

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

U_1 و U_2 صندوقان متماثلان يحتوي U_1 على 5 كرات حمراء و 4 كرات بيضاء و يحتوي U_2 على 4 كرات حمراء و 3 كرات بيضاء. (الكرات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس).

نرمي زهر نرد غير مزيف، اذا تحصلنا رقم مضاعف لـ 3 نسحب كرتين في آن واحد من الصندوق U_1 و في باقي الحالات نسحب كرتين على التوالي مع ارجاع الكرة المسحوبة من U_2 .

نسمي الحدث A "الحصول على رقم مضاعف لـ 3" نسمي الحدث B "الحصول على كرتين من نفس اللون".

(1) انقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثم اكملها.

(2) احسب $P(B)$.

(3) علما أن الكرتين المسحوبتين من نفس اللون، احسب احتمال ان يكونا من الصندوق U_2 .

(4) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحبة العدد 2 في حال كانت الكرتين من نفس اللون و العدد -1 في حال كانت الكرتين مختلفتين في اللون.

• عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم بين $E(X) = \frac{205}{441}$.

التمرين الثاني : (04 نقاط)

(I) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود $P(Z)$ حيث : $p(Z) = Z^3 - 8$.

(1) تحقق أن : $(Z - 2)(Z^2 + 2z + 4) = Z^3 - 8$.

(2) استنتج كل حلول المعادلة : $Z^3 - 8 = 0$.

(II) نعتبر في المستوي المركب $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط C, B, A ذات اللواحق : $Z_C = 2, Z_B = \overline{Z_A}, Z_A = -1 + \sqrt{3}i$.

(1) اكتب Z_C, Z_B, Z_A على الشكل الأسّي.

(2) استنتج أن النقط C, B, A تنتمي الى نفس الدائرة. (يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها).

(3) بين أن $Z_A^{2025} = 2^{2025} \cdot Z_A$ ، ثم استنتج ما يلي : $(Z_A^{202} + Z_B^{202} + Z_C^{202})$.

(4) اكتب العدد المركب $L = \frac{Z_B - Z_A}{Z_A - Z_C}$ على الشكل الجبري ثم الأسّي.

(5) (ا) أعط تفسيراً هندسياً لطويلته وعمدته. واستنتج طبيعة المثلث ABC .

التمرين الثالث : (05 نقاط)

(u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 2$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{(1 + \alpha)u_n - \alpha}{u_n}$ حيث : $\alpha \in]0; 1[$.

(1) (أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n \geq 1$.

(ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة، و استنتج أنها متقاربة، ثم احسب نهاية المتتالية (u_n) .

(2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة، من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n - \alpha}$.

(أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية، يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

(ب) اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n و α ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n و α .

(ج) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ، و تحقق من اجابة السؤال (1) (ب).

(3) (أ) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

(ب) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n - 1 = \frac{\alpha - 1}{u_n - \alpha}$.

(ج) استنتج حساب المجموع S'_n بدلالة n و α حيث : $S'_n = \frac{1}{u_0 - \alpha} + \frac{1}{u_1 - \alpha} + \dots + \frac{1}{u_n - \alpha}$.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

في الشكل المقابل (C) و (Γ) هما على الترتيب التمثيلان البيانيان للدالتين العدديتين

على المجال $] -1; +\infty[$ بـ : $x \mapsto 1 + x^2$ و $x \mapsto 2x(1 + x) \ln(1 + x)$

(C) و (Γ) يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها α تحقق : $0.78 < \alpha < 0.79$.

الدالة g العددية المعرفة على المجال $] -1; +\infty[$ كما يلي :

$$g(x) = 1 + x^2 - 2x(1 + x) \ln(1 + x)$$

(1) بقراءة بيانية، حدد حسب قيم x من المجال $] -1; +\infty[$ وضعية (C) بالنسبة الى (Γ) .

(2) استنتج حسب قيم x من المجال $] -1; +\infty[$ اشارة $g(x)$.

(II) الدالة العددية f معرفة على $] -1; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{\ln(1 + x)}{1 + x^2}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) (أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ، وبين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

(ب) فسر النهايتين هندسيا.

(2) (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $] -1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x + 1)(1 + x^2)^2}$.

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم سكل جدول تغيراتها.

(ج) بين أن $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(1 + \alpha)}$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

(د) اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند المبدأ O .

(3) ارسم (T) و (C_f) . (نأخذ $f(\alpha) \approx 0.36$)

(4) الدالة العددية h معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x) = \frac{\ln(1 + |x|)}{1 + x^2}$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

(أ) بين أن الدالة h زوجية.

(ب) اشرح كيفية رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) ثم ارسمه.

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير :

(1) الجذران التربيعيان للعدد المركب i هما : $1 + i$ و $1 - i$.

(2) f دالة معرفة على $[1; 3]$ بـ: $f(x) = \ln(x + 1)$ القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[1; 3]$ هي : $2 + \ln 64$.

(3) نعتبر العدد المركب $z = \frac{1}{2 + i\alpha}$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$

- من أجل كل عدد حقيقي α لدينا: $z + \bar{z} = 4z\bar{z}$

(4) (u_n) متتالية هندسية أساسها 4 وحدها الأول $u_0 = 3$

نعتبر المجموع: $S_n = u_0 C_n^0 + u_1 C_n^1 + u_2 C_n^2 + \dots + u_n C_n^n$

- $S_n = 3 \times 5^n$ (يمكن استعمال دستور ثنائي الحد)

التمرين الثاني : (04 نقاط)

نعتبر صندوقين متماثلين U_1 و U_2 بهما كرات لا نفرق بينها باللمس حيث :

U_1 يحتوي على خمس كرات حمراء تحمل الأرقام 0, 1, 1, 2, 1 و ثلاث كرات خضراء تحمل الأرقام 0, 1, 1

U_2 يحتوي على ثلاث كرات حمراء تحمل الأرقام 1, 1, 2 و كرتين خضراوين تحملان الرقمين 0, 1.

نختار عشوائيا احد الصندوقين، اذا كان U_1 نسحب منه كرتين على التوالي دون ارجاع، و اذا كان U_2 نسحب منه كرتين على التوالي وبالارجاع.

(1) احسب احتمال الحوادث التالية :

• "A" : سحب كرتين من نفس اللون. • "B" : سحب كرتين تحملان نفس الرقم.

(2) بين أن : $P(A \cap B) = \frac{37}{175}$. هل الحدثان A و B مستقلان؟ علل.

(3) اذا علمت أن الكرتين المسحوبتين من لونين مختلفين. فما هو احتمال أن تكون من الصندوق U_1 ؟

(4) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين من الصندوق U_1 .

(أ) عين قيم المتغير العشوائي X ثم عرف قانون احتماله.

(ب) احسب $E(-3X + 7)$.

التمرين الثالث : (05 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{n+2}{2n+2} u_n$.

(1) (أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$.

(ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة، ثم استنتج أنها متقاربة.

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{u_n}{n+1}$.

(أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

(ب) اكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n .

(ج) بين أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2^n} = 0$ ، ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

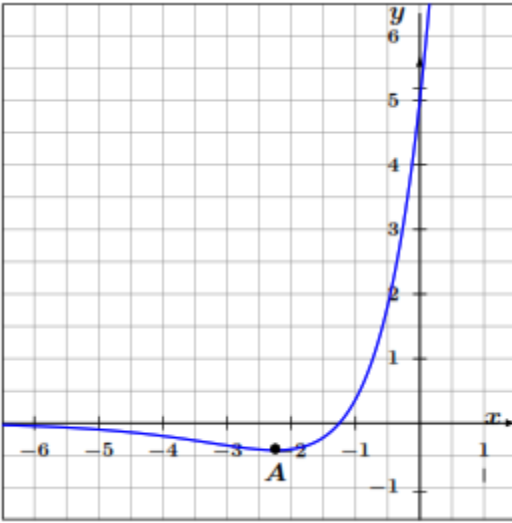
(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^{n+1}}$.

(ا) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n - u_{n+1} = \frac{n}{2^{n+1}}$.

(ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = 1 - u_n$ ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

g الدالة المعرفة و القابلة للاشتقاق على $]-\infty; 1]$ ب : $g(x) = (ax + b)e^x - 1$ (a و b عدنان حقيقيان).



(I) في الشكل أدناه، (C') هو التمثيل البياني للدالة g' مشتقة الدالة g .

(1) اذا علمت أن (C') يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $-\frac{5}{4}$ ، و يقطع حامل محور الترتيب في النقطة ذات الترتيب 5 ، وأنه يقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل في النقطة A ذات الفاصلة $-\frac{9}{4}$.

(ا) بقراءة بيانية ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ماذا تمثل النقطة A ؟

(ب) عين العددين a و b .

(في باقي التمرين نضع $a = 4$ و $b = 1$)

(2) (ا) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة g على المجال $]-\infty; 1]$.

(ب) احسب $g(0)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-\infty; 1]$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty; 1]$ ب : $f(x) = x - (4x - 3)e^x$

و ليكن (C) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) (ا) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم بين أن المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y = x$.

(ب) ادرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (Δ) مع تحديد نقطة تقاطعهما.

(2) (ا) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها. (لاحظ أن $f'(x) = -g(x)$).

(ب) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث : $-\frac{5}{4} < \alpha < -2$ و $\frac{3}{4} < \beta < 1$.

(3) (ا) اكتب معادلة (Δ') مماس (C) الذي يوازي (Δ) ، ثم ارسم المستقيمين (Δ) و (Δ') و المنحنى (C) .

(ب) ناقش بياننا حسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود و عدد حلول المعادلة $(4x - 3)e^x = m$.

(4) لتكن الدالة h المعرفة على المجال $]-\infty; 1]$ ب : $h(x) = (4x - 3)e^x$.

(ا) بين أنه من أجل كل x من المجال $]-\infty; 1]$ فإن : $h(x) = 2h'(x) - h''(x)$.

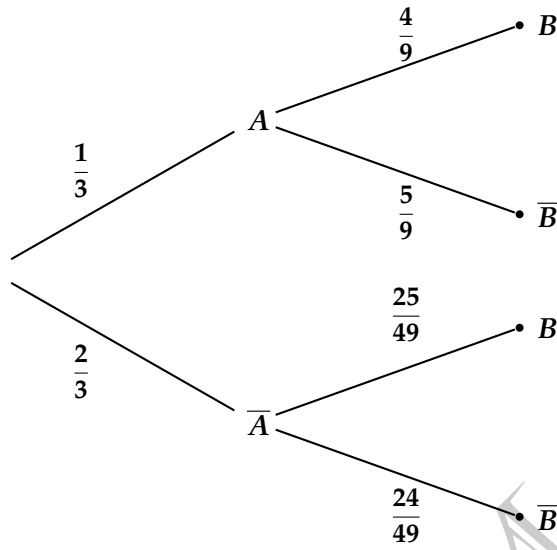
(ب) استنتج دالة أصلية للدالة h على المجال $]-\infty; 1]$ ، و التي تنعدم عند 0.

(ج) احسب مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C) ، (Δ) ، محور الترتيب و المستقيم ذو المعادلة $x = -1$.

الموضوع الأول

حل الممرس الأول: (04 نقاط)

1 اكمال الشجرة :



2 حساب $P(B)$:

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} + \frac{2}{3} \times \frac{25}{49} = \frac{646}{1323}$$

3 حساب احتمال أن تكون الكرتين المسحوبتين من U_2 عليهما أنهما من نفس اللون:

$$P_B(\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{25}{49}}{\frac{646}{1323}} = \frac{225}{323}$$

4 قانون احتمال المتغير العشوائي

x_i	2	-1
$P(X = x_i)$	$\frac{646}{1323}$	$\frac{677}{1323}$

حساب الأمل الرياضي:

$$E(X) = \frac{205}{441}$$

حل الممرس الثاني: (04 نقاط)

(I) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة C كثير الحدود $P(Z)$ حيث : $P(Z) = Z^3 - 8$.

1 التحقق :

$$(Z - 2)(Z^2 + 2Z + 4) = Z^3 + 2Z^2 + 4Z - 2Z^2 - 4Z - 8 = Z^3 - 8$$

2 حل في C المعادلة : $Z^3 - 8 = 0$

$$Z^3 - 8 = 0 \text{ تكافئ } (Z - 2)(Z^2 + 2Z + 4) = 0 \text{ تكافئ } \begin{cases} Z - 2 = 0 \\ Z^2 + 2Z + 4 = 0 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} Z = 2 \\ Z^2 + 2Z + 4 = 0 \end{cases}$$

لنحل في C المعادلة $Z^2 + 2Z + 4 = 0$:

$$\Delta = -12 = (2i\sqrt{3})^2 \text{ لدينا :}$$

$$Z_2 = \frac{-2 + 2i\sqrt{3}}{2} = -1 + i\sqrt{3} ; Z_1 = \frac{-2 - 2i\sqrt{3}}{2} = -1 - i\sqrt{3}$$

اذن مجموعة حلول المعادلة $Z^3 - 8 = 0$ هي : $S = \{2; -1 + i\sqrt{3}; -1 - i\sqrt{3}\}$

(II) نعتبر في المستوي المركب $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط A, B, C ذات اللواحق : $Z_A = -1 + \sqrt{3}i, Z_B = \bar{Z}_A, Z_C = 2$ على الترتيب.

1 كتابة Z_B, Z_A و Z_C على الشكل الأسّي:

$$Z_A = -1 + i\sqrt{3} = 2 \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$Z_B = \overline{Z_A} = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

$$Z_C = 2 = 2e^{i0}$$

2 لدينا : $|Z_A| = |Z_B| = |Z_C| = 2$ ومنه النقط A, B و C تنتمي الى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 2.

3 تبيان أن $Z_A^{2026} = 2^{2025} Z_A$:

$$Z_A^{2025} = 2^{2025} \text{ يكافئ } \frac{Z_A^{2026}}{Z_A} = 2^{2025} \text{ يكافئ } Z_A^{2026} = 2^{2025} Z_A$$

$$\text{لدينا : } Z_A = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ ومنه : } Z_A^{2025} = \left(2e^{i\frac{2\pi}{3}} \right)^{2025} \text{ ومنه : } Z_A^{2025} = 2^{2025} e^{i\frac{2 \times 2025 \pi}{3}} \text{ أي : } Z_A^{2025} = 2^{2025} e^{i(672 \times 2\pi)} = 2^{2025}$$

$$\text{اذن : } Z_A^{2025} = 2^{2025} e^{i(0+672 \times 2\pi)} = 2^{2025} e^{i0} = 2^{2025}$$

الاستنتاج :

$$\begin{aligned} Z_A^{2026} + Z_B^{2026} + Z_C^{2026} &= 2^{2025} Z_A + 2^{2025} \overline{Z_A} + 2^{2026} \\ &= 2^{2025} (Z_A + \overline{Z_A}) + 2^{2026} \\ &= -2 \times 2^{2025} + 2^{2026} \\ &= -2^{2026} + 2^{2026} = 0 \end{aligned}$$

4 كتابة العدد المركب $L = \frac{Z_B - Z_A}{Z_A - Z_C}$ على الشكل الجبري ثم الأسّي:

$$\begin{aligned} I = \frac{Z_B - Z_A}{Z_A - Z_C} &= \frac{-1 - i\sqrt{3} - (-1 + i\sqrt{3})}{-1 + i\sqrt{3} - 2} = \frac{-2i\sqrt{3}}{-3 + i\sqrt{3}} \\ &= \frac{-2i\sqrt{3}(-3 - i\sqrt{3})}{(-3 + i\sqrt{3})(-3 - i\sqrt{3})} = \frac{6i\sqrt{3} - 6}{12} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

5 1 إعطاء تفسير هندسي لطويلته وعمدته :

$$\text{لدينا : } L = \frac{Z_B - Z_A}{Z_A - Z_C} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ يكافئ : } \begin{cases} \left| \frac{Z_B - Z_A}{Z_A - Z_C} \right| = 1 \\ \arg \left(\frac{Z_B - Z_A}{Z_A - Z_C} \right) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ } / k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} CA = AB \\ (\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{AB}) = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

ب استنتاج طبيعة المثلث ABC : المثلث ABC متقايش الأضلاع.

حل التمرين الثالث: (05 نقاط)

1 1 برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n \geq 1$:

$$\text{من أجل } n = 0 : u_0 = 2 \geq 0$$

اذن الخاصية محققة من أجل $n = 0$.

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n أي نفرض أن $u_n \geq 1$.

و نبرهن أنها تبقى صحيحة من أجل $n + 1$ أي نبرهن أن : $u_{n+1} \geq 1$

لدينا : $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث : $f(x) = \frac{(1+\alpha)x - \alpha}{x}$ مع : $0 < \alpha < 1$

لدينا : f متزايدة تماما على I .

ولدينا من الفرض : $u_n \geq 1$

أي : $f(u_n) \geq f(1) = 1$ إذن : $u_{n+1} \geq 1$

ومنه : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq 1$.

ب) تبيان أن (u_n) متناقصة تماما :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{(1+\alpha)u_n - \alpha}{u_n} - u_n \\ &= \frac{(1+\alpha)u_n - \alpha - u_n^2}{u_n} \end{aligned}$$

ندرس إشارة : $u_{n+1} - u_n$

$$\Delta = \alpha^2 + 2\alpha + 1 - 4\alpha = \alpha^2 - 2\alpha + 1 = (\alpha - 1)^2 > 0 \text{ إذن : } -u_n^2 + (1+\alpha)u_n - \alpha = 0$$

بما أن $\Delta > 0$ للمعادلة حلين هما :

$$u_n'' = \frac{-1 + \alpha + 1 - \alpha}{-2} = 0 \text{ و } u_n' = \frac{-1 - \alpha - 1 + \alpha}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

لما $u_n \geq 1$ فإن المتتالية متناقصة تماما.

بما أن (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل فهي متقاربة.

حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

لدينا (u_n) متقاربة نحو ℓ أي : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$

$$\text{إذن : } \ell = \frac{(1+\alpha)\ell - \alpha}{\ell} \quad \ell^2 - (1+\alpha)\ell + \alpha = 0 \quad \Delta = (1+\alpha)^2 - 4\alpha = 1 + 2\alpha + \alpha^2 - 4\alpha = \alpha^2 - 2\alpha + 1$$

ومنه : $\Delta = (\alpha - 1)^2$ أي : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{(\alpha - 1)^2} = 1 - \alpha$

$$\ell_1 = \frac{1 + \alpha - 1 + \alpha}{2} = \alpha \quad \ell_2 = \frac{1 + \alpha + 1 - \alpha}{2} = 1$$

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة، من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n - \alpha}$

1) تبيان أن (v_n) متتالية هندسية :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} - \alpha} = \frac{\frac{(1+\alpha)u_n - \alpha}{u_n} - 1}{\frac{(1+\alpha)u_n - \alpha}{u_n} - \alpha}$$

$$= \frac{\frac{(1+\alpha)u_n - \alpha - u_n}{u_n}}{\frac{(1+\alpha)u_n - \alpha - \alpha u_n}{u_n}}$$

$$= \frac{(1+\alpha-1)u_n - \alpha}{(1+\alpha-\alpha)u_n - \alpha}$$

$$v_{n+1} = \alpha v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها α و حدها الأول $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 - \alpha} = \frac{1}{2 - \alpha}$

ب كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n :

$$v_n = v_0 \times q^n$$

$$v_n = \frac{1}{(2 - \alpha)} \times \alpha^n$$

استنتاج عبارة u_n :

$$u_n = \frac{\frac{\alpha^{n+1} - 2 + \alpha}{2 - \alpha}}{\frac{\alpha^n - 2 + \alpha}{2 - \alpha}}$$

$$u_n = \frac{\alpha^{n+1} + \alpha - 2}{\alpha^n + \alpha - 2}$$

ج حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^{n+1} + \alpha - 2}{\alpha^n + \alpha - 2} = 1$$

3 1 حساب المجموع :

$$S_n = v_0 + \dots + v_n$$

$$S_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$= \frac{1}{2 - \alpha} \times \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$$

$$S_n = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{(2 - \alpha)(1 - \alpha)}$$

ب التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n - 1 = \frac{\alpha - 1}{u_n - \alpha}$:

$$v_n - 1 = \frac{u_n - 1}{u_n - \alpha} - 1$$

$$= \frac{u_n - 1 - u_n + \alpha}{u_n - \alpha} = \frac{\alpha - 1}{u_n - \alpha}$$

وهو المطلوب.

ج استنتاج حساب المجموع S'_n :

$$\frac{1}{u_n - \alpha} = \frac{v_n - 1}{\alpha - 1} \text{ لدينا}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{u_0 - \alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}(v_0 - 1) : n = 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{u_n - \alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}(v_n - 1) \end{cases} \text{ من أجل } n+1 \text{ مرة}$$

$$S'_n = \frac{1}{\alpha - 1}(v_0 + v_1 + \dots + v_n - (n + 1)) : \text{ اذن}$$

$$S'_n = \frac{1}{\alpha - 1} \left(\frac{1 - \alpha^{n+1}}{(2 - \alpha)(1 - \alpha)} - n - 1 \right) : \text{ ومنه}$$

حل التمرين الرابع: (07 نقاط)

1. تحديد الوضع النسبي بين (C) و (Γ) على المجال $]-1; +\infty[$

x	0	α	$+\infty$
الوضعية النسبية	(C) فوق (Γ)	(C) يقطع (Γ)	(C) تحت (Γ)

$$(C) \cap (\Gamma) = \{A(\alpha; 1 + \alpha^2)\}$$

2. استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$

لدينا: $g(x) = 1 + x^2 - 2xx + 1 \ln(1+x)$ ومنه إشارة $g(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$ تعطى بـ:

x	-1	α	$+\infty$
$g(x)$		+	-

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} \quad \text{معرفه على المجال }]-1; +\infty[\quad \text{(II)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x+1} \times \frac{x+1}{1+x^2} = 0$$

التفسير البياني :

$x = -1$ معادلة مستقيم مقارب عمودي للمنحنى (C_f)

$y = 0$ معادلة مستقيم مقارب أفقي للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

(2) أ) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$

f قابلة للاشتقاق على المجال $]-1; +\infty[$ حيث :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x+1}(1+x^2) - 2x \ln(x+1)}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2 - 2x(x+1) \ln(1+x)}{(x+1)(1+x^2)^2} = \frac{g(x)}{(x+1)(1+x^2)^2}$$

ب) إشارة المشتقة : إشارتها من إشارة $g(x)$ لأن : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$ $(x+1)(1+x^2) > 0$

من أجل $f'(x) > 0$, $x \in]-1; \alpha]$ و من أجل $f'(x) < 0$, $x \in [\alpha; +\infty[$
 إذن الدالة f متزايدة تماماً على المجال $]-1; \alpha]$ و متناقصة تماماً على المجال $[\alpha; +\infty[$
 جدول تغيرات الدالة f :

x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	0

(ج) تبيان أن : $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$

$$f(\alpha) = \frac{\ln(1+\alpha)}{1+\alpha^2}$$

لدينا : $g(\alpha) = 0$ يكافئ : $1 + \alpha^2 - 2\alpha(1+\alpha)\ln(1+\alpha) = 0$

$$\ln(1+\alpha) = \frac{1+\alpha^2}{2\alpha(1+\alpha)}$$

$$f(\alpha) = \frac{\ln(1+\alpha)}{1+\alpha^2} = \frac{1+\alpha^2}{2\alpha(1+\alpha)} \times \frac{1}{1+\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$$

تعيين حصر لـ $f(\alpha)$

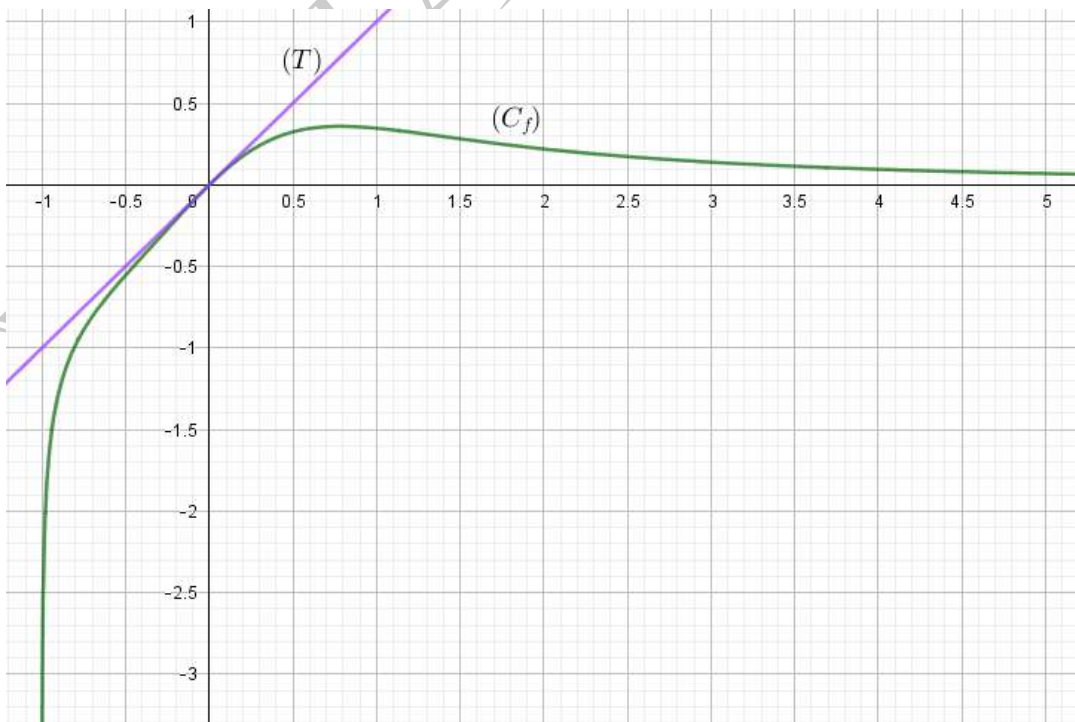
$$1.78 < 1 + \alpha < 1.79 ; 1.56 < 2\alpha < 1.58 ; 0.78 < \alpha < 0.79$$

$$0.35 < f(\alpha) < 0.36 : \text{أي } \frac{1}{2.83} < \frac{1}{2\alpha(1+\alpha)} < \frac{1}{2.78} \text{ و منه : } 2.78 < 2\alpha(1+\alpha) < 2.83$$

(د) كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند المبدأ O

$$(T) : y = f'(0)(x-0) + f(0) = 1(x) + 0 = x$$

(3) إنشاء (T) و (C_f)



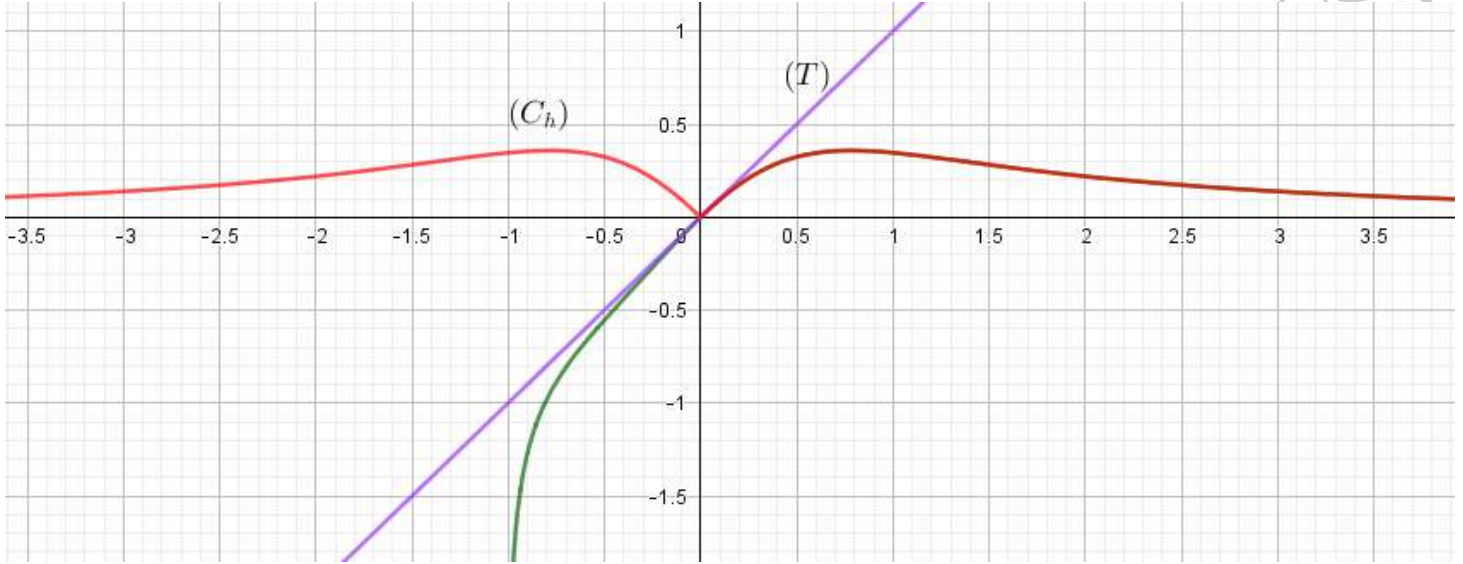
4) h دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = \frac{\ln(1+|x|)}{1+x^2}$

أ) تبين أن h دالة زوجية :

من أجل $-x \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$

$$h(-x) = \frac{\ln(1+|-x|)}{1+(-x)^2} = \frac{\ln(1+|x|)}{1+x^2} = h(x)$$

إذن h دالة زوجية منحناها البياني متناظر بالنسبة إلى محور الترتيب



الموضوع الثاني

حل التمرين الأول: (04 نقاط)

1 الجذران التربيعيان للعدد المركب i هما $1+i$ و $1-i$:

لدينا :

$$\begin{aligned}(1+i)^2 &= (1)^2 + (i)^2 + 2(1)(i) \\ &= 1 - 1 + 2i \\ &= 2i \neq i\end{aligned}$$

الجواب المقترح خاطئ

2 القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[1;3]$ هي : $2 + \ln 64$ حيث $f(x) = \ln(x+1)$:
تذكير : القيمة المتوسطة :

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

الدالة الأصلية للدالة $\ln(x+1)$ هي : $(x+1) \ln(x+1) - x + c$ اذن :

$$\begin{aligned}m &= \frac{1}{3-1} \int_1^3 \ln(x+1) dx \\ &= \frac{1}{2} [(x+1) \ln(x+1) - x + c]_1^3 \\ &= \frac{1}{2} [4 \ln(4) - 3 - 2 \ln(2) + 1] \\ &= \frac{1}{2} [4 \ln 4 - \ln 4 - 2] \\ &= \frac{1}{2} [3 \ln 4 - 2] \\ &= \ln 64 - 2 \\ m &= -1 + \ln \frac{64}{2}\end{aligned}$$

الجواب المقترح خاطئ

3 نعتبر العدد المركب $z = \frac{1}{2+i\alpha}$ حيث : $\alpha \in \mathbb{R}$ ، من أجل كل $\alpha \in \mathbb{R}$ لدينا : $z + \bar{z} = 4z \bar{z}$

$$\begin{aligned}z + \bar{z} &= \frac{1}{2+i\alpha} + \overline{\left(\frac{1}{2+i\alpha}\right)} = \frac{1}{2+i\alpha} + \frac{1}{2-i\alpha} = \frac{1}{2+i\alpha} + \frac{1}{2-i\alpha} \\ &= \frac{2-i\alpha+2+i\alpha}{(2+i\alpha)(2-i\alpha)} = \frac{4}{4+\alpha^2}\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}4z \bar{z} &= 4 \left(\frac{1}{2+i\alpha} \right) \overline{\left(\frac{1}{2+i\alpha} \right)} = 4 \times \frac{1}{2+i\alpha} \times \frac{1}{2-i\alpha} = 4 \times \frac{1}{2+i\alpha} \times \frac{1}{2-i\alpha} \\ &= \frac{4}{(2+i\alpha)(2-i\alpha)} = \frac{4}{4+\alpha^2}\end{aligned}$$

ومنه : $z + \bar{z} = 4z \bar{z}$

الجواب المقترح صحيح.

4) (u_n) متتالية هندسية أساسها 4 وحدها الأول $u_0 = 3$

نعتبر المجموع: $S_n = u_0 C_n^0 + u_1 C_n^1 + u_2 C_n^2 + \dots + u_n C_n^n$ حيث: $S_n = 3 \times 5^n$

الإجابة صحيحة لأن: $S_n = u_0 C_n^0 + u_1 C_n^1 + u_2 C_n^2 + \dots + u_n C_n^n$

$$= 3 \times 4^0 C_n^0 + 3 \times 4^1 C_n^1 + 3 \times 4^2 C_n^2 + \dots + 3 \times 4^n C_n^n$$

$$= 3(4^0 C_n^0 + 4^1 C_n^1 + 4^2 C_n^2 + \dots + 4^n C_n^n)$$

لدينا: $= 3(1^n \times 4^0 C_n^0 + 1^{n-1} \times 4^1 C_n^1 + 1^{n-2} \times 4^2 C_n^2 + \dots + 1^0 \times 4^n C_n^n)$

$$= 3 \sum_{i=0}^n 1^{n-i} \times 4^i C_n^i = 3(1+4)^n$$

ومنه: $S_n = 3(5)^n$

الجواب المقترح صحيح.

حل المرسى الثاني: (04 نقاط)

إذا اخترنا الصندوق U_1 نسحب كرتين على التوالي دون ارجاع فيكون عدد السحبات: $A_8^2 = 56$

إذا اخترنا الصندوق U_2 نسحب كرتين على التوالي مع ارجاع الكرة المسحوبة قبل السحب الموالي فيكون عدد السحبات: $5^2 = 25$

1 حساب احتمالات الحوادث:

$$P(A) = \frac{1}{2} \left(\frac{A_5^2 + A_3^2}{56} \right) + \frac{1}{2} \frac{3^2 + 2^2}{25} = \frac{689}{1400}$$

$$P(B) = \frac{1}{2} \frac{A_5^2 + A_2^2}{56} + \frac{1}{2} \frac{3^2 + 1^2 + 1^2}{25} = \frac{11}{56} + \frac{11}{50} = \frac{1166}{2800}$$

2 تبيان أن: $P(A \cap B) = \frac{37}{175}$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \frac{A_3^2 + A_2^2}{56} + \frac{1}{2} \frac{2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2}{25} = \frac{4}{56} + \frac{7}{50} = \frac{592}{2800} = \frac{37}{175}$$

لدينا: $P(A) \times P(B) \neq P(A \cap B)$ ومنه الحدان A و B غير مستقلان.

3 حساب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من الصندوق U_1 :

نسمي "C" الحدث: سحب كرتين من لونين مختلفين.
طريقة 01:

$$P(C) = \frac{1}{2} \frac{2(A_5^1 \times A_3^1)}{56} + \frac{1}{2} \frac{2(3^1 \times 2^1)}{25} = \frac{15}{56} + \frac{6}{25}$$

$$= \frac{336 + 375}{1400} = \frac{711}{1400}$$

طريقة 02:

$$P(C) = 1 - P(A) = 1 - \frac{689}{1400} = \frac{711}{1400}$$

نسمي "D" الحدث: سحب كرتين من الصندوق U_1 .

لدينا:

$$P_C(D) = \frac{P(C \cap D)}{P(C)}$$

$$P(C \cap D) = \frac{1}{2} \times \frac{2(A_5^1 \times A_3^1)}{56} = \frac{15}{56}$$

ومنه :

$$P_C(D) = \frac{\frac{15}{56}}{\frac{1400}{711}} = \frac{15}{56} \times \frac{1400}{711} = \frac{375}{711}$$

4 1 تعيين قيم المتغير العشوائي X ثم تعريف قانون احتماله :

$$X = \{0; 1; 2; 3\}$$

قانون الاحتمال :

$$\begin{aligned} P(X=0) &= \frac{A_2^2}{56} = \frac{2}{56} \\ P(X=1) &= \frac{2(A_2^1 \times A_5^1)}{56} = \frac{20}{56} \\ P(X=2) &= \frac{A_5^2 + 2(A_1^1 \times A_2^1)}{56} = \frac{24}{56} \\ P(X=3) &= \frac{2(A_5^1 \times A_1^1)}{56} = \frac{10}{56} \end{aligned}$$

X	0	1	2	3
$P(X)$	$\frac{2}{56}$	$\frac{20}{56}$	$\frac{24}{56}$	$\frac{10}{56}$

ب حساب $E(-3X + 7)$:

$$E(X) = \frac{98}{56} = \frac{49}{28}$$

$$E(-3X + 7) = -3E(X) + 7 = 1.75$$

حل المزمز الثالث: (05 نقاط)

1 1 تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: u_n > 0$:

نسمي $P(n)$ الخاصية : " من أجل كل عدد طبيعي $n, u_n > 0$ "

التحقق : لدينا : $u_0 = 1$ ومنه : $u_0 > 0$ و بالتالي : $P(0)$ محققة.

نفرض صحة $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n أي $u_n > 0$ و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي : $u_{n+1} > 0$.

لدينا حسب الفرض $u_n > 0$ ومنه : $\frac{n+2}{2n+2} u_n > 0$ أي : $u_{n+1} > 0$ إذن $P(n+1)$ محققة.

الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي $n, u_n > 0$.

ب تبيان أن المتتالية (u_n) متناقصة، ثم استنتاج أنها متقاربة :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+2}{2n+2} u_n - u_n = u_n \left(\frac{n+2}{2n+2} - 1 \right) = u_n \left(\frac{-n}{2n+2} \right)$$

ومنه : $u_{n+1} - u_n \leq 0$ و بالتالي المتتالية (u_n) متناقصة.

المتتالية (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل إذن هي متقاربة.

2 1 اثبات أن (v_n) متتالية هندسية :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n+2} = \frac{\frac{n+2}{2n+2} u_n}{n+2} = \frac{u_n}{2n+2} = \frac{u_n}{2(n+1)} = \frac{1}{2} v_n$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ,

اذن (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ و حدّها الأول : $v_0 = \frac{u_0}{0+1} = 1$

ب كتابة v_n بدلالة n ، ثم استنتاج u_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$

لدينا : $v_n = \frac{u_n}{n+1}$ ومنه : $u_n = (n+1)v_n$ أي : $u_n = \frac{n+1}{2^n}$

ج بيان أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2^n} = 0$ ، ثم استنتاج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\ln\left(\frac{n}{2^n}\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\ln n - n \ln 2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n\left(\frac{\ln n}{n} - \ln 2\right)} = 0$$

استنتاج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{2^n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{2^n} + \frac{1}{2^n}\right) = 0$$

3 1 بيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n - u_{n+1} = \frac{n}{2^{n+1}}$:

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_n - u_{n+1} = \frac{n+1}{2^n} - \frac{n+2}{2^{n+1}} = \frac{2(n+1) - n - 2}{2^{n+1}} = \frac{n}{2^{n+1}}$$

ب استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = 1 - u_n$ ، ثم حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n - u_{n+1} = \frac{n}{2^{n+1}}$ ومنه :

$$S_n = 1 - u_{n+1} \text{ أي } S_n = u_0 - u_{n+1} \text{ و بالجمع نجد : } \begin{cases} u_0 - u_1 = 0 \\ u_1 - u_2 = \frac{1}{2^2} \\ u_2 - u_3 = \frac{2}{2^3} \\ \vdots \\ u_n - u_{n+1} = \frac{n}{2^{n+1}} \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \text{ لأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$$

حل المبرس الرابع : (07 نقاط)

x	$-\infty$	$-5/4$	1
$g'(x)$	$-$	0	$+$

(I) 1 1 إشارة $g'(x)$:

لما : $x \in [-\frac{5}{4}; +\infty[$: g متزايدة تماما

لما : $x \in]-\infty; -\frac{5}{4}]$: g متناقصة تماما.

A تمثل نقطة انعطاف لـ C ، تعيين العددين a و b :

لدينا : $g'(x) = (ax + a + b)e^x$

$$b = 1 \text{ و } a = 4 \text{ : ومنه } \begin{cases} -\frac{a}{4} + b = 0 \\ a + b = 5 \end{cases} \text{ أي : } \begin{cases} g'(-\frac{5}{4}) = 0 \\ g(0) = 5 \end{cases}$$

2 1 حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ ، ثم تشكيل جدول تغيرات الدالة g على المجال $] -\infty; 1]$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (4xe^x + e^x - 1) = -1$$

لدينا : $g'(x) = (4x + 5)e^x$

x	$-\infty$	$-5/4$	1
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	-1	-2.15	12.6

ب حساب $g(0)$ ثم استنتاج اشارة $g(x)$ على المجال $] -\infty; 1]$:

لدينا : $g(0) = 0$, اشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	0	1
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II)

1 1 حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 4xe^x + 3e^x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - y) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-4xe^x + 3e^x) = 0$$

$\mathcal{C}$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y = x$.

ب دراسة وضعية المنحنى $(\mathcal{C})$ بالنسبة للمستقيم (Δ) :

اشارة : $f(x) - y = e^x(-4x + 3)$

x	$-\infty$	$3/4$	1
$f(x) - y$	$+$	0	$-$

لما : $x \in] -\infty; \frac{3}{4}[$ (Δ) فوق ($\mathcal{C}$)

لما : $x \in] \frac{3}{4}; 1]$ ($\mathcal{C}$) تحت (Δ)

($\mathcal{C}$) يقطع (Δ) عند $B(\frac{3}{4}; \frac{3}{4})$.

2 1 دراسة اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها :

لدينا :

$$f'(x) = 1 - (4e^x + e^x(4x - 3)) = 1 - (1 + 4x)e^x = -g(x)$$

f متزايدة تماما على $] -\infty; 0]$ و متناقصة تماما على $[0; 1]$.

x	$-\infty$	0	1
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	3	$1 - e$

ب) تبيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث : $-\frac{5}{4} < \alpha < -2$ و $\frac{3}{4} < \beta < 1$:

f مستمرة و متزايدة تماما على $]-2; -\frac{5}{4}[$ و $\begin{cases} f(-2) \approx -0.51 \\ f(-\frac{5}{4}) \approx 1.04 \end{cases}$ أي : $f(-2) \times f(-\frac{5}{4}) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-\frac{5}{4} < \alpha < -2$.

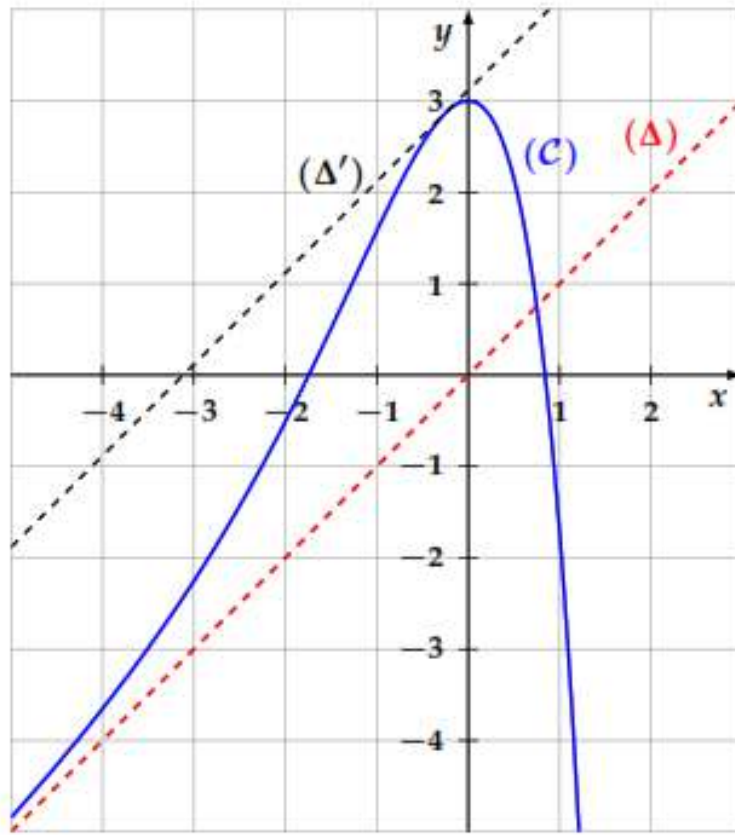
كذلك f مستمرة و متناقصة تماما على $]\frac{3}{4}; 1[$ و $\begin{cases} f(\frac{3}{4}) \approx 0.75 \\ f(1) \approx -1.72 \end{cases}$ أي : $f(\frac{3}{4}) \times f(1) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β حيث $\frac{3}{4} < \beta < 1$.

3) 1) كتابة معادلة لـ (Δ') مماس (C) الذي يوازي (Δ) :

(Δ') يوازي (Δ) يعني أن لهما نفس الميل $f'(x_0) = 1$ ، تكافئ : $1 - e^{x_0}(4x_0 + 1) = 1$ ومنه : $x_0 = -\frac{1}{4}$ معادلة المماس (Δ') :

$$y = 1(x + \frac{1}{4}) + f(-\frac{1}{4}) = x + 4e^{-\frac{1}{4}}$$

الرسم :



ب) المناقشة البيانية :

$(4x - 3)e^x = m$ تكافئ $x - (4x - 3)e^x = x - m$ تكافئ : $f(x) = x - m$ الحل عبارة عن فواصل نقط تقاطع (C) مع المستقيمات المائلة (ميلها 1)

المستقيمات المساعدة هي : $y = x$ ، $y = x + 4^{-\frac{1}{4}}$ و $y = x - e$ (مستقيم ميله 1 ويشمل النقطة $(C(1; 1 - e))$).

• $-m < -e$ أي : $m > e$: لا يوجد حلول.

• $-e \leq -m \leq 0$ أي : $0 \leq m \leq e$: حل وحيد.

• $0 < -m < 4e^{-\frac{1}{4}}$ أي : $-4e^{-\frac{1}{4}} < m < 0$: حلان متميزان.

• $-m = 4e^{-\frac{1}{4}}$ أي : $m = -4e^{-\frac{1}{4}}$: حل وحيد.

• $-m > 4e^{-\frac{1}{4}}$ أي : $m < -4e^{-\frac{1}{4}}$: لا يوجد حلول.

4 ا تبيان أنه من أجل كل x من المجال $]-\infty; 1]$ فإن : $h(x) = 2h'(x) - h''(x)$

$$h''(x) = (4x + 5)e^x, h'(x) = (4x + 1)e^x, h(x) = (4x - 3)e^x$$

$$h(x) = 2h'(x) - h''(x) \text{ : ومنه}$$

ب استنتاج دالة أصلية للدالة h على المجال $]-\infty; 1]$ ، والتي تنعدم عند 0 :

$$h(x) = 2h'(x) - h''(x) \text{ ومنه : } H(x) = 2h(x) - h'(x) + c \text{ مع } c \in \mathbb{R} \text{ (دالة أصلية لـ } h \text{)}$$

$$H(x) = (4x - 7)e^x + c \text{ مع } c \in \mathbb{R} \text{ ومنه}$$

$$H(0) = 0 \text{ : لدينا } H(x) = (4x - 7)e^x + 7$$

ج حساب مساحة الخيز المحدد بالمنحنى (C) ، (Δ) ، محور الترتيب والمستقيم ذو المعادلة $x = -1$:

$$A = \int_{-1}^0 (f(x) - y) dx = \int_{-1}^0 -(4x - 3)e^x dx$$

$$= [-H(x)]_{-1}^0 = [H(x)]_0^{-1} = (7 - \frac{11}{e}) u.a.$$

$$A \approx 2.95 u.a.$$