

على المترشح ان يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 9 كريات متماثلة ولا تفرق بينها باللمس ، موزعة كما يلي : خمس كريات حمراء مرقمة ب : 1 ، 1 ، 2 ، 2 ، 2 ، و ثلاث كريات خضراء مرقمة ب : -3 ، 2 ، 3 و كرية بيضاء مرقمة ب : -1 .
نسحب عشوائيا و في آن واحد أربع كريات من هذا الكيس
(1) احسب احتمال الأحداث التالية :

✓ A " الكريات المسحوبة من ألوان مختلفة " ، ✓ B " الحصول على كرية بيضاء على الأكثر " ✓ C " الحصول على أربع كريات مجموع أرقامها معدوم "

(2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرقب بكل عملية سحب عدد الكريات الخضراء المتبقية في الكيس .

✓ أ . عيّن قيم المتغير العشوائي X ، ثم عرّف قانون احتماله .

✓ ب . أحسب الأمل الرياضي E(X) للمتغير العشوائي X ، ثم استنتج E(2026X - 3375) .

✓ (3) نسحب الآن من الكيس أربع كريات على التوالي بإرجاع ، بيّن أن احتمال الحصول على ثلاث كريات خضراء على الأقل هو $\frac{1}{9}$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

في الشكل المقابل (C_f) التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $]-2; +\infty[$ ب : $f(x) = \frac{3x+2}{x+2}$

و المستقيم (d) ذا المعادلة $y = x$.

(u_n) المتتالية المعرفة ب : $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

✓ (1) أنقل الشكل المقابل و مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3

دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء، ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير (u_n) و تقاربها

✓ (2) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n < 2$.

✓ ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة .

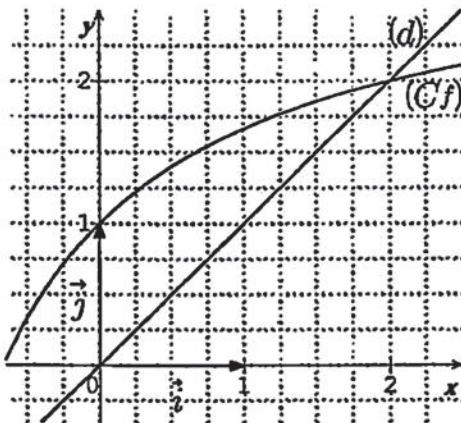
(3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$.

✓ أ) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ يُطلب تعيين حدّها الأول .

✓ ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n و أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

✓ (4) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ، ثم استنتج الجداء P_n حيث :

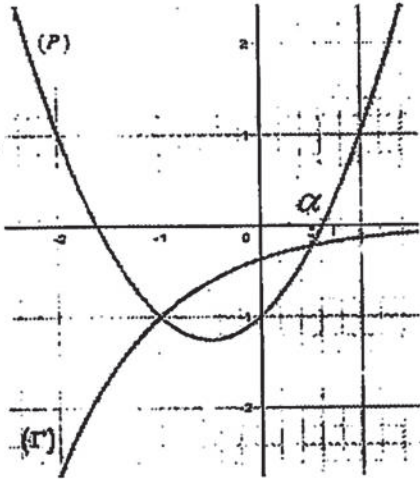
$$P_n = e^{\frac{3}{u_0+1}} \times e^{\frac{3}{u_1+1}} \times e^{\frac{3}{u_2+1}} \times \dots \times e^{\frac{3}{u_n+1}}$$



التمرين الثالث: (05 نقاط)

- (1) نعتبر المعادلة: $2024x - 1444y = 24 \dots (E)$ حيث x و y عدنان صحيحان .
 أ- احسب $PGCD(2024; 1444)$ ، ثم بين أن المعادلة (E) تقبل حولا في $\mathbb{Z}^2$.
 ب- عين الحل الخاص $(x_0; y_0)$ للمعادلة (E) الذي يحقق: $y_0 - x_0 = 4$ ، ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) .
 (2) أ- جد القيم الممكنة لـ $PGCD(x; y)$ حيث $(x; y)$ حل المعادلة (E) .
 ب- عين الثنائيات $(x; y)$ من $\mathbb{N}^2$ حلول المعادلة (E) حيث $PGCD(x; y) = 6$.
 (3) نضع: $u_n = 361n + 16$ و $v_n = 506n + 10$ حيث n عدد طبيعي .
 بين أن الحدود المشتركة للمتاليين (u_n) و (v_n) تشكل متتالية حسابية أساسها 182666 و حدّها الأول 5070 .
 (4) أ- حلّ العدد 1445 إلى جداء عوامل أولية ثم استنتج الأعداد الطبيعية التي مربع كل منها يقسم 1445 .
 ب- عين كل الثنائيات $(a; b)$ من $\mathbb{N}^2$ التي تحقق: $m^2 - 4d^2 = 1445$ مع $d = PGCD(a; b)$ و $m = PPCM(a; b)$

التمرين الرابع: (07 نقاط)



I. المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(Gamma) التمثيل البياني للدالة: $x \mapsto e^{-x-1}$ ، (P) التمثيل البياني للدالة: $x \mapsto x^2 + x - 1$

α و -1 هما فاصلتا نقطتي تقاطع (Gamma) و (P) حيث $0.5 < \alpha < 0.6$

(1) بقرأة بيانية حدد وضعية المنحنى (Gamma) بالنسبة لـ (P) على $\mathbb{R}$.

(2) g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x و المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$g(x) = x^2 + x - 1 + e^{-x-1}$$

* حدد إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x .

II. f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x + 1 - (x^2 + x)e^{-x-1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني.

(1) أ- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و بين أن $f(x) > 0$.

ب- بين أن (D) إذا المعادلة: $y = x + 1$ مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$. أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (D) .

(2) أ- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = g(-x)e^{-x-1}$.

ب- بين أن الدالة f متناقصة على $[-\alpha; 1]$ و متزايدة على كل من $[-\infty; -\alpha]$ و $[1; +\infty]$ ثم شكّل جدول تغيراتها .

(3) أ- بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلّب تعيين إحداثياتها .

ب- بين أن $y = (1-e)x + 1$ هي معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0 .

(4) أ- أنشئ كل من (D) ، (T) و (C_f) . نأخذ $f(-1) = 0$ ، $f(-\alpha) \approx 1,6$.

ب- m وسيط حقيقي ، عين قيم العدد الحقيقي m حتى تقبل المعادلة: $f(x) = mx + 1$ ثلاث حلول .

(5) أ- بين أن الدالة H المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $H(x) = -(x^2 + 3x + 3)e^{-x-1}$ دالة أصلية للدالة h المعرفة بـ :

$$h(x) = (x^2 + x)e^{-x-1} \text{ على } \mathbb{R}$$

ب- استنتج مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $y = x + 1$ ، $x = 0$ و $x = 2$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

يُراد تشكيل لجنة تضم رئيسا و نائبا له و أميناً من بين أربعة رجال H_1, H_2, H_3, H_4 وثلاث نساء F_1, F_2, F_3 .

(1) ما هو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها ؟

(2) نعتبر الأحداث التالية :

A : "اللجنة من نفس الجنس" B : "الرئيس رجل و الأمين امرأة"

C : " H_4 هو رئيس اللجنة" D : "اللجنة لا تضم H_4 و F_3 معا"

أ- احسب الاحتمالين $P(A)$ و $P(B)$.

ب- احسب $P(C)$ و تحقق ان $P(D) = \frac{6}{7}$ ، ثم بين ان $P(C \cup D) = \frac{19}{21}$.

(3) نعتبر الآن اللجنة دون مهام ، و ليكن المتغير العشوائي X الذي يُرفق بكل لجنة عدد النساء فيها .

أ- عين قانون احتمال X ثم احسب $E(X)$ أمله الرياضي.

ب- احسب احتمال الحدث : " $e^X \ln X \geq 1$ ".

التمرين الثاني: (04 نقاط)

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة ذات المجهول z : $(z+2)(z^2-2z+4)=0$.

II. المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A, B, C التي لواحقها على الترتيب

$$z_A = 1+i\sqrt{3}, \quad z_B = \overline{z_A}, \quad z_C = -2.$$

(1) اكتب كل من الأعداد z_A, z_B, z_C على الشكل الأسّي ، ثم استنتج أن النقط A, B, C تنتمي الى نفس الدائرة يُطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .

(2) عين قيمة العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ حقيقي .

(3) اكتب العدد المركب $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ على الشكل الأسّي ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC مع التعليل ، ثم احسب مساحته.

(4) لنكن M نقطة من المستوي ذات اللاحقة z

أ- عين (Γ_1) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $\bar{z} = k e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ و k يسمح $\mathbb{R}$.

ب- عين (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق : $|iz - 1 - i| = 3$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(1) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7 .

(2) أ- عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق $5^{2n} + 5^n \equiv 0[7]$.

ب- عين الأعداد الطبيعية n حتى يكون العدد $(2025^{1447} + 5^{6n+4} + 4n^2 + 1962)$ مضاعف لـ 7 .

(3) A عدد طبيعي يكتب $\overline{\alpha\beta\beta 00}$ في نظام التعداد ذي الأساس 5، حيث α و β عدنان طبيعيان و $0 < \beta < \alpha$.

جد α و β حتى يكون $A \equiv 2[7]$ ، ثم اكتب A في النظام العشري

- (4) أ) احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث : $S_n = 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n$.
 ب) تحقق أن $4S_n = 5^{n+1} - 1$ ، ثم استنتج أن $\text{PGCD}(S_n; 5^n) = 1$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = -\frac{2}{x} + 1 + \ln x$.

1) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .

2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.4 < \alpha < 1.5$

3) حدّد إشارة $g(x)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x+1)$ على المجال $] -1; +\infty[$.

(II) f الدالة العددية المعرفة على المجال $] -1; +\infty[$ بـ : $f(x) = (x-1)\ln(x+1) + 1$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، (وحدة الطول هي 2cm) .

1) احسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا .

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = g(x+1)$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

ت) بين أن $f(\alpha-1) = 5 - \alpha - \frac{4}{\alpha}$ ، ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha-1)$.

3) ليكن x_0 عددا حقيقيا من المجال $] -1; +\infty[$ و (T_{x_0}) مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصل x_0 .

و لتكن الدالة h المعرفة المعرفة على المجال $] -1; +\infty[$ بـ : $h(x) = f(x) - [f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)]$.

أ) ادرس اتجاه تغير الدالة على المجال $] -1; +\infty[$.

ب) عيّن إشارة $h(x)$ على $] -1; +\infty[$ ، ثم استنتج الوضع النسبي لـ (C_f) و (T_{x_0}) .

ت) اعط معادلة لـ (T_0) .

ث) أنشئ كلا من (T_0) و (C_f) على المجال $] -1; 3[$ (نأخذ $f(\alpha-1) \approx 0.8$) .

4) أ) تحقق أنه من أجل كل x من المجال $] -1; +\infty[$: $\frac{x^2-2x}{x+1} = x - 3 + \frac{3}{x+1}$.

ب) باستعمال التكامل بالتجزئة احسب العدد : $\int_0^1 (x-1)\ln(x+1) dx$.

ت) احسب بـ cm^2 مساحة الحيز المحدّد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (T_0) و المستقيمين اللذين معادلتهما

$x = 1$ و $x = 0$.