

2025 :

-

30 04 :



:

:

:

(04)

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات الآتية مع التبرير :

() (1)

:

$\frac{3}{2}$ ($\frac{1}{5}$ ($\frac{7}{6}$ (

n كرة على التوالي مع (2)

:

الإرجاع

$\left(\frac{4^{n+1}}{7^n}\right)$ ($\left(\frac{3}{7}\right)^n$ ($1 - \left(\frac{3}{7}\right)^n$ (

:

n $z = \frac{(\sqrt{3} + i)^{4n+1}}{(1 - i\sqrt{3})^{4n}}$ (3)

$\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$ ($\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$ ($2e^{i\frac{\pi}{6}}$ (

:

$\mathbb{C}$

$\bar{z}$

z

$z\bar{z} + 2z - 5 - 2i = 0$

(4)

$-2i$ $2i$ ($\sqrt{5} - i$ $\sqrt{5} + i$ ($-1 - \sqrt{5} + i$ $-1 + \sqrt{5} + i$ (

(04.75)

$\cdot(E) \dots \dots 5x - 6y = 3 :$ $\mathbb{Z}^2$

$\cdot(E)$ $\mathbb{Z}^2$ 3 x (E) (x, y) (1)

$\cdot$ y x (E) (x, y) (2)

$\cdot 9$ 2^n n (3)

$\cdot(E)$ (x, y) $5 \times 1983^{5x-6y} - 10n + 1448^{2025} \equiv 2[9]$ n (

$\cdot 12551^{10} = 30407^\alpha :$ α (4)



(04.25) :

$$\vdots n \quad u_1 = \frac{5}{2} \quad \mathbb{N}^* \quad (v_n) \quad (u_n)$$

$$.v_n = n(3 - u_n) \quad \alpha \in \mathbb{R}_-^* \quad u_{n+1} = 3 + \frac{n}{\alpha(n+1)} \times (3 - u_n)$$

$$.u_n < 3 \vdots n \quad (1)$$

$$.(u_n) \quad u_{n+1} - u_n = \frac{n + \alpha(n+1)}{\alpha(n+1)} \times (3 - u_n) \vdots n \quad (2)$$

$$. \quad \left(-\frac{1}{\alpha}\right) \quad (v_n) \quad (3)$$

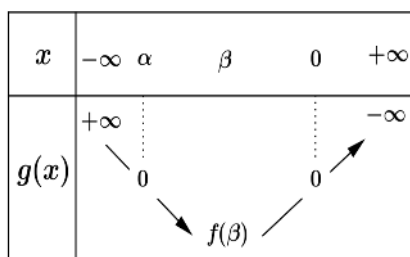
$$. \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \quad n \quad u_n \quad n \quad v_n \quad ($$

$$. \quad (v_n) \quad \alpha \quad ($$

$$.P_n = (3 - u_1) \times (3 - u_2) \times \cdots \times (3 - u_n) \vdots n \quad \alpha = -2 \quad (4)$$

(07) :

$$g(x) = (2x + 4)e^{\frac{x}{2}} - x - 4 \vdots \mathbb{R} \quad g \quad (\text{I})$$



$$. -5 < \alpha < -4$$

$$g(x) = 0 \quad (1)$$

$$. g(x) \quad (2)$$

$$f(x) = x \left(e^{\frac{x}{2}} - 1 \right)^2 \vdots \mathbb{R} \quad f \quad (\text{II})$$

$$. (O; \vec{i}, \vec{j})$$

$$(C_f)$$

$$. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad (1)$$

$$.(C_f)$$

$$-\infty \quad (C_f)$$

$$(\Delta) : y = x$$

$$($$

$$f'(x) = \left(e^{\frac{x}{2}} - 1 \right)^2 + x e^{\frac{x}{2}} \left(e^{\frac{x}{2}} - 1 \right) \vdots x \quad (2)$$

$$. \quad f \quad x e^{\frac{x}{2}} \left(e^{\frac{x}{2}} - 1 \right) \geq 0 \vdots x \quad ($$

$$. \quad (C_f) \quad f''(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} g(x) \vdots x \quad ($$

$$. (C_f) \quad (\Delta) \quad (3)$$

$$. \quad f(x) = \ln(m)x \vdots m \quad ($$

$$. x \mapsto x \left(e^x - 2e^{\frac{x}{2}} \right) \quad F(x) = (x - 1)e^x + (8 - 4x)e^{\frac{x}{2}} \vdots \mathbb{R} \quad F \quad (4)$$

$$. \quad \int_{\ln 4}^2 x \left(e^x - 2e^{\frac{x}{2}} \right) dx = e^2 - 12 + 4 \ln(4) \vdots ($$



(4)

.3 2 1 0

2 2 1 1 0

2 1

(I

(1

"A :

"B

$$p(A) = \frac{24}{55}$$

$$p(A) = \frac{4}{165}$$

-

X (2

(

(

(II

-

$$E(x) = \frac{40}{11}$$

X

.{2;3;4;5} X

0

$$\frac{1}{21}$$

(05)

$$(C_f) \quad f(x) = \frac{2x+3}{2x+7} :$$

$[0, +\infty[$

f

(I

$$(\Delta) : y = x \quad (O; \vec{i}, \vec{j})$$

$$u_{n+1} = f(u_n) : n$$

$$u_0 = 1$$

(u_n)

((1

$u_2 \quad u_1 \quad u_0$

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1 : n$$

(

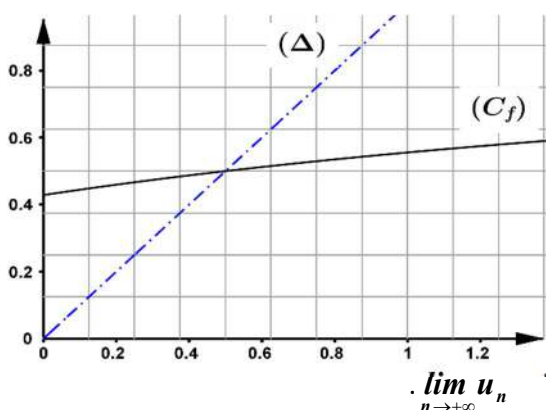
(u_n)

(

((2

$$u_{n+1} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{8} \left(u_n - \frac{1}{2} \right) : n$$

(



$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$\left| u_n - \frac{1}{2} \right| \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{3n+1} : n$$

$$\log(v_4) + \log(v_7) = 2 - 2\log(2) :$$

(v_n) (II

.(25

) .v_n

$$v_7 = 25 \quad v_4 = 1 :$$

-

(04.5) :

$$(\bar{z} + 1 - \sqrt{2} + 3i)(z^2 - 5z + 25) = 0 :$$

$\mathbb{C}$

(I

: نعتبر النقط C, B, A التي لواحقها على الترتيب :

(II



$$z_C = z_A + z_B, \quad z_B = \overline{z_A}, \quad z_A = \frac{5}{2} - i \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

• $AOBC$

ABC

$$\left(\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} \right) \quad (1)$$

$$\arg \left(\frac{z - z_A}{z - z_C} \right) = \pi + 2k\pi : \quad (C \quad A \quad M) \quad z \quad M \quad (\Gamma) \quad (2)$$

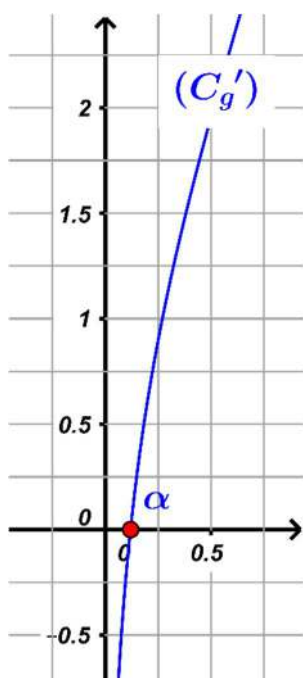
$$5^n \text{ على } 7. \quad n \quad (3)$$

$$7. \quad (|z_A|^{2025} + |z_B|^{1447}) \quad ($$

$$S_n = 1 + |z_A| + |z_A|^2 + \dots + |z_A|^n : n \quad ($$

$$4S_n(n^2 + 3) \equiv 0[7] : n \text{ بحيث } n \quad S_n \quad -$$

$$(06.5) :$$



$$(O; \vec{i}, \vec{j}) \quad (I)$$

$$g(x) = x \ln x + e^x - 1 :]0, +\infty[\quad g$$

$$g \quad g' \quad (C_{g'})$$

$$g \quad (1)$$

$$0.3 < \beta < 0.4 \quad g(x) = 0 \quad (2)$$

$$g(x) \quad (3)$$

$$f(x) = (e^{-x^2} - 1) \ln x :]0, +\infty[\quad f \quad (II)$$

$$(C_f)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad (1)$$

$$f'(x) = -\frac{e^{-x^2}}{x} g(x^2) :]0, +\infty[\quad x \quad (2)$$

$$[\sqrt{\beta}; +\infty[\quad]0; \sqrt{\beta}] \quad f \quad ($$

$$(C_f) \quad (T) \quad y = \left(\frac{1}{e} - 1 \right) x + 1 - \frac{1}{e} \quad (3)$$

$$f(\sqrt{\beta}) \approx 0.56 \quad (C_f) \quad (T) \quad ($$

$$I_n = \int_{e^{-1}}^1 x^n \ln x dx : \quad n \quad (4)$$

$$I_n = \frac{(n+2)e^{-n-1} - 1}{(n+1)^2} : \quad -$$

$$-x^2 \leq e^{-x^2} - 1 \leq -x^2 + \frac{x^4}{2} : [e^{-1}, 1] \quad x \quad (5)$$

$$x = e^{-1} \quad x = 1, y = 0 \quad (C_f) \quad -$$

تدقيق الإحصاء التجريبي في الرياضيات
«تقني رياضي»

الموضوع (I)

التصريف 1: 4 نقاط

1) رئيس - نائب 1 - نائب 2.
احتمال أن يكون هشام هو النائب الأول:
 $P(H) = \frac{A_4 A_1 A_3}{A_5^3} = \frac{1}{5}$ (0.5)
الإجابة (0.5)

2) احتمال أن تكون كرة بيضاء على الأقل:
 $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{3^n}{2^n}$ (0.5)

$\bar{A}$: حادثة الحصول على 0 كرة بيضاء

$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{3^n}{2^n}$ (0.5)
 $= 1 - \left(\frac{3}{2}\right)^n$
الإجابة (0.5)

3) $Z = \frac{(\sqrt{3} + i)^{4n+1}}{(1 - i\sqrt{3})^{4n}} = \frac{(\sqrt{3} + i)^{4n} (\sqrt{3} + i)}{(1 - i\sqrt{3})^{4n}}$ (3)

$= \left(\frac{\sqrt{3} + i}{1 - i\sqrt{3}}\right)^{4n} (\sqrt{3} + i) = (i)^{4n} (\sqrt{3} + i)$
 $= (i^4)^n (\sqrt{3} + i)$ (0.5)
 $= 2e^{i\frac{\pi}{6}}$
الإجابة (0.5)

4) $2\bar{z} + 2z - 5 - 2i = 0$

نضع: $z = n + iy$ و $\bar{z} = n - iy$
 $(n + iy)(n - iy) + 2(n + iy) - 5 - 2i = 0$

2) x و y أوليان فيما بينهما معناه:

$$\text{PGCD}(x, y) = 1$$

لدينا: $d \mid x$ و $d \mid y$ منه $d \mid 5n - 6y$

$d \in \{1, 3\}$ منه: أي $d = 3$ (0.25)

إذا كان $d = 3$:

$$\begin{cases} 6k+3 \equiv 0 [3] \\ 5k+2 \equiv 0 [3] \end{cases} \text{ أي: } \begin{cases} x \equiv 0 [3] \\ y \equiv 0 [3] \end{cases}$$

$$k+1 \equiv 0 [3] \text{ منه:}$$

$$k \equiv -1 [3]$$

$$k \equiv 2 [3]$$

بالتالي: $p \in \mathbb{N} / k = 3p + 2$

إذا كان $d = 1$ فإن: $k \neq 3p + 2$

أي: $k = 3p$ و $k = 3p + 1$ (0.25)
اذن: النتائج الطبيعية:

$$(x, y) = \{(18p+3; 15p+2); (18p+9; 15p+3) \mid p \in \mathbb{N}\}$$

(3) يوافق قسمة 2 على 9:

n	6k	6k+1	6k+2	6k+3	6k+4	6k+5
الباقي	1	2	4	8	7	5

ب- نعيد قسمة العدد الطبيعي n :
 $5n - 6y$ (0.25)

$$5 \times 1983 - 10n + 1448 \equiv 2 [9]$$

$$1983 \equiv 3 [9] \text{ لدينا:}$$

$$1983 \equiv 3 [9]$$

$$\equiv 3^3 [9]$$

$$\equiv 0 [9] \text{ (0.25)}$$

$$x^2 + y^2 + 2x + 2iy - 5 - 2i = 0$$

$$(x^2 + y^2 + 2x - 5) + (2y - 2)i = 0$$

معناه: $2y - 2 = 0$ و $x^2 + y^2 + 2x - 5 = 0$

$$x^2 + 2x - 4 = 0 \text{ منه: } y = 1 \text{ (0.5)}$$

$$x_1 = -1 + \sqrt{5}$$

$$x_2 = -1 - \sqrt{5}$$

ومنه حلول المعادلة:
 $z_1 = -1 + \sqrt{5} + i$ و $z_2 = -1 - \sqrt{5} + i$

الإجابة (0.5)

التصريف 2: 4.75

$$5n - 6y = 3 \dots (E) \quad (1)$$

$$5n = 6y + 3$$

$$5n = 3(2y + 1)$$

أي: $3 \mid 5n$ حيث $3 \nmid 5$

منه: $3 \mid n$ اذن $n = 3k \mid k \in \mathbb{Z}$

$$n \equiv 0 [3] \text{ (0.25)}$$

اذن: n مضاعف للعدد 3.

حل في المعادلة:

لدينا من السؤال السابق:

$$5n \equiv 3 [6] \text{ و } 5n \equiv 15 [6]$$

$$n \equiv 3 [6] \Rightarrow n = 6k + 3 \mid k \in \mathbb{Z}$$

نعوّده في (E) نجد:

$$5(6k + 3) - 6y = 3$$

$$6y = 30k + 12$$

$$y = 5k + 2 \mid k \in \mathbb{Z} \text{ (0.5)}$$

$$(n, y) = \{(6k + 3; 5k + 2) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$u_{n+1} - u_n > 0 \quad (0,25) \quad \text{هذه}$$

اذن: (u_n) متزايدة تماماً

$$u_{n+1} = (n+1)(3 - u_{n+1}) \quad (3) \quad -1$$

$$= (n+1) \left(3 - 3 - \frac{n}{\alpha(n+1)} (3 - u_n) \right)$$

$$= (n+1) \left(-\frac{n}{\alpha(n+1)} (3 - u_n) \right) \quad (0,15)$$

$$= -\frac{n}{\alpha} (3 - u_n)$$

$$= -\frac{1}{\alpha} u_n$$

اذن: u_n هـ سـة أساسها

$$u_1 = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2} \quad q = -\frac{1}{\alpha} \quad \text{و حدها الأول} \quad (0,25)$$

ب - عبارة u_n بدالة n:

$$u_n = u_1 \times q^{n-1}$$

$$u_n = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\alpha} \right)^{n-1} \quad (0,5)$$

- عبارة u_n بدالة n:

$$u_n = 3n - n u_n$$

$$n u_n = 3n - u_n$$

$$u_n = 3 - \frac{1}{n} u_n = 3 - \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\alpha} \right)^{n-1}$$

$$u_n = 3 - \frac{1}{2n} \left(-\frac{1}{\alpha} \right)^{n-1} \quad (0,15)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3 - \frac{1}{2n} \left(-\frac{1}{\alpha} \right)^{n-1} = 3 \quad (0,25)$$

(?) قيمة α حتى يكون u_n متقاربة

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \quad \text{متقاربة معناه}$$

$$-1 < -\frac{1}{\alpha} < 1 \quad \text{أي}$$

$$-1 < \frac{1}{\alpha} < 1 \quad \text{منه}$$

1- البرهان بالتراجيع: $u_n < 3$

التحقق من صحة الظاهية من أجل $n=1$

$$u_1 = \frac{5}{2} < 3 \quad (\text{محققة})$$

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ونبرهن صحة $P(n+1)$.

$$u_n < 3 \quad \text{لدينا:}$$

$$-u_n > -3$$

$$3 - u_n > 0$$

$$\left(\frac{n}{\alpha(n+1)} < 0 \right) \Rightarrow \frac{n}{\alpha(n+1)} (3 - u_n) < 0$$

$$3 + \frac{n}{\alpha(n+1)} (3 - u_n) < 3$$

$$u_{n+1} < 3 \quad \text{بالتالي:}$$

وهذه: $P(n+1)$ محسبة.

اذن: $P(n)$ محسبة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم.

$$u_{n+1} - u_n = 3 + \frac{n}{\alpha(n+1)} (3 - u_n) - u_n \quad (2)$$

$$= (3 - u_n) + \frac{n}{\alpha(n+1)} (3 - u_n)$$

$$= (3 - u_n) \left(1 + \frac{n}{\alpha(n+1)} \right) \quad (0,15)$$

$$= (3 - u_n) \left(\frac{\alpha(n+1) + n}{\alpha(n+1)} \right)$$

لدينا:

$$3 - u_n > 0$$

$$\alpha \in \mathbb{R}^* \quad \text{و} \quad n + (\alpha(n+1)) > 0$$

$$n+1 > n \quad \text{و} \quad \alpha(n+1) < 0$$

$$\alpha(n+1) < 0$$

$$1448 \equiv 8 [9]$$

$$1448 \equiv -1 [9] \quad (0,25)$$

$$1448 \equiv (-1)^{2025} [9]$$

$$\equiv -1 [9]$$

$$5 \times 1983^{5n-64} - 10n + 1448 \equiv 2 [9] \quad (2025)$$

$$-10n - 1 \equiv 2 [9] \quad \text{يكافئ:}$$

$$-10n \equiv 3 [9]$$

$$10n \equiv -3 [9]$$

$$10n \equiv 6 [9] \quad (0,25)$$

$$10n \equiv 60 [9] \Rightarrow n \equiv 6 [9]$$

منه: $n = 9m + 6$ حيث $m \in \mathbb{N}$

$$\overline{12551}^{10} = \overline{30407}^{\alpha} \quad (4)$$

$$12551 = 7 + 4\alpha^2 + 3\alpha^4 \quad \alpha > 8 \quad (0,25)$$

$$3\alpha^4 + 4\alpha^2 - 12544 = 0 \quad \text{منه}$$

$$\text{نضع: } d^2 = t \quad 3t^2 + 4t - 12544 = 0$$

$$t_1 = +64 \quad \text{أو} \quad t_2 = -\frac{196}{3} \quad (\text{مرفوض})$$

$$\alpha_1 = 8 \quad \text{أو} \quad \alpha_2 = -8 \quad \text{منه:}$$

بالتالي: قيمة α هي: 8.

$$u_1 = \frac{5}{2}$$

$$u_{n+1} = 3 + \frac{n}{\alpha(n+1)} (3 - u_n) \quad \alpha \in \mathbb{R}^* \quad (0,25)$$

$$u_n = n(3 - u_n)$$

2- المشتقة :
 $f(x) = (e^{\frac{x}{2}} - 1) + 2(\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}})(e^{\frac{x}{2}} - 1)x$
 $= (e^{\frac{x}{2}} - 1) + xe^{\frac{x}{2}}(e^{\frac{x}{2}} - 1)$ (0.5)
 ب- إشارة $xe^{\frac{x}{2}}(e^{\frac{x}{2}} - 1)$ (0.25)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x		0	+
$e^{\frac{x}{2}} - 1$	-	0	+
$xe^{\frac{x}{2}}(e^{\frac{x}{2}} - 1)$	+	0	+

منه : $f'(x) > 0$
 اذن : f متزايدة تماماً (0.25)
 جدول التغيرات :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+
$f(x)$			$+\infty$

3- حساب $f''(x)$
 $f'(x) = (e^{\frac{x}{2}} - 1) + xe^{\frac{x}{2}}(e^{\frac{x}{2}} - 1)$
 $f''(x) = 2(\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}})(e^{\frac{x}{2}} - 1) + (e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}})x$
 $= 1e^{\frac{x}{2}}(e^{\frac{x}{2}} - 1) + e^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{x}{2}} + xe^{\frac{x}{2}}$
 $= \frac{1}{2}(2e^{\frac{x}{2}} - 2e^{\frac{x}{2}} + 2e^{\frac{x}{2}} - 2e^{\frac{x}{2}} + 2xe^{\frac{x}{2}} - 2e^{\frac{x}{2}})$
 $= \frac{1}{2}(4e^{\frac{x}{2}} - 4e^{\frac{x}{2}} + 2xe^{\frac{x}{2}} - 2e^{\frac{x}{2}})$
 $= \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}(4e^{\frac{x}{2}} - 4 + 2xe^{\frac{x}{2}} - 2)$
 $= \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}[(2x+4)e^{\frac{x}{2}} - 2]$
 $= \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} \cdot g(x)$

إشارة $g(x)$: (0.25)

x	$-\infty$	2	0
إشارة $g(x)$	+	0	-

$f(x) = x(e^{\frac{x}{2}} - 1)^2$ (I)
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{x}{2}} - 1)^2 = +\infty$ (0.5)

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x(e^{\frac{x}{2}} - 1)^2 = -\infty$ (0.5)

ب- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - y) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x(e^{\frac{x}{2}} - 1)^2 - x)$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x(e^{\frac{x}{2}} - 1)^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x(e^{\frac{x}{2}} - 2e^{\frac{x}{2}} + 1))$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x(e^{\frac{x}{2}} - 2e^{\frac{x}{2}})) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{\frac{x}{2}} - 2xe^{\frac{x}{2}}$
 $= 0$ (0.5)

اذن : $y = x$: (د) مقارب مائل لـ (C_f) الجوار -

الوضع السببي : $f(x) - y = x(e^{\frac{x}{2}} - 2e^{\frac{x}{2}})$
 $x(e^{\frac{x}{2}} - 2e^{\frac{x}{2}}) = 0$ منه $x = 0$ و $e^{\frac{x}{2}}(1 - 2) = 0$
 $-2e^{\frac{x}{2}} + 1 = 0$
 $e^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}$ أي $\frac{x}{2} = \ln \frac{1}{2}$: منه $x = -2 \ln \frac{1}{2} = -\ln \frac{1}{4} = \ln 4$ (0.5)

x	$-\infty$	0	$\ln 4$	$+\infty$
x		0	+	+
$1 - 2e^{\frac{x}{2}}$	-	-	0	+
	+	0	-	+
الوضع السببي	(C_f) حوق (د)	(C_f) قمت (د)	(C_f) حوق (د)	

منه : $\frac{1}{\alpha} > -1$ و $\frac{1}{\alpha} < 1$
 $\alpha < -1$ و $\alpha > 1$ (I)
 مرفوض

$\alpha \in]-\infty; -1[$ اذن : $\alpha \in \mathbb{R}^*$

(4) منه : $u_n = \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^{n-1} = (\frac{1}{2})^n$ $\alpha = -2$

لدينا : $v_n = n(3 - u_n)$
 $3 - u_n = \frac{v_n}{n}$

$\left. \begin{aligned} 3 - u_1 &= \frac{v_1}{1} \\ 3 - u_2 &= \frac{v_2}{2} \\ \vdots \\ 3 - u_n &= \frac{v_n}{n} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (3 - u_1)(3 - u_2) \dots (3 - u_n) = \frac{v_1 v_2 \dots v_n}{1 \times 2 \times \dots \times n}$
 $P_n = \frac{v_1 v_2 \dots v_n}{1 \times 2 \times \dots \times n}$ (0.5)

$P_n = (\frac{1}{2}) \cdot (\frac{1}{2})^2 \dots (\frac{1}{2})^n = (\frac{1}{2})^{1+2+\dots+n}$
 $= \frac{n!}{n!} = \frac{1}{n!}$

$P_n = \frac{1}{n!} (\frac{1}{2})^{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{1}{n!} (\frac{1}{2})^{\frac{n^2+n}{2}} = \frac{1}{n!} (\frac{\sqrt{2}}{2})^{n^2+n}$

التصويت (4) : $g(x) = (2x+4)e^{\frac{x}{2}} - x - 4$ (0.25)

$g(0) = 0$
 g دالة متصورة ورتبة (متساوية) على $[-5; 4]$

$g(-5) \times g(-4) < 0$ (0.5)

حسب مبرهنة القيمة المتوسطة $g(a) = 0$ قبل
 حل وحيد a حيث $a \in]-5; -4[$

ب. الأمل الرياضي:

$$E(x) = \sum_{i=1}^4 x_i p_i = 2 \cdot \frac{2}{33} + 3 \cdot \frac{4}{11} + 4 \cdot \frac{5}{11} + 5 \cdot \frac{4}{33} = \frac{40}{11} \quad (0.5)$$

V: 0, 1, 1, 2, 2
R: 0, 1, 2, 3.

$$P(c) = \frac{A_2^1 \times A_3^2 + A_2^1 \times A_3^2}{A_3^3} = \frac{1}{21} \quad (0.5)$$

التحليل (2): الرسم: (0.75)
ب. البرهان بالشرايح:
تتحقق من صحة P(0).

(محققة) $1 \leq u_n \leq 1 < \frac{1}{2}$ (0.75)

نفرده من P(n) من أجل كل عدد طبيعي n أي $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$

ونبرهن بصحة ما قبل n+1

- لدينا: $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$

منه: $f(1) \leq f(u_n) \leq f(1)$ (متزايدة تماماً)

$$\frac{1}{2} < u_{n+1} \leq \frac{5}{9} < 1$$

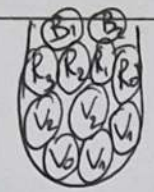
بالتالي: الخاصية صحيحة من أجل n+1.

ومنه: P(n) صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

ج. اتجاه تغيير المتتالية:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + 3}{2u_n + 7} - u_n = \frac{2u_n + 3 - 2u_n^2 - 7u_n}{2u_n + 7} = \frac{-2u_n^2 - 5u_n + 3}{2u_n + 7} \quad (0.5)$$

الموسوع II



التحليل (1): نقطة

I - عدد الإمكانات: C_3^3

$$P(A) = \frac{C_2^1 \times C_2^1 \times C_1^1}{C_3^3} = \frac{4}{165} \quad (0.5)$$

$$P(B) = \frac{C_2^1 \times C_2^1 \times C_1^1}{C_3^3} = \frac{24}{55} \quad (0.5)$$

(2) مجموعة قيم x:

أرقام أولية: 5.
غير أولية: 6.

سحب ثلاث أرقام أولية $\rightarrow x=2$

سحب رقمين أوليين $\rightarrow x=3$

سحب رقم أولي $\rightarrow x=4$

عدم سحب رقم أولي $\rightarrow x=5$

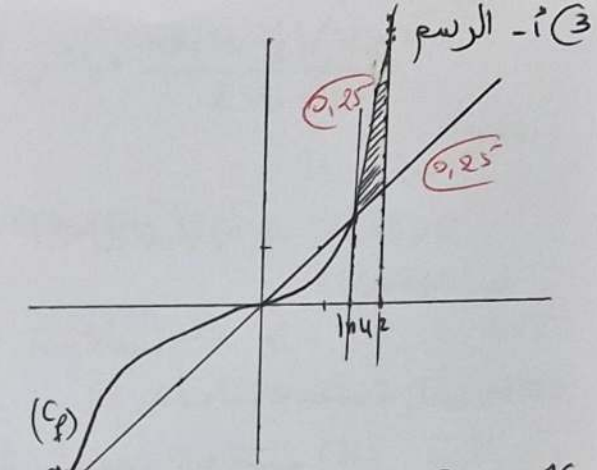
x_i	2	3	4	5
$P(x=x_i)$	$\frac{2}{33}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{4}{33}$

$$P(x=2) = \frac{C_3^3}{C_3^3} = \frac{2}{33} \quad (1)$$

$$P(x=3) = \frac{C_2^1 \times C_2^1}{C_3^3} = \frac{4}{11}$$

$$P(x=4) = \frac{C_1^1 \times C_2^2}{C_3^3} = \frac{5}{11}$$

$$P(x=5) = \frac{C_3^3}{C_3^3} = \frac{4}{33}$$



ب. تعيين قيم m:

المعادلة: $f(n) = \ln(m) \times n$ تقبل 3 حلول كما

$$1 < m < e \quad \text{أي} \quad 0 < \ln m < 1 \quad (0.25)$$

(4) - التحققة: $F'(n) = e^n + (n-1)e^n - 4e^{\frac{n}{2}} + \frac{1}{2}e^{\frac{n}{2}}(8-4n)$

$$= e^n + ne^n - e^n - 4e^{\frac{n}{2}} + 4e^{\frac{n}{2}} - 2ne^{\frac{n}{2}} = n(e^n - 2e^{\frac{n}{2}}) = f(n) - g(n) \quad (0.5)$$

$$\int_{\ln 4}^2 n(e^n - 2e^{\frac{n}{2}}) dn = \left[(n-1)e^n + (8-4n)e^{\frac{n}{2}} \right]_{\ln 4}^2$$

$$= e^2 - 4\ln 4 + 4 - 16 + 8\ln 4 = e^2 + 4\ln 4 - 12 \quad (0.75)$$

التفسير الهندسي: مساحة الجزء المستوي

المحدد بالخطي (C) والمستقيم (A)

والمستقيمتين $x=2$ و $x=\ln 4$

(2) حسابية متزايدة (v_n)

$$\log(v_4) + \log(v_7) = 2 - 2\log 2$$

$$\log(v_4) + \log(v_7) + 2\log 2 = 2$$

$$\log(v_4) + \log(v_7) + \log 4 = 2$$

$$\log(v_4 \times v_7 \times 4) = 2$$

$$\frac{\ln(v_4 \times v_7 \times 4)}{\ln 10} = 2$$

$$\ln(4v_4 \times v_7) = 2\ln 10$$

$$\ln(4v_5 \cdot v_7) = \ln 100$$

$$4v_5 \cdot v_7 = 100$$

$$v_5 \cdot v_7 = 25$$

$$\begin{cases} v_5 = 25 \\ v_7 = 1 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} v_5 = 1 \\ v_7 = 25 \end{cases}$$

بما أن المتسلسلة متزايدة فإن: $v_5 = 1$ و $v_7 = 25$

التصريح (3): 4,6 نقاط

I- حل المعادلة: $\bar{z} + 1 - \sqrt{2} + 3i(2^2 - 5\bar{z} + 25) = 0$

$$\bar{z} = -1 + \sqrt{2} - 3i; z_2 = \frac{5 - 5\sqrt{3}i}{2}; z_3 = \frac{5 + 5\sqrt{3}i}{2}$$

$$z_n = -1 + \sqrt{2} + 3i$$

$$S = \left\{ -1 + \sqrt{2} + 3i; \frac{5 - 5\sqrt{3}i}{2}; \frac{5 + 5\sqrt{3}i}{2} \right\}$$

ب- الاستنتاج: لدينا: $u_{n+1} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{8} (u_n - \frac{1}{2})$

$$n=0: |u_1 - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{8} u_0 - \frac{1}{2}$$

$$n=1: |u_2 - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{8} u_1 - \frac{1}{2}$$

$$|u_n - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{8} u_{n-1} - \frac{1}{2}$$

بالضرب طرفاً لطرفاً نجد:

$$|u_n - \frac{1}{2}| \leq \left(\frac{1}{8}\right)^n |u_0 - \frac{1}{2}|$$

$$\leq \left(\frac{1}{8}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\leq \left(\frac{1}{2^3}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3n} \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$|u_n - \frac{1}{2}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1}$$

استنتاج النهاية:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \frac{1}{2}| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \frac{1}{2}| = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-2(u_n - \frac{1}{2})(u_n + 3)}{2u_n + 7}$$

لدينا: $u_n - \frac{1}{2} > 0$

$$-2(u_n - \frac{1}{2})(u_n + 3) \leq 0 \text{ منه } u_n + 3 > 0$$

$$2u_n + 7 > 0$$

$$u_{n+1} - u_n \leq 0$$

بالتالي (u_n) متناقصة تماماً على $\mathbb{N}$.

التقارب: (u_n) متناقصة ومحدودة

$$u_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{2u_n + 3}{2u_n + 7} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{4u_n + 6 - 2u_n - 7}{2(2u_n + 7)} = \frac{2u_n - 1}{2(2u_n + 7)}$$

$$= \frac{2(u_n - \frac{1}{2})}{2(2u_n + 7)} = \frac{u_n - \frac{1}{2}}{2u_n + 7}$$

$$1 < 2u_n \leq 2 \text{ منه } \frac{1}{2} < u_n \leq 1$$

$$8 \leq 2u_n + 7 \leq 9$$

$$\frac{1}{9} < \frac{1}{2u_n + 7} \leq \frac{1}{8}$$

ولدينا: $u_n - \frac{1}{2} > 0$

$$\frac{u_n - \frac{1}{2}}{2u_n + 7} \leq \frac{1}{8} (u_n - \frac{1}{2})$$

$$u_{n+1} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{8} (u_n - \frac{1}{2})$$

$$(5^{n+1} - 1)(n^2 + 3) \equiv 0 [7]$$

$$5^{n+1} \equiv 1 [7] \text{ أو } n^2 \equiv 4 [7]$$

$$5^{n+1} = 5^{6k} [7]$$

$$n+1 = 6k$$

$$n = 6k - 1 / k \in \mathbb{N}^*$$

n	0	1	2	3	4	5	6
n^2	0	1	4	2	2	4	1

$$n \equiv 2 [7], n \equiv 4 [7]$$

$$n = 7k + 2 / k \in \mathbb{N}$$

$$n = 7k + 5 \text{ أو } k \in \mathbb{N}$$

$$g(x) = x \ln x + e^x - 1 \quad \text{التصنيف (4): 65}$$

x	0	2	+\infty
g(x)	-	0	+

الدالة g متناقصة تمامًا على $]0; 2]$

ومتزاية تمامًا على $[2; +\infty[$.

(2) بمات g مستمرة ومتزايدة تمامًا على $[0.3; 0.4]$

$$g(0.3) \times g(0.4) < 0$$

فإن حسب مبرهنة القيمة المتوسطة $g(\eta) = 0$

$$g(\eta) = 0 \text{ قبل تلاوحيه } \eta \text{ حيث } \eta \in]0.3; 0.4[$$

$$f(x) = (e^{-x^2} - 1) \ln x \quad \text{(II)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

(3) أ- بواقي قسمة 5^n على 7

n	6k	6k+1	6k+2	6k+3	6k+4	6k+5
5^n	1	5	4	6	2	3

ب- استنتاج باقي قسمة 5^{2025} و 5^{1447}

$$|z_A| = 5 = |z_B|$$

$$|z_A|^{2025} = 5^{2025}$$

$$5^{2025} \equiv 5^{6k+3} [7]$$

$$5^{1447} \equiv 5^{6k+1} [7]$$

$$|z_A|^{2025} + |z_B|^{1447} \equiv 5^{6k+3} + 5^{6k+1} [7]$$

$$\equiv 6 + 5 [7]$$

$$\equiv 11 [7]$$

$$\equiv 4 [7]$$

الباقى هو: 4

$$S_n = 1 + |z_A| + |z_A|^2 + \dots + |z_A|^n$$

$$S_n = 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n$$

متتالية هندسية 5 لها أول 1

$$S_n = \frac{1 - 5^{n+1}}{1 - 5} = -\frac{1}{4} (1 - 5^{n+1})$$

$$S_n = \frac{1}{4} (5^{n+1} - 1)$$

- قيم العدد الطبيعي n

$$4S_n (n^2 + 3) \equiv 0 [7]$$

$$4 \times \frac{1}{4} (5^{n+1} - 1) (n^2 + 3) \equiv 0 [7]$$

$$z_A = \frac{5}{2} - i \frac{5\sqrt{3}}{2}; z_B = \overline{z_A}; z_C = z_A + z_B$$

$$\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} = \frac{z_B - z_A}{z_C - z_B}$$

$$\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} = \frac{z_B - z_A}{z_A - z_B} = \frac{\overline{z_A}}{z_A}$$

$$\left| \frac{z_B}{z_A} \right| = \frac{|z_B|}{|z_A|} = 1$$

$$\left(\frac{z_B}{z_A} \right) = \frac{\frac{5}{2} + i \frac{5\sqrt{3}}{2}}{\frac{5}{2} - i \frac{5\sqrt{3}}{2}} = \frac{5 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{5 \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)} = \frac{e^{i \frac{2\pi}{3}}}{e^{-i \frac{2\pi}{3}}} = e^{i \frac{4\pi}{3}}$$

$$\begin{cases} \text{Arg} \left(\frac{z_B}{z_A} \right) = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \\ \left| \frac{z_B}{z_A} \right| = 1 \end{cases}$$

منه: الكتل متساوية الساقين.

طبيعة الرباعي: AOB

$$\begin{cases} AO = BO \\ \overline{AB} \perp \overline{OC} \\ \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{z_A + z_B}{2} \end{cases}$$

الرباعي AOB معين.

(2) مجموعة النقاط:

$$\text{Arg} \left(\frac{z - z_A}{z - z_C} \right) = \pi + 2k\pi$$

مجموعة النقاط هي القطعة $[AC]$

باستثناء النقطة A و C.

$$I_n = \frac{e^{-n-1}}{n+1} - \left[\frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1} \right]_{e^{-1}}^1$$

$$= \frac{e^{-n-1}}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{e^{-n-1}}{(n+1)^2}$$

$$= \frac{(n+2)e^{-n-1} - 1 + e^{-n-1}}{(n+1)^2}$$

$$= \frac{(n+2)(e^{-n-1}) - 1}{(n+1)^2}$$

$$-x^2 \leq e^{-x^2} - 1 \leq -x^2 + \frac{x^4}{2} \quad (5)$$

نعلم أن:

x	0	1	∞
ln x	-	0	+

$$[e^{-1}, 1] \subset [0, 1]$$

$$(-x^2 + \frac{x^4}{2}) \ln x \leq (e^{-x^2} - 1) \ln x \leq -x^2 \ln x$$

$$(-x^2 + \frac{x^4}{2}) \ln x \leq f(x) \leq -x^2 \ln x$$

$$\int_{e^{-1}}^1 (-x^2 + \frac{x^4}{2}) \ln x \leq \int_{e^{-1}}^1 f(x) dx \leq \int_{e^{-1}}^1 (-x^2 \ln x) dx$$

$$\int_{e^{-1}}^1 -x^2 \ln x dx = I_2$$

$$\int_{e^{-1}}^1 (-x^2 \ln x + \frac{1}{2} x^4 \ln x) dx = -I_2 + \frac{1}{2} I_4$$

$$-I_2 + \frac{1}{2} I_4 \leq \int_{e^{-1}}^1 f(x) dx \leq -I_2$$

$$-\frac{4e^{-3}}{9} + \frac{6e^{-5}}{5} \leq \int_{e^{-1}}^1 f(x) dx \leq \frac{-4e^{-3}}{9}$$

$$x=1, \quad x=0 \notin]0, +\infty[$$

$$x=1: \text{مؤ}$$

معادلة التماس عند النقطة 1:

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

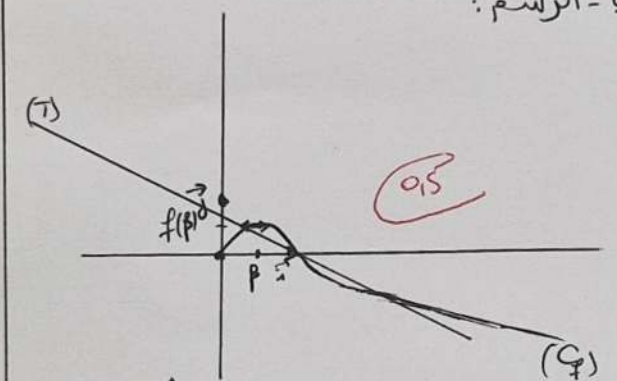
$$= -e^{-1}(e+1)(x-1) + 0$$

$$= -\frac{1}{e}(e-1)(x-1) = (-1 + \frac{1}{e})(x-1)$$

$$= -x + 1 + \frac{x}{e} - \frac{1}{e}$$

$$(T): y = (\frac{1}{e} - 1)x + 1 - \frac{1}{e} \quad (0.5)$$

ب- الرسم:



$$I_n = \int_{e^{-1}}^1 x^n \ln x dx \quad -4$$

$$u(x) = \ln x \rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$v(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \rightarrow v'(x) = x^n$$

$$I_n = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln x \right]_{e^{-1}}^1 - \frac{1}{n+1} \int_{e^{-1}}^1 \frac{x^{n+1}}{x} dx$$

$$= \frac{e^{-n-1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_{e^{-1}}^1 x^n dx$$

$$f'(x) = (-2xe^{-x^2}) \ln x + \frac{1}{x} (e^{-x^2} - 1)$$

$$= -2xe^{-x^2} \ln x + \frac{e^{-x^2}}{x} - \frac{1}{x}$$

$$= -\frac{1}{x} (2x^2 e^{-x^2} \ln x + e^{-x^2} + 1)$$

$$= -\frac{1}{x} e^{-x^2} (2x^2 \ln x + 1 + e^{x^2})$$

$$= -\frac{1}{x} e^{-x^2} (x^2 \ln x^2 + e^{x^2} + 1)$$

$$= -\frac{e^{-x^2}}{x} g(x^2) \quad (0.5) \quad [2 \ln x = \ln x^2]$$

ب- استنتاج اتجاه التغير:

لدنيا: $x \in]0, +\infty[$ أي $x^2 = \beta \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\beta} \\ x = -\sqrt{\beta} \end{cases}$ مرفوض

$$x > \sqrt{\beta} \text{ أي } x^2 > \beta \text{ ما } g(x^2) > 0$$

$$x < \sqrt{\beta} \text{ أي } x^2 < \beta \text{ ما } g(x^2) < 0$$

منه: f متزايدة متناقص على $[0, \sqrt{e}]$ و $[\sqrt{e}, +\infty[$

جدول التغير:

x	0	$\sqrt{e}$	∞
f'(x)	+	0	-
f(x)	0	$f(\sqrt{e})$	∞

3- معادلة التماس (T):

تقاطع (C) مع محور التوازي معناه $f(x) = 0$

$$(e^{-x^2} - 1) \ln x = 0$$

$$\ln x = 0 \text{ أي } e^{-x^2} - 1 = 0$$