موضوع البكالوريا التجريبي رقم 01

التمرين الأول:

أجب بصحيح أو خاطئ مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية:

1) إذا كانت $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{2}{3}} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{2}{3}} f(x) = +\infty$ فإن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{3}{2}} f\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$

2) إذا كان $S = \ln(2) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \ldots + \ln\left(\frac{2025}{2024}\right)$ فإن $e^S = 2024$

3) f و g دالتان. إذا كانت $f(x) = g\left(\ln\sqrt{x}\right)$ و $g'(x) = e^{3x}$ فإن $f'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{2x}$

4) حلول المتراجحة $\log(x+1) + \log(3-x) \leq \log(2x+1) + \log 3$ في $\mathbb{R}$ هي $S =]0;3[$

5) إذا كانت الدالة f المعرفة والقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ دالة فردية فإن f' دالتها المشتقة على $\mathbb{R}$ دالة زوجية.

التمرين الثاني:

يحتوي كيس على 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس، موزعة كالتالي: كريتان بيضاوان مرقمتان بـ -1 ، 2 وخمس كريات خضراء مرقمة بـ -1 ، 0 ، 0 ، 1 ، 2 وثلاث كريات حمراء مرقمة بـ -1 ، 1 ، 2

I- نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من الكيس.

ونعتبر الأحداث التالية: A : "الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون"

B : "الحصول على ثلاث كريات تحمل نفس الرقم" C : "الحصول على ثلاث كريات مجموع أرقامها معدوم"

1) أ- احسب $p(A)$ ، $p(B)$ وبين أن $p(C) = \frac{7}{40}$

ب- احسب $p(A \cap C)$ ثم استنتج $p(\bar{A} \cap C)$

ج- ما احتمال سحب ثلاث كريات مجموع أرقامها معدوم علما أنها ليست من نفس اللون؟

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب لثلاث كريات عدد الكريات التي تحمل الرقم 2

أ- عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضياتي $E(X)$

ب- احسب احتمال الحدث "$X \geq 1$"

II- نسحب الآن عشوائيا على التوالي دون إرجاع ثلاث كريات من الكيس.

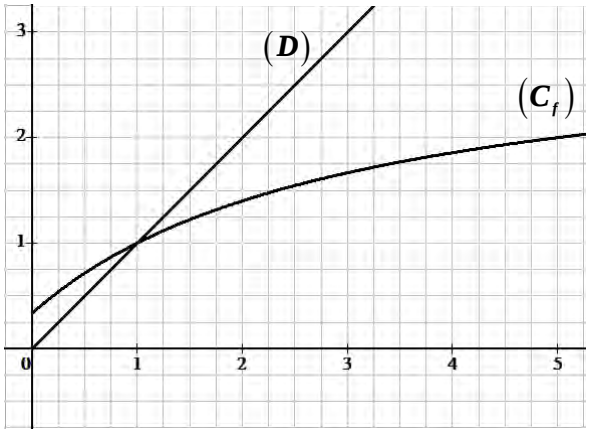
احسب احتمال الحدث D : "الحصول على ثلاث كريات جداء أرقامها معدوم"

التمرين الثالث:

I- f الدالة العددية المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{3x+1}{x+3}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{i}; \vec{j})$ و (D) المستقيم ذو المعادلة $y = x$

– بين أن الدالة f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$



II– α عدد حقيقي موجب و (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0=\alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$

1) عين قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

2) نضع $\alpha=5$

أ– أعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل، الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 مبرزا خطوط الإنشاء.

ب– ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

3) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $1\leq u_n\leq 5$

4) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

5) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+1}$

أ– أثبت أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$ يطلب تعيين حدها الأول.

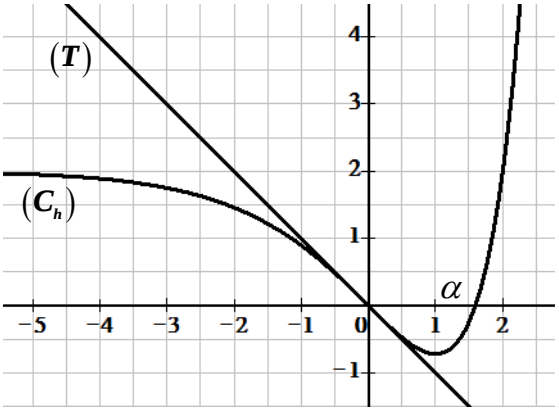
ب– عبر عن v_n و u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

6) نضع: $S_n=v_n+v_{n+1}+\ldots+v_{n+1446}$ و $S_n'=\dfrac{1}{u_n+1}+\dfrac{1}{u_{n+1}+1}+\ldots+\dfrac{1}{u_{n+1446}+1}$

احسب بدلالة n المجموعين S_n و S_n'

التمرين الرابع:

I– (C_h) التمثيل البياني للدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=(x-2)e^x+2$ حيث (C_h) يقطع حامل الفواصل في النقطتين ذات الفاصلتين 0 و α و (T) المماس للمنحنى (C_h) عند المبدأ O كما في الشكل المقابل.



1) تحقق أن $1,5<\alpha<1,6$ ثم بقراءة بيانية، حدد حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $h(x)$

2) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=h(x)+x$

أ– بقراءة بيانية، عين $h'(0)$ ثم اكتب معادلة للماس (T)

ب– حدد وضعية (C_h) بالنسبة إلى (T) ثم استنتج إشارة $g(x)$

II– لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2(x-2)^2e^x+2x^2-8$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

2) أ– بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=2xh(x)$

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

جـ- ماذا يمثل المبدأ O بالنسبة للمنحنى (C_f)؟

3) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x)=2(x-2)g(x)$

ب- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

4) أ- أنشئ (C_f) بدقة (نأخذ $f(\alpha)=-1,3$)

ب- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m الموجب تماما عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=\ln m$

5) أ- تحقق أن الدالة $K:x\mapsto(x^2-2x+2)e^x$ هي دالة أصلية للدالة $k:x\mapsto x^2e^x$ على $\mathbb{R}$

ب- باستعمال المكاملة بالتجزئة، بين أن $\int_0^2 xe^x dx=e^2+1$

جـ- احسب $\mathcal{A}$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x=0$ ، $x=2$ و $y=0$

انتهى الموضوع

التمرين الخامس: (خاص بشعبتي رياضي / تقني رياضي)

1) عين قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n التي من أجلها يكون العدد $M_n=4C_{n+1}^2-A_{n+3}^2+2$ مضاعفا للعدد 7

(لاحظ أن: $n^2+4n+3=(n+2)^2-1$)

2) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7

3) ليكن T_n العدد الطبيعي الذي يكتب في نظام العدد ذو الأساس 5 على الشكل $T_n=\underbrace{\overline{111...1}}_{(n+1)\text{ رقما}}$

أ- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $4T_n=5^{n+1}-1$ ثم استنتج أن $PGCD(T_n;5^n)=1$

ب- ليكن m عددا طبيعيا.

بين أن ($4T_n\equiv m[7]$) تكافئ ($T_n\equiv 2m[7]$)

جـ- استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $N=T_{2024}+2T_{1445}$ على 7

4) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $(E_n)\dots 5^n x+T_n y=1$

بين أن المعادلة (E_n) تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$ ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E_2)

حل الموضوع التجريبي رقم 01

التمرين 01 : صحيح/خطأ :

1) الجواب : صحيح

التبرير :

لما $x \xrightarrow{>} \frac{3}{2}$ أي $x > \frac{3}{2}$

أي : $\frac{1}{x} < \frac{2}{3}$

أي : $\frac{1}{x} \xrightarrow{<} \frac{2}{3}$

ومنه :

$$\lim_{x \xrightarrow{>} \frac{3}{2}} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \xrightarrow{>} \frac{2}{3}} f(x) = +\infty$$

2) الجواب : خاطئ

التبرير :

$$S = \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \dots + \ln \frac{2025}{2024}$$

$$S = \ln 2 + \ln 3 - \ln 2 + \ln 4 - \ln 3 + \dots + \ln 2025 - \ln 2024$$

$$S = \ln 2025$$

$$e^S = e^{\ln 2025}$$

$$\boxed{e^S = 2025}$$

منه :

3) الجواب : خاطئ

التبرير :

$f(x) = g(\ln\sqrt{x})$. $g'(x) = e^{3x}$ و

ومنه f قابلة للاشتقاق على D_f و

الدالة المشتقة f' حيث :

$$f'(x) = (\ln\sqrt{x})' \times g'(\ln\sqrt{x})$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \times e^{3\ln\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2x} \cdot \sqrt{x}^3$$

$\sqrt{x}^3 = x\sqrt{x}$

$$f'(x) = \frac{x\sqrt{x}}{2x}$$

4) الجواب : خاطئ

التبرير :

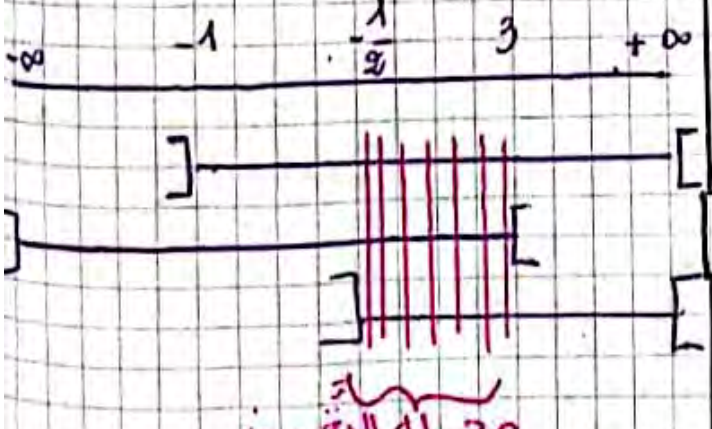
حلول المتراجحة :

$$\log(x+1) + \log(3-x) \leq \log(2x+1) + \log 3$$

المتراجحة معرفة من أجل :

$2x+1 > 0$ و $3-x > 0$ و $x+1 > 0$

$x > -\frac{1}{2}$ و $x < 3$ و $x > -1$



المتراجحة معرفة من أجل

$x \in]-\frac{1}{2}, 3[$

1

ومنه: المتراجحة وكافئ:

$\log(x+1)(3-x) \leq \log 3(2x+1)$.

$(x+1)(3-x) \leq 3(2x+1)$.

$3x - x^2 + 3x \leq 6x + 3$.

$-x^2 - 4x \leq 0$

$x^2 + 4x \geq 0$

$x(x+4) \geqslant 0$

x	$-\infty$	-4		$-\frac{1}{3}$		0		3		$+\infty$
x	$-$		$-$		$+$	0	$+$		$+$	
$(x+4)$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$x(x+4)$	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	

$x = 0$ أو $x+4 = 0$ أي $x = -4$

الحلول التي تنتمي لـ D_f (داخل المجال) هي التي نقبلها

ومنه: $S = [0,3[$.

5) الجواب: صحيح:

التبرير:

لدينا f دالة فردية.

ومنه: من أجل كل x من $\mathbb{R}$ و $-x \in \mathbb{R}$ لدينا

$f(-x) = -f(x)$.

بإشتقاق الطرفين:

$[f(-x)]' = [-f(x)]'$.

$-f'(-x) = -f'(x)$

$f'(-x) = f'(x)$.

ومنه f' دالة زوجية.

2

التمرين 02: إحتمالات:

2B ① ②

5V ⓐ ⓞ ⓞ ① ②

3R ⓐ ① ②

I]- نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من الكيس.

• عدد الحالات الممكنة لهذا السحب:

$Card(\Omega) = C_{10}^3 = 120$.

1) حساب $P(A)$، $P(B)$ و نبين أن $P(C) = \frac{7}{40}$:

A: "الحصول على 3 كريات من نفس اللون":

ⓞⓞⓞ و ①①① أو ②②②

$P(A) = \frac{C_5^3 + C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{11}{120}$

B: "الحصول على 3 كريات تحمل نفس الرقم":

①-①-① أو ⓞ-ⓞ-ⓞ أو ②-②-②

$P(B) = \frac{C_3^3 + C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{60}$.

C: "الحصول على 3 أرقام مجموع أرقامها معدوم":

ⓞ-①-② و ⓞ-①-①.

$P(C) = \frac{C_3^1 \times C_2^1 \times C_2^1 + C_3^2 \times C_3^1}{C_{10}^3}$

$P(C) = \frac{7}{40}$.

ب) حساب $p(A \cap C)$ ثم إستنتاج $p(\bar{A} \cap C)$:

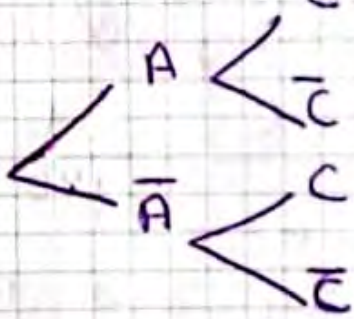
$(A \cap C)$ " : الحصول على 3 كريات من نفس اللون ومجموع أرقامها معدوم "

-1 -1 2 ✗	-1 0 1 ✗
0 0 0 ✗	0 0 0 ✓
0 0 0 ✗	0 0 0 ✗

ومنه :

$$p(A \cap C) = \frac{C_1^1 \times C_2^1 \times C_3^1}{C_{10}^3} = \frac{1}{60}$$

بتطبيق قانون الإحتمالات الكلية :



$$P(C) = P(A \cap C) + P(\bar{A} \cap C).$$

ومنه :

$$p(\bar{A} \cap C) = P(C) - P(A \cap C).$$
$$= \frac{7}{40} - \frac{1}{60} = \frac{19}{120}.$$

ج/ إحتمال سحب 3 كريات مجموع أرقامها معدوم علما أنها ليست من نفس اللون . $P_{\bar{A}}(C)$

$$P_{\bar{A}}(C) = \frac{P(\bar{A} \cap C)}{P(\bar{A})} = \frac{P(\bar{A} \cap C)}{1 - P(A)}.$$

$$P_{\bar{A}}(C) = \frac{\frac{19}{120}}{1 - \frac{11}{120}} = \frac{19}{109}.$$

II) X : عدد الكريات التي تحمل الرقم 2.

ب- قانون إحتمال X .

$$X = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$p(X=0) = \frac{C_7^3}{C_{10}^3} = \frac{35}{120}.$$

$$p(X=1) = \frac{C_3^1 \times C_7^2}{C_{10}^3} = \frac{63}{120}$$

$$p(X=2) = \frac{C_3^2 \times C_7^1}{C_{10}^3} = \frac{21}{120}.$$

$$p(X=3) = \frac{C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{120}.$$

X_i	0	1	2	3
$P(X=X_i)$	$\frac{35}{120}$	$\frac{63}{120}$	$\frac{21}{120}$	$\frac{1}{120}$

حساب $E(X)$:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{4} X_i \times P(X=X_i)$$

$$E(X) = \frac{0 + 63 + 42 + 3}{120} = \frac{9}{10}$$

3

ب) حساب $P(X \geq 1)$

$X \geq 1$ تكافئ:

$X=1$ أو $X=2$ أو $X=3$

ومنه:

$P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$

$P(X \geq 1) = \frac{17}{24}$.

طريقة أخرى:

$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0)$.

$= 1 - \frac{35}{120}$.

$= \frac{17}{24}$.

II] نسحب عشوائيا كرة تلو الأخرى دون إرجاع 3 كريات من الكيس.

عدد الحالات الممكنة لهذا السحب:

$\text{Card}(\Omega) = A_{10}^3 = 720$.

حساب $P(D)$:

D: "الحصول على 3 كريات جداء أرقامها معدوم".

0 0 0 أو 0 0 $\bar{0}$ أو 0 $\bar{0}$ $\bar{0}$

$P(D) = 1 - P(\bar{D}) = 1 - \frac{A_8^3}{A_{10}^3}$.

$P(\bar{D}) = \frac{8}{15}$

طريقة أخرى:

$P(D) = \frac{3A_2^1 \times A_8^2 + 3A_2^2 \times A_8^1}{A_{10}^3}$

$P(D) = \frac{8}{15}$.

سؤال إضافي:

هل الحدثان A و C مستقلان:

لدينا:

$P(A) \times P(C) = \frac{77}{4800}$.

$P(A \cap C) = \frac{1}{60}$.

بما أن $P(A) \times P(C) \neq P(A \cap C)$

فإن A و C غير مستقلين.

التمرين 03: (متتاليات عددية).

I] $D_f = [0, +\infty[$; $f(x) = \frac{3x+1}{x+3}$

نبين أن f متزايدة تماما على $[0, +\infty[$:

f قابلة للاشتقاق على $[0, +\infty[$ ودالتها المشتقة f' حيث:

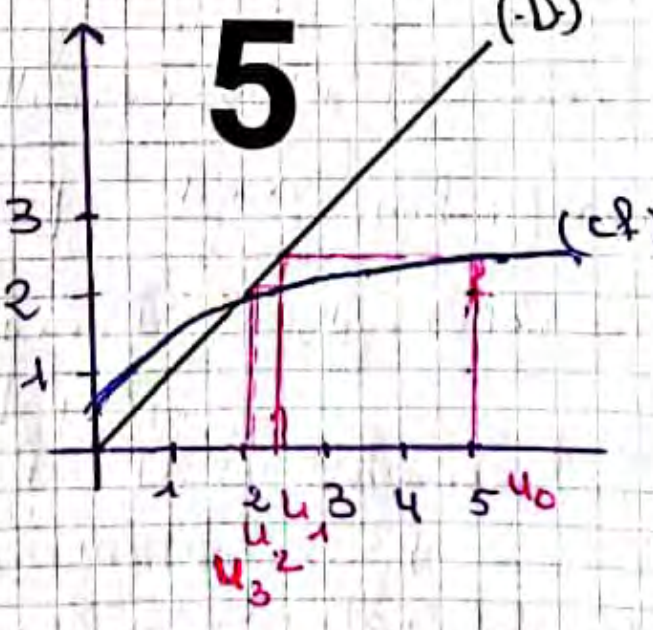
$f'(x) = \frac{3(x+3) - 3x - 1}{(x+3)^2} = \frac{8}{(x+3)^2} > 0$

ومنه f متزايدة تماما على $[0, +\infty[$

II] $\alpha \geq 0$; $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ نعلم

1) تعيين قيمة α حتى تكون (u_n) ثابتة:
(u_n) ثابتة معناه:
$u_{n+1} = u_n = u_0 = \alpha$.
ومنه:
$\alpha = f(\alpha)$
$\alpha = \frac{3\alpha+1}{\alpha+3}$
$\alpha^2 - 1 = 0$
$\alpha = -1$ أو $\alpha = 1$
ونعلم أن $\alpha \geq 0$
أي: $\boxed{\alpha = 1}$
تكون (u_n) ثابتة من أجل $\alpha = 1$

2) نضع $\alpha = 5$.
أ) تمثيل الحدود u_0، u_1، u_2، و u_3:



ب) التخمين:
نلاحظ أن $u_3 < u_2 < u_1 < u_0$
(u_n) متتالية متناقصة.
وحدودها تتقارب نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) و (D)
(u_n) متقاربة.

في البرهان بالتراجع:
$1 \leq u_n \leq 5$

لتكن $P(n)$ الخاصية "$1 \leq u_n \leq 5$"
من أجل $n=0$ لدينا: $u_0 = 5$
و: $1 \leq 5 \leq 5$
أي: $1 \leq u_0 \leq 5$
ومنه: $P(0)$ صحيحة.
من أجل $n \in \mathbb{N}$:
نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي
$1 \leq u_n \leq 5$.
ونبرهن صحة $P(n+1)$ من أجل $n+1$ أي $1 \leq u_{n+1} \leq 5$.
لدينا $1 \leq u_n \leq 5$
ولدينا: الدالة المرفقة بالمتتالية (u_n) متزايدة على $[1;5]$.
أي: $f(1) \leq f(u_n) \leq f(5)$.
$1 \leq u_{n+1} \leq 2 \leq 5$
ومنه: $P(n+1)$ صحيحة.
حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع
من أجل كل عدد طبيعي n
$1 \leq u_n \leq 5$

ب) دراسة اتجاه تغير (u_n):
ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$.
$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$.

$$= \frac{3u_n + 1}{u_n + 3} - u_n.$$

$$= \frac{1 - u_n^2}{u_n + 3}.$$

$$= \frac{(1 - u_n)(1 + u_n)}{u_n + 3}.$$

من 3) [البرهان بالتراجع].

$$1 \leq u_n \leq 5$$

$u_n + 3 > 0$ $\quad 1 + u_n > 0$ $\quad 1 - u_n \geq 0$

ومنه

$u_{n+1} - u_n \leq 0$.

(u_n) متتالية متناقصة.

[يؤكد صحة التخمين].

بما أن (u_n) متناقصة محدودة من الأسفل بالعدد 1...

فهي متقاربة نحو نهاية ℓ.

5) $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

أ/ إثبات أن (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$:

من أجل $n \in \mathbb{N}$ لدينا:

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1}$$

$$v_{n+1} = \frac{\frac{3u_n + 1}{u_n + 3} - 1}{\frac{3u_n + 1}{u_n + 3} + 1}.$$

$$v_{n+1} = \frac{3u_n + 1 - u_n - 3}{3u_n + 1 + u_n + 3}.$$

$$v_{n+1} = \frac{2u_n - 2}{4u_n + 4} = \frac{2}{4} \times \frac{(u_n - 1)}{(u_n + 1)}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot v_n$$

ومنه: (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

وحدها الأول v_0 حيث:

$$v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \frac{5 - 1}{5 + 1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

ب) v_n بدلالة n و u_n بدلالة n و $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

من أجل n من $\mathbb{N}$ لدينا:

$$v_n = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n \; ; n \in \mathbb{N}.$$

ولدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}$

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} = \frac{u_n + 1 - 2}{u_n + 1}$$

$$= 1 - \frac{2}{u_n + 1}.$$

ومنه: $\frac{2}{u_n + 1} = 1 - v_n$ ---(*)

$$u_n = \frac{2}{1 - v_n} - 1$$

$$u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}.$$

$$u_n = \frac{2}{1 - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n} - 1$$

حساب النهاية:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{1 - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n} - 1$$

$$= \frac{2}{1} - 1 = \boxed{1}$$

لأن: $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

$0 < \frac{1}{2} < 1$

6) حساب S_n و S_n':

$$S_n = V_n + V_{n+1} + \cdots + V_{n+1446}$$

$$S_n = V_n \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$S_n = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{1447}\right]$$

$$S_n' = \frac{1}{u_{n+1}} + \frac{1}{u_{n+1+1}} + \cdots + \frac{1}{u_{n+1446+1}}$$

لدينا من (*): $\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}V_n$

$$S_n' = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}V_n\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}V_{n+1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}V_{n+1446}\right)$$

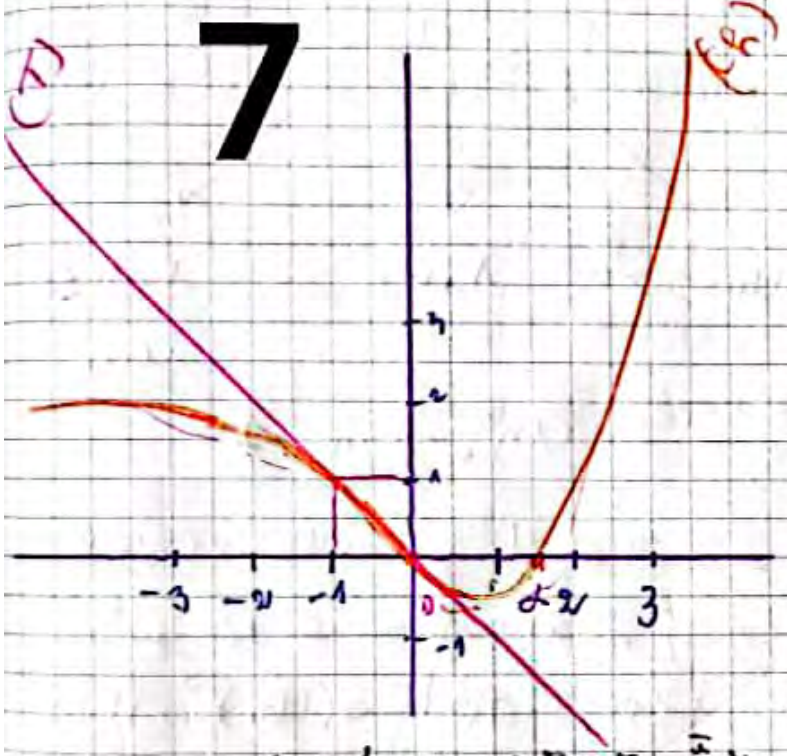
$$S_n' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\underbrace{\left(V_n + V_{n+1} + \cdots + V_{n+1446}\right)}_{S_n}$$

$$S_n' = \frac{1447}{2} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{1447}\right]$$

$$S_n' = \frac{8}{3}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1446} - \left(\frac{1}{2}\right)^n + 43,41\right]$$

التمرين الرابع:

$D_h = \mathbb{R}$; $h(x) = (x-2)e^x + 2$ [I



1) التحقق أن $1,5 < \alpha < 1,6$

لدينا: (C_h) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين إحداهما فاصلتها α أي $h(\alpha) = 0$.

ولدينا: h مستمرة ومتزايدة تماما على $[1,5 ; 1,6]$.

ولدينا:

$h(1,6) \approx 0,019$ و $h(1,5) \approx -0,24$

أي $h(1,5) \times h(1,6) < 0$.

ومنه $1,5 < \alpha < 1,6$

إشارة $h(x)$:

بقراءة بيانية :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

[وضعية (C_h) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل] .

2- $D_g = \mathbb{R}$; $g(x) = h(x) + x$

أ- بقراءة بيانية تعيين $h'(0)$:

شرح : قراءة بيانية :

$f'(1)$: العدد المشتق

$f(1)$: الصورة $\leftarrow (C_f)$

$f'(1)$: المماس

- موجب $\leftarrow f'(1) > 0$
- مائل
- معدوم $\leftarrow f'(1) = 0$

$f''(1)$: نقطة انعطاف

$f''(1) = 0$

لدينا : (C_h) يقبل مماسا (T) عند 0 .

$h'(0)$: العدد المشتق توجيه المماس T

$$h'(0) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 1}{0 - (-1)}$$

$$\boxed{h'(0) = -1}$$

معادلة المماس (T) :

$$(T) : y = h'(0)(x - 0) + h(0)$$

$$y = -1(x - 0) + 0$$

$$\boxed{(\Delta) : y = -x}$$ ومنه

ب) وضعية (C_h) بالنسبة إلى (T) :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h(x) - (-x)$ $h(x) + x$ $g(x)$		$-$	0	$+$	
الوضعية النسبية	(C_h) تحت (T)		(C_h) يقطع (T)		(C_h) فوق (T)

استنتاج إشارة $g(x)$:

من الوضعية السابقة نستنتج أن :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II] $f(x) = 2(x-2)^2 e^x + 2x^2 - 8$

$D_f = \mathbb{R}$

أ) حساب النهايات :

تذكير :

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[2(x-2)e^x + 2x^2 - 8\right]$$

$(+\infty \times 0)$ ح.ع.ت

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[2(x^2e^x - 4xe^x + 4e^x) + 2x^2 - 8\right]$$

$0 \quad 0 \quad 0 \quad +\infty$

$$= \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[2(x-2)^2e^x + 2x^2 - 8\right]$$

$+\infty \quad +\infty \quad +\infty \quad +\infty$

$$= \boxed{+\infty}$$

2) أ/ نبيّن أنّ $\forall x\in\mathbb{R}: f'(x) = 2xh(x)$

الدّالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة f' حيث:

$$f'(x) = 2\left[2(x-2)e^x + (x-2)^2e^x\right] + 4x$$

$$f'(x) = 2\left[2(x-2) + (x-2)^2\right)e^x + 2x]$$

$$f'(x) = 2\left[(2x-4+x^2-4x+4)e^x + 2x\right]$$

$$f'(x) = 2\left[(x^2-2x)e^x + 2x\right].$$

$$f'(x) = 2\left[x(x-2)e^x + 2x\right].$$

$$f'(x) = 2x\left[(x-2)e^x + 2\right].$$

ومنه: $\boxed{f'(x) = 2x.h(x)}$

4) إستنتاج إتجاه تغيّر الدالة f إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$ من إشارة $h(x)$ و x كما يلي:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$		$+$	
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

• الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty, \alpha]$

• الدالة f متزايدة تماما على المجال $[\alpha, +\infty[$

- جدول تغيّرات f:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘		↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

ج) العدد 0 هو: نقطة إنعطاف لـ (C_f) لأنّ المشتقة الأولى إنعدمت عنده ولم تغيّر إشارتها بجواره.

3) نبيّن أنّ $f(x) = 2(x-2)g(x)$:

$$f(x) = 2(x-2)^2e^x + 2x^2 - 8.$$

$$f(x) = 2\left[(x-2)^2e^x + (x^2-4)\right].$$

$$f(x) = 2\left[(x-2)^2e^x + (x-2)(x+2)\right].$$

$$f(x) = 2(x-2)\left[(x-2)e^x + (x+2)\right]$$

9

$f(x) = 2(x-2)\left[\underbrace{(x-2)e^x + 2}_{h(x)} + x\right]$.

$f(x) = 2(x-2)\left[\underbrace{h(x)+x}_{g(x)}\right]$.

ومنه: $f(x) = 2(x-2)g(x)$

ب) حل المعادلة: $f(x) = 0$ في $\mathbb{R}$

$2(x-2)g(x) = 0$ معناه $f(x) = 0$

معناه $x-2=0$ أو $g(x)=0$

معناه $x=2$ أو $x=0$

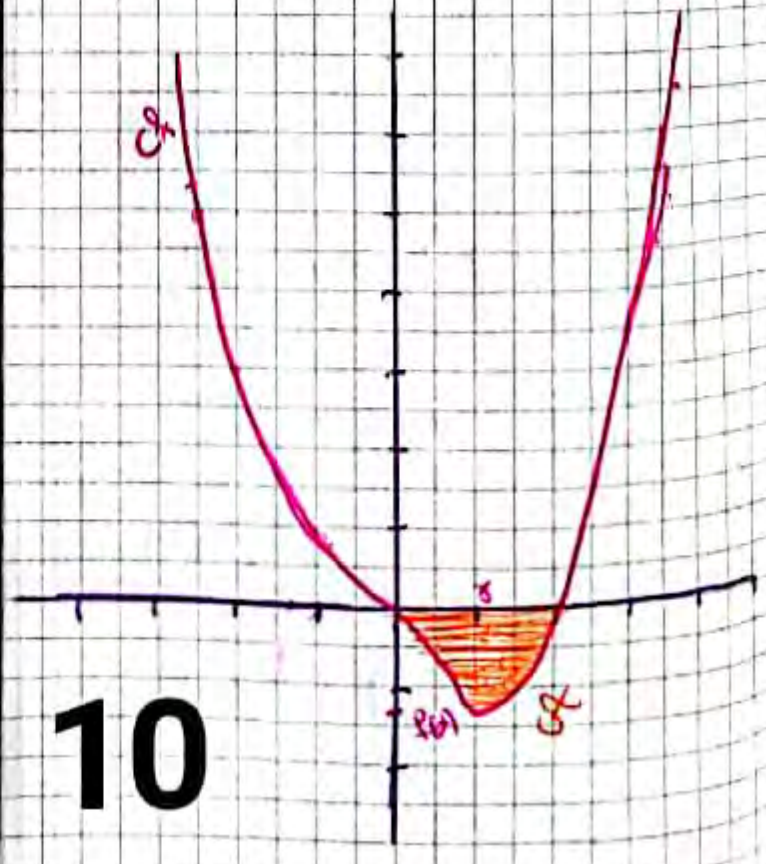
حلا المعادلة $f(x)=0$ هما $x=0$ أو $x=2$

نفسر النتيجة بيانيا:

(C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطتين ذات الفاصلتين 0 و 2.

$(C_f) \cap (x'x) = \{(0,0); (2,0)\}$.

4) استناء (C_f) بدقة مع $f(\alpha) = -13$.



ب) المناقشة البيانية لعدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) = \ln m$ $(m>0)$

حلول المعادلة $f(x) = \ln m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع (Δ_m) ذو المعادلة $y = \ln m$

• المناقشة:

- $0 < m < e^{f(\alpha)}$ أي $\ln m < f(\alpha)$: ليست للمعادلة حلول

- $m = e^{f(\alpha)}$ أي $\ln m = f(\alpha)$: للمعادلة حل واحد موجب هو α

- $f(\alpha) < \ln m < 0$

$e^{f(\alpha)} < m < 1$

للمعادلة حلين موجبين.

- $m = 1$ أي $\ln m = 0$

للمعادلة حلين أحدهما معدوم و الآخر موجب

- $m > 1$ أي $\ln m > 0$

للمعادلة حلين أحدهما سالب والآخر موجب.

ج) التحقق أن $K(x) = k(x)$:

الدالة K قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة K' حيث:

$K' = (2x-2)e^x + (x^2-2x+2)e^x$

$= (2x-2+x^2-2x+2)e^x$

$= x^2 \cdot e^x$.

$= k(x)$.

$$A = -2\left[\left[K(x)\right]_0^2 - 4(e^2+1) + 4\left[e^x\right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_0^2\right].$$

$$A = -2\left[K(2) - K(0) - 4(e^2+1) + 4(e^2-1) + \left(\frac{8}{3} - 8\right)\right].$$

$$A = -2\left[2e^2 - 2 - 4e^2 - 4 + 4e^2 - 4 + \frac{8}{3} - 8\right]$$

$$A = -2\left[2e^2 + \frac{8}{3} - 18\right].$$

$$A = \frac{92}{3} - 4e^2.$$

$$\boxed{A = \frac{92 - 12e^2}{3}}$$ (u.a) وحدة المساحة

11

K دالة أصلية للدالة k على $\mathbb{R}$ بحيث $K(x) = (x-2)e^x + \frac{x^3}{3} - 4x$

ب) نبين أن $\int_0^2 xe^x dx = e^2 + 1$

$$\int_0^2 x \cdot e^x dx = \left[xe^x\right]_0^2 - \int_0^2 1 \cdot e^x dx$$

$u = x$ $v' = e^x$ $u' = 1$ $v = e^x$

$$= \left[xe^x - e^x\right]_0^2$$

$$= \left[(x-1)e^x\right]_0^2$$

$$= \left[e^2\right] - \left[-1\right]$$

ومنه

$$\int_0^2 x \cdot e^x dx = e^2 + 1.$$

ج) حساب A:

(C_f) يقع أسفل حامل محور الفواصل على المجال $[0,2]$.

$$A = \int_0^2 -f(x)\,dx$$

$$A = -\int_0^2 \left(2(x-2)^2 e^x + 2x^2 - 8\right)dx$$

$$A = -2\int_0^2 \left[(x-2)^2 e^x + x^2 - 4\right]dx.$$

$$A = -2\int_0^2 x^2 e^x dx - 4\int_0^2 xe^x dx + 4\int_0^2 e^x dx + \int_0^2 (x^2 - 4)\,dx.$$

الموضوع 1

التمرين الخامس :

2) تعيين قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث $(n \neq 2)$ التي من أجلها M_n مضاعف لـ 3.

$$M_n = 4C_{n+1}^2 - A_{n+1}^2 + 2$$

$$M_n = 4\frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} - \frac{(n+1)!}{(n-1)!} + 2$$

$$M_n = 2(n+1)n - (n-1)(n+2) + 2$$

$$M_n = 2n^2 + 2n - n^2 - n + 2$$

$$M_n = n^2 + n + 4$$

ومنه $\boxed{M_n = n^2 - 3n - 4}$

M_n مضاعف لـ 3 معناه $n^2 - 3n - 4 \equiv 0[3]$

ومن الإنشاء $\begin{cases} n^2 - 4n - 3 \equiv 0[3] \\ (n-2)^2 - 4 \equiv 0[3] \end{cases}$

$(n-2-2)(n-2+2) \equiv 0[3]$

$(n-4)(n) \equiv 0[3]$

$n \equiv 0[3]$ أو $n - 4 \equiv 0[3]$

$n \equiv -1[3]$ أو $n \equiv 4[3]$

$n \equiv 1[3]$ أو $n \equiv 3k+1$

$k \in \mathbb{N}$ أو $n = 3k+4$

ومنه $n = \{3k+4; 3k+1 / k \in \mathbb{N}\}$

3) أ) تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد T_n على 5 :

$T_n = \underbrace{111\ldots11}_{4n \text{ رقم}}$

$T_n = \frac{4^{4n}-1}{4-1}$

$T_n = \frac{5^{4n}-1}{3}$

$3T_n = 5^{4n} - 1$

ومنه $\boxed{3T_n + 1 = 5^{4n}}$

الاستنتاج أن : $PGCD(T_n; 5) = 1$

لدينا $3T_n = 5^{4n} - 1$

$3T_n = 5 \cdot 5^{4n-1} - 1$

$\boxed{T_n(-3) + 5^{4n-1}(5) = 1}$

ومنه حسب مبرهنة بيزو

العددان T_n و 5^{4n-1} أوليان فيما بينهما

$\boxed{PGCD(T_n; 5^{4n-1}) = 1}$

ب) إثبات أن العدد T_n يقبل القسم 5 من أجل كل $n \geq 1$:

$T_n = \frac{5^{4n}-1}{3}$

$T_n = \frac{(5^2)^{2n}-1}{3}$

$T_n = \frac{(5^2-1)(5^{2n}+1)}{3}$

$T_n = \frac{24(5^{2n}+1)}{3}$

$T_n = 8(5^{2n}+1)$

ومنه $\boxed{T_n = 5k}$ حيث $k = 8(5^{2n}+1)$