_{x\overset{>}{\to}0} (x\ln x - 1) = -1$$

g قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا

$$g'(x) = 1\times\ln x + x\times\frac{1}{x} = \ln x + 1$$

المعادلة

$$g'(x) = 0$$

تكافئ

$$\ln x + 1 = 0$$

وتكافئ

$$x = e^{-1}$$

وعندئذ لدينا

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	-1 ↘	$-e^{-1}-1$	↗	$+\infty$

2. أ. تبيين أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $1,7<\alpha<1,8$

- $g(x)<0$ على $]0;e^{-1}]$
- g مستمرة على $[e^{-1};+\infty[$

• g متزايدة تماما على $[e^{-1};+\infty[$
• لدينا

$g(1,8) \approx 0,06$	$g(1,7) \approx -0,1$

ومنه $g(1,7) \times g(1,8) < 0$
عندئذ نستنتج أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $1,7 < \alpha < 1,8$.

ب. استنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من $]0;+\infty[$

• $g(x) < 0$ على $]0;e^{-1}]$
• g متزايدة تماما على $[e^{-1};+\infty[$
• $g(\alpha)=0$
وعليه

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

II 1. أ. حساب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ وتفسير النتيجة هندسيا ثمّ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} [(x-1)(\ln x - 1)] = +\infty$$

لأنّ
$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \ln x = -\infty$$
المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (حامل محور التراتيب) مقارب لـ (C_f)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} [(x-1)(\ln x - 1)] = +\infty$$

لأنّ
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (x-1) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x - 1) = +\infty \end{cases}$$

ب. تبيين أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$

f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times (\ln x - 1) + \frac{1}{x} \times (x-1) \\ &= \frac{x(\ln x - 1)}{x} + \frac{x-1}{x} \\ &= \frac{x \ln x - 1}{x} \\ &= \frac{g(x)}{x} \end{aligned}$$

ج. تبيين أنّ f متناقصة تماما على $]0;\alpha]$ ومتزايدة تماما على $[\alpha;+\infty[$ ثمّ تشكيل جدول تغيّراتها.

من أجل كلّ x من $]0;+\infty[$ لدينا
$x > 0$
ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $g(x)$ وعندئذ لدينا

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

- $f'(x) < 0$ على $]0;\alpha[$ و $f'(\alpha) = 0$ ومنه f متناقصة تماما على $]-\infty;\alpha]$
- $f'(x) > 0$ على $]\alpha;+\infty[$ و $f'(\alpha) = 0$ ومنه f متزايدة تماما على $[\alpha;+\infty]$

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$	‖	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

2. أ. كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة التي فاصلتها 1

f قابلة للاشتقاق عند 1 ومنه (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه $f'(1)$ حيث

$$(T) : y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

وبما أنّ $f(1) = 0$ و $f'(1) = -1$ فإنّ

$$(T) : y = -x + 1$$

ب. دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T)

من أجل كلّ x من $]0;+\infty[$ لدينا

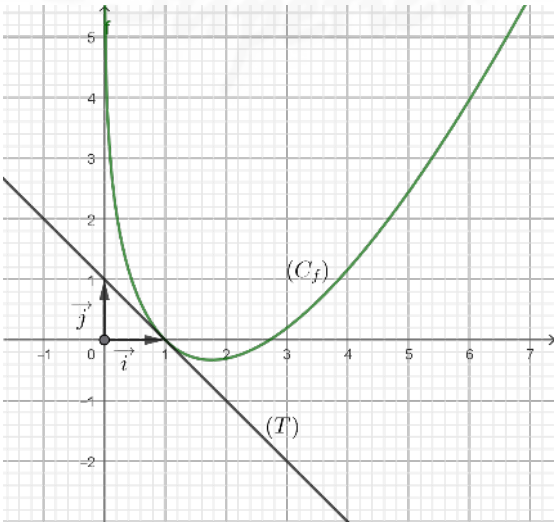
$$\begin{aligned} f(x) - (-x+1) &= (x-1)(\ln x - 1) - (-x+1) \\ &= (x-1)(\ln x - 1) + (x-1) \\ &= (x-1)(\ln x - 1 + 1) \\ &= (x-1)\ln x \end{aligned}$$

ومنه

x	0		1		$+\infty$
$x-1$	‖	$-$	0	$+$	
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)-(-x+1)$	‖	$+$	0	$+$	

- (C_f) يقع فوق (T) على $]0;1[\cup]1;+\infty[$
- (C_f) يقطع (T) في النقطة $A(1;0)$

3. أ. إنشاء كُلّا من (T) و (C_f).



ب. مناقشة عدد حلول المعادلة $f(x)=-x+m$ حسب قيم الوسيط الحقيقي m

حلول المعادلة بيانيا هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ_m) حيث
$(\Delta_m): y=-x+m$

وعندئذ لدينا

قيم m	عدد حلول المعادلة
$m\in\,]-\infty;1[$	لا توجد حلول
$m=1$	حلّ واحد
$m\in\,]1;+\infty[$	حلّان

4. أ. كتابة بدلالة λ العدد $\mathcal{A}(\lambda)$ المعرّف بـ: $\mathcal{A}(\lambda)=\int_{\lambda}^{1}[f(x)+x-1]\,dx$ ، ثمّ تفسير النتيجة هندسيا.

$$\mathcal{A}(\lambda)=\int_{\lambda}^{1}[f(x)+x-1]dx$$

$$=\int_{\lambda}^{1}[(x-1)\ln x]dx$$

$$\mathcal{A}(\lambda)=\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x\right]_{\lambda}^{1}-\int_{\lambda}^{1}\left(\frac{x}{2}-1\right)dx$$

$$=\left(\lambda-\frac{\lambda^2}{2}\right)\ln\lambda-\left[\left(\frac{x^2}{4}-x\right)\right]_{\lambda}^{1}$$

$$=\left(\lambda-\frac{\lambda^2}{2}\right)\ln\lambda+\frac{\lambda^2}{4}-\lambda+\frac{3}{4}$$

التفسير. من أجل كلّ x من $]0;+\infty[$ لدينا $f(x)-(-x+1)\geq 0$ ، ومنه $\mathcal{A}(\lambda)$ هي مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمماس (T) والمستقيمين ذوا المعادلتين $x=\lambda$ و $x=1$

ب. حساب $\lim\limits_{\lambda\overset{>}{\to}0}\mathcal{A}(\lambda)$

لدينا

$$\left(\lambda-\frac{\lambda^2}{2}\right)\ln\lambda+\frac{\lambda^2}{4}-\lambda+\frac{3}{4}=\lambda\ln\lambda-\frac{1}{2}\lambda^2\ln\lambda+\frac{\lambda^2}{4}-\lambda+\frac{3}{4}$$

وبما أنّ

$$\begin{cases}\lim\limits_{\lambda\overset{>}{\to}0}(\lambda\ln\lambda)=0\\ \lim\limits_{\lambda\overset{>}{\to}0}(\lambda^2\ln\lambda)=0\end{cases}$$

فإنّ

$$\lim_{\lambda\overset{>}{\to}0}\mathcal{A}(\lambda)=\frac{3}{4}$$

5. حساب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = \omega_0 + \omega_1 + \cdots + \omega_n$ ثمّ استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$\begin{aligned}\omega_n &= 1 - \frac{f(e^{-n})}{n+1}\\ &= 1 - \frac{(e^{-n}-1)(\ln e^{-n}-1)}{n+1}\\ &= 1 - \frac{(e^{-n}-1)(-n-1)}{n+1}\\ &= 1 + \frac{(e^{-n}-1)(n+1)}{n+1}\\ &= e^{-n}\end{aligned}$$

وعليه

$$\begin{aligned}S_n &= \omega_0 + \omega_1 + \cdots + \omega_n\\ &= 1 + e^{-1} + \cdots + e^{-n}\\ &= 1 \times \frac{1-(e^{-1})^{n-0+1}}{1-e^{-1}}\\ &= \frac{1-e^{-n-1}}{1-e^{-1}}\\ &= \frac{e-e^{-n}}{e-1}\end{aligned}$$

وبما أنّ

$$\begin{aligned}\lim e^{-n} &= \lim \frac{1}{e^n}\\ &= 0\end{aligned}$$

فإنّ

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{e}{e-1}$$

■

سلّم تنقيط الموضوع الأوّل

التمرين الأوّل (4 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
1.أ	0,25+ 0,25
1.ب	1,25
2	0,5
3.أ	1,25
3.ب	0,5

التمرين الثاني (4 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
1.أ	0,5
1.ب	0,25 + 0,5
2.أ	0,75
2.ب	0,25 + 0,75
3	0,25 + 0,75

التمرين الثالث (5 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
1.أ	0,5 + 0,5
1.ب	0,5
1.ج	1
2	1
3	0,5 + 0,5
4	0,5

التمرين الرابع (7 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
I) 1	0,5
I) 2.أ	0,5
I) 2.ب	0,5
II) 1.أ	0,75
II) 1.ب	0,5
II) 1.ج	0,25 + 0,5
II) 2.أ	0,5
II) 2.ب	0,5
II) 3.أ	0,5 + 0,25
II) 3.ب	0,25
II) 4.أ	0,25 + 0,5
II) 4.ب	0,25
II) 5	0,25 + 0,25

إجابة نموذجية مقترحة للموضوع الثاني

التمرين الأوّل (6 نق)

I) 1. حساب احتمال كلّا من الحدثين الآتيين.

أ. A: " الحصول على ثلاث كريّات مجموعها عدد حقيقي ".

$$P(A) = \frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد الإمكانيات}} = \frac{C_2^1 \times C_2^1 \times C_1^1}{C_5^3} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

ب. B: " الحصول على ثلاث كريّات تشكّل ألوان العلم الوطني ".

$$P(B) = \frac{\text{عدد عناصر } B}{\text{عدد الإمكانيات}} = \frac{C_2^1 \times C_2^1 \times C_1^1}{C_5^3} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

2. تبيين أنّ $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$ ، ثمّ استنتاج $P\left(\overline{A \cup B}\right)$

$$P(A \cap B) = \frac{C_2^1 \times C_1^1 \times C_1^1}{C_5^3} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

وعندئذ نستنتج

$$\begin{aligned} P\left(\overline{A \cup B}\right) &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] \\ &= 1 - \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5}\right) \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

II) 1. أ. تبيين أنّ $P(X=0)=\dfrac{n^2+3n+6}{n^2+9n+20}$

$$\begin{aligned}P(X=0)&=\frac{A_{n+2}^2+2A_1^1\times A_2^1}{A_{n+5}^2}\\&=\frac{(n+2)(n+1)+2\times1\times2}{(n+5)(n+4)}\\&=\frac{n^2+3n+6}{n^2+9n+20}\end{aligned}$$

ب. تعريف قانون احتمال المتغيّر العشوائي X

لدينا

$$\begin{cases}|0+0|=0\\|-i+i|=0\\|i+0|=1\\|-i+0|=1\\|-i-i|=2\end{cases}$$

وعليه مجموعة قيم المتغيّر العشوائي هي $\{0;1;2\}$ ولدينا

$$P(X=1)=\frac{2A_{n+2}^1\times A_2^1+2A_{n+2}^1\times A_1^1}{A_{n+5}^2}=\frac{2(n+2)\times2+2(n+2)\times1}{(n+5)(n+4)}=\frac{6n+12}{n^2+9n+20}$$

$$P(X=2)=\frac{A_2^2}{A_{n+5}^2}=\frac{2}{(n+5)(n+4)}=\frac{2}{n^2+9n+20}$$

وبالتالي

x_i	0	1	2	المجموع
$P(X=x_i)$	$\dfrac{n^2+3n+6}{n^2+9n+20}$	$\dfrac{6n+12}{n^2+9n+20}$	$\dfrac{2}{n^2+9n+20}$	1

2. تعيين قيمة n التي تحقّق $P(A_X^2=2)=\dfrac{1}{15}$

المعادلة

$$A_X^2=2$$

تكافئ

$$X(X-1)=2$$

وتكافئ

$$X^2-X-2=0$$

وتكافئ

$$X=2$$

وبالتالي

$$\begin{aligned}P(A_X^2=2)&=P(X=2)\\&=\frac{2}{n^2+9n+20}\end{aligned}$$

عندئذ لدينا

$$\frac{2}{n^2+9n+20}=\frac{1}{15}$$

وذلك يكافئ

$$n=1$$

■

التمرين الثاني (4 نق)

1. أ. تبيين أنّ $PGCD(a_n;b_n)=PGCD(a_n;2)$

نضع: $d_1=PGCD(a_n;b_n)$ و $d_2=PGCD(a_n;2)$

- لدينا

$$\begin{cases} d_1 \mid a_n \\ d_1 \mid b_n \end{cases}$$

ومنه

$$d_1 \mid b_n-a_n$$

أي

$$d_1 \mid 2$$

وبالتالي

$$d_1 \mid d_2$$

- لدينا

$$\begin{cases} d_2 \mid a_n \\ d_2 \mid 2 \end{cases}$$

ومنه

$$d_2 \mid a_n+2$$

أي

$$d_2 \mid b_n$$

ومنه

$$d_2 \mid d_1$$

وبما أنّ $d_1>0$ و $d_2>0$ فإنّ $d_1=d_2$

ب. استنتاج أنّ $PGCD(a_n;b_n)=1$

بما أنّ a_n عدد فردي فإنّه لا يقبل القسمة على 2 ومنه $PGCD(a_n;2)=1$ ، وعليه $PGCD(a_n;b_n)=1$

2. أ. تبيين أنّه من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ ، $S_n=12(4^n-1)$

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$a_nb_n=9\times 4^n-1$$

ومنه

$$\begin{aligned} S_n &= n+a_1b_1+\cdots+a_nb_n \\ &= n+9\times 4^1-1+\cdots+9\times 4^n-1 \\ &= n+9\left(4+4^2+\cdots+4^n\right)-1-1-\cdots-1 \\ &= n+9\times 4\times\frac{4^{n-0+1}-1}{4-1}-n\times 1 \\ &= 12\left(4^n-1\right) \end{aligned}$$

ب. استنتاج أنّ $S_n \equiv 0\,[9]$

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$4^n \equiv 1\,[3]$$

ومنه

$$4^n - 1 \equiv 0\,[3]$$

وذلك يكافئ

$$4^n - 1 = 3k \quad \text{حيث} \quad k \in \mathbb{Z}$$

ويكافئ

$$12\left(4^n - 1\right) = 9\,(4k) \quad \text{حيث} \quad k \in \mathbb{Z}$$

ويكافئ

$$S_n \equiv 0\,[9]$$

3. أ. تعيين قيم n من $\mathbb{N}^*$ التي يكون من أجلها S_n مضاعفا للعدد 5

لدينا

$$S_n \equiv 0\,[5]$$

وذلك يكافئ

$$12\left(4^n - 1\right) \equiv 0\,[5]$$

ويكافئ

$$4^n - 1 \equiv 0\,[5]$$

ويكافئ

$$4^n \equiv 1\,[5]$$

ومن جهة أخرى لدينا

$$4 \equiv -1\,[5]$$

وعليه من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$4^n \equiv (-1)^n\,[5]$$

وبالتالي

$$(-1)^n \equiv 1\,[5]$$

وذلك يكافئ أنّ $n = 2k$ حيث $k \in \mathbb{N}^*$.

ب. استنتاج أنّ مجموعة قيم رقم آحاد العدد S_n هي $\{0;6\}$

من أجل كلّ k من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$4^{2k} \equiv 1\,[5]$$

وذلك يكافئ

$$4^{2k+1} \equiv 4\,[5]$$

ويكافئ

$$4^{2k+1} - 1 \equiv 3\,[5]$$

ويكافئ

$$12\left(4^{2k+1} - 1\right) \equiv 1\,[5]$$

أي

$$S_{2k+1} \equiv 1\,[5]$$

وبما أنّ S_n عدد زوجي فإنّ مجموعة رقم آحاد العدد S_n هي $\{0;6\}$

4. تعيين قيم n من $\mathbb{N}^*$ التي يكون من أجلها $S_{2025}+S_{1962}+n\equiv 0\,[5]$

لدينا

$$\begin{cases} S_{1962}\equiv 0\,[5] \\ S_{2025}\equiv 1\,[5] \end{cases}$$

ومنه

$$S_{2025}+S_{1962}+n\equiv n+1\,[5]$$

وعليه

$$n+1\equiv 0\,[5]$$

وبالتالي

$$n\equiv 4\,[5]$$

وينتج أنّ

$$n=5k+4 \quad \text{حيث} \quad k\in\mathbb{N}$$

■

التمرين الثالث (7 نق)

I) 1. تبيين أنّه من أجل كلّ z من $\mathbb{C}$ ، $\overline{P(z)}=P(\overline{z})$

$$\begin{aligned} \overline{P(z)} &= \overline{z^4+z^3-z^2+z-2} \\ &= \overline{z^4}+\overline{z^3}-\overline{z^2}+\overline{z}-\overline{2} \\ &= \overline{z}^4+\overline{z}^3-\overline{z}^2+\overline{z}-2 \\ &= P(\overline{z}) \end{aligned}$$

2. حلّ المعادلة $P(z)=0$ في $\mathbb{C}$ علما أنّها تقبل حلّا تخيّليا صرفا.

من السؤال السابق، نستنتج أنّه إذا كان z حلّا للمعادلة $P(z)=0$ فإنّ $\overline{z}$ حلّ لها أيضاً، ولمّا كانت $P(z)=0$ تقبل حلّا تخيّليا صرفا $i\alpha$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}$ فإنّ $-i\alpha$ حلّ لها أيضاً، وعندئذ لدينا

$$\begin{aligned} P(z) &= (z-i\alpha)(z+i\alpha)(az^2+bz+c) \\ &= (z^2+\alpha^2)(az^2+bz+c) \\ &= az^4+bz^3+cz^2+a\alpha^2z^2+b\alpha^2z+c\alpha^2 \\ &= az^3+bz^3+(c+a\alpha^2)z^2+b\alpha^2z+c\alpha^2 \end{aligned}$$

وذلك يكافئ

$$\begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c+\alpha^2=-1 \\ \alpha^2=1 \\ c\alpha^2=-2 \end{cases}$$

ويكافئ

$$\begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=-2 \\ \alpha^2=1 \end{cases}$$

أي

$$P(z) = (z^2+1)(z^2+z-2)$$

عندئذ المعادلة تكافئ

$$z^2+1=0 \quad \text{أو} \quad z^2+z-2=0$$

حل المعادلة $z^2+1=0$

المعادلة تكافئ

$$z^2 = -1$$

وتكافئ

$$z^2 = i^2$$

وتكافئ

$$z=i \quad \text{أو} \quad z=-i$$

حل المعادلة $z^2+z-2=0$

لدينا

$$\begin{aligned}\Delta &= 1^2 - 4\times 1\times(-2)\\ &= 9\end{aligned}$$

ومنه المعادلة تقبل حلّين z_1 و z_2 حيث

$$z_1 = \frac{-1-3}{2\times 1} = -2 \qquad z_2 = \frac{-1+3}{2\times 1} = 1$$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة هي $\{-i; i; -2; 1\}$

II) 1. تبيين أنّ النقط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

لدينا

$$|z_A| = |z_B| = |z_C| = 1$$

ومنه النقط A ، B و C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1.

2. أ. كتابة العدد المركّب $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ على الشّكل الجبري.

$$\begin{aligned}\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} &= \frac{-i-1}{i-1}\\ &= \frac{(-i-1)(i+1)}{(i-1)(i+1)}\\ &= \frac{-i^2-i-i-1}{i^2-1^2}\\ &= \frac{-2i}{-2}\\ &= i\end{aligned}$$

ب. استنتاج طبيعة المثلّث ABC

لدينا

$$\left|\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = 1 \qquad \arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$$

ومنه

$$\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \quad \Big| \quad CA = CB$$

وبالتالي المثلّث ABC متساوي الساقين وقائم في C

3. • تحديد طبيعة مجموعة النقط M ذات اللّاحقة z لمّا α يمسح المجال $[0;\pi]$

نضع $z = x + iy$ حيث $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ ، عندئذ لدينا

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ x = \sin\alpha \\ 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi \end{cases}$$

ومنه

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

وعليه مجموعة النقط M هي القطعة المستقيمة $[BC]$

التمرين الرّابع (7 نق)

1. أ. حساب كُلّا من $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f_k(x) = \lim_{x\to+\infty} (x - ke^{-x}) = +\infty$$

لأنّ

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{t\to-\infty} e^{t} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f_k(x) = \lim_{x\to-\infty} (x - ke^{-x}) = -\infty$$

لأنّ

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{t\to+\infty} e^{t} = +\infty \end{cases}$$

ب. تبيين أنّ الدّالة f_k متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ثمّ تشكيل جدول تغيّراتها.

f_k قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا

$$f'_k(x) = 1 + ke^{-x}$$

من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ لدينا $e^{-x} > 0$ وبما أنّ $k > 0$ فإنّ

$$f'_k(x) > 0$$

وبالتالي f_k متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2. أ. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} [f_k(x) - x]$ ثمّ تفسير النتيجة هندسياً.

$$\lim_{x\to+\infty} [f_k(x) - x] = \lim_{x\to+\infty} (-ke^{-x}) = 0$$

لأنّ

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{t\to-\infty} e^{t}$$
$$= 0$$

وبالتالي المستقيم ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_k) عند $+\infty$

ب. دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_k) و المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$

من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$f(x) - x = -ke^{-x}$$

وبما أنّ

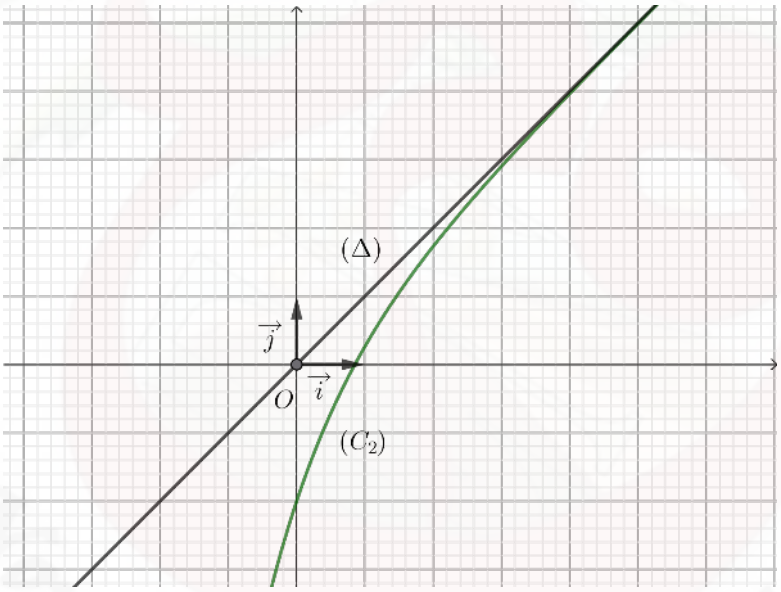
$$\begin{cases} k > 0 \\ e^{-x} > 0 \end{cases}$$

فإنّ

$$f_k(x) - x < 0$$

ومنه (C_k) يقع تحت (Δ).

3. أ. إنشاء كُلّا من (Δ) و (C_2)



ب. مناقشة عدد حلول المعادلة : $f_2(x) = x + \ln m$ حسب قيم الوسيط الحقيقي m

حلول المعادلة بيانيا هي فواصل نقط تقاطع (C_2) مع المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y = x + \ln m$ ، مجموعة قيم m هي المجال $]0;+\infty[$ ، وبوضع $m' = \ln m$، ينتج

في حالة	قيم m	عدد حلول المعادلة
$m' < 0$	$m \in]0;1[$	حلّ واحد
$m' \geq 0$	$m \in [0;+\infty[$	لا توجد حلول

4. أ. دراسة الوضع النسبي للمنحنيين (C_k) و (C_{k+1})

من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$f_{k+1}(x) - f_k(x) = x - (k+1)\,e^{-x} - (x - ke^{-x})$$
$$= -e^{-x}$$
$$< 0$$

ومنه (C_{k+1}) يقع تحت (C_k)

ب. تبيين أنّ المعادلة $f_k(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا α_k حيث $\alpha_k>0$

- f_k مستمرة على $\mathbb{R}$
- f_k متزايدة تماما على $\mathbb{R}$
- لدينا

$$\lim_{x\to-\infty} f_k(x)=+\infty$$

$$\begin{aligned} f_k(0) &= 0-ke^{-0}\\ &= -k\\ &< 0 \end{aligned}$$

وبالتالي المعادلة $f_k(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا α_k حيث $\alpha_k>0$

ج. استنتاج أنّ المتتالية $(\alpha_k)_{k\geq 1}$ متزايدة تماما

من أجل كلّ k من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$f_k(\alpha_{k+1}) > f_{k+1}(\alpha_{k+1})$$

وبما أنّ

$$f_{k+1}(\alpha_{k+1}) = f_k(\alpha_k)$$

فإنّ

$$f_k(\alpha_{k+1}) > f_k(\alpha_k)$$

ولمّا كانت f_k متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ينتج

$$\alpha_{k+1} > \alpha_k$$

وبما أنّ f_k متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإنّ

$$\alpha_{k+1} > \alpha_k$$

وبالتالي $(\alpha_k)_{k\geq 1}$ متزايدة تماما.

5. أ. تبيين أنّه من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$: $x<e^x$

نعتبر الدّالة h المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $h(x)=e^x-x$ ، الدّالة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا

$$h'(x)=e^x-1$$

وينتج عن ذلك

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘	1	↗	

من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$h(x)\geq 1$$

وعليه

$$h(x)>0$$

وبالتالي

$$e^x > x$$

ب. استنتاج أنّه: من أجل كلّ k من $\mathbb{N}^*$ ، $\alpha_k > \ln\sqrt{k}$

لدينا

$$e^{\alpha_k} > \alpha_k$$

ولدينا

$$f_k(\alpha_k) = 0$$

ومنه

$$\alpha_k = ke^{-\alpha_k}$$

بالتعويض نجد

$$e^{\alpha_k} > ke^{-\alpha_k}$$

أي

$$\left(e^{\alpha_k}\right)^2 > k$$

وذلك يكافئ

$$e^{\alpha_k} > \sqrt{k}$$

ويكافئ

$$\alpha_k > \ln\sqrt{k}$$

6. أ. تبيين أنّه: من أجل كلّ k من $\mathbb{N}^*$ ، $0 \leq \mu_k \leq f_k(\alpha_{k+1})$

من أجل كلّ t من $[\alpha_k;\alpha_{k+1}]$ لدينا

$$\alpha_k \leq t \leq \alpha_{k+1}$$

وبما أنّ f_k متزايدة تماما على $[\alpha_k;\alpha_{k+1}]$ فإنّ

$$f_k(\alpha_k) \leq f(t) \leq f_k(\alpha_{k+1})$$

أي

$$0 \leq f(t) \leq f_k(\alpha_{k+1})$$

وبما أنّ f_k مستمرّة على $\mathbb{R}$ فإنّ

$$0 \leq \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f(t)\,dt \leq \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f_k(\alpha_{k+1})\,dt$$

أي

$$0 \leq \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f(t)\,dt \leq (\alpha_{k+1}-\alpha_k)\,f_k(\alpha_{k+1})$$

ومنه

$$0 \leq \frac{1}{\alpha_{k+1}-\alpha_k}\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f_k(t)dt \leq f_k(\alpha_{k+1})$$

أي

$$0 \leq \mu_k \leq f_k(\alpha_{k+1})$$

ب. التحقّق أنّه: من أجل كلّ k من $\mathbb{N}^*$ ، $f_k(\alpha_{k+1}) = e^{-\alpha_{k+1}}$ ثمّ استنتاج $\lim\limits_{k\to+\infty}\mu_k$

من أجل كلّ k من $\mathbb{N}^*$ ، لدينا

$$f_k(\alpha_{k+1}) = \alpha_{k+1} - ke^{-\alpha_{k+1}}$$

ولدينا

$$f_{k+1}(\alpha_{k+1}) = 0$$

أي

$$\alpha_{k+1} - (k+1)\,e^{-\alpha_{k+1}} = 0$$

وعليه

$$\alpha_{k+1} = (k+1)\, e^{-\alpha_{k+1}}$$

وبالتعويض نجد

$$f_k(\alpha_{k+1}) = (k+1)\, e^{-\alpha_{k+1}} - k e^{-\alpha_{k+1}}$$

وعليه

$$f_k(\alpha_{k+1}) = e^{-\alpha_{k+1}}$$

وبالتالي من أجل كلّ k من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$0 \leq \mu_k \leq e^{-\alpha_{k+1}}$$

ولدينا

$$\alpha_{k+1} > \ln \sqrt{k+1}$$

وبما أنّ

$$\lim \left(\ln \sqrt{k+1}\right) = +\infty$$

فإنّ

$$\lim \alpha_{k+1} = +\infty$$

ومنه

$$\lim e^{-\alpha_{k+1}} = 0$$

وبالتالي

$$\lim \mu_k = 0$$

■

سلّم تنقيط الموضوع الثاني

التمرين الأوّل (4 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
I) 1.أ	0,5
I) 1.ب	0,5
I) 2	0,5 + 0,5
II) 1.أ	0,5
II) 1.ب	0,25 + 0,5 + 0,25
II) 2	0,5

التمرين الثاني (4 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
1.أ	0,75
1.ب	0,5
2.أ	0,5
2.ب	0,75
3.أ	0,5
3.ب	0,5
4	0,5

التمرين الثالث (5 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
I) 1	0,75
I) 2	1 + 0,5
II) 1	0,75
II) 2.أ	0,75
II) 2.ب	0,75
II) 3	0,5

التمرين الرابع (7 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
1.أ	0,25 + 0,25
1.ب	0,25 + 0,5
2.أ	0,25 + 0,5
2.ب	0,5
3.أ	0,5 + 0,25
3.ب	0,25
4.أ	0,5
4.ب	0,5
4.ج	0,5
5.أ	0,5
5.ب	0,5
6.أ	0,5
6.ب	0,25 + 0,25

■ انتهى

يكتمل الملف بملاحظات القرّاء الكرام، لذلك في حالة وجود أي خلل في الحل يُرجى مُراسلتنا به بغية تصويبه لفائدة التلاميذ المقبلين على امتحان شهادة البكالوريا وذلك عن طريق البريد الإلكتروني prof.ardjani@gmail.com وجزاكم الله خيرا