الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
مديرية التربية لولاية مستغانم
ثانوية العربي عبد القادر – بوقيرات
امتحان بكالوريا التجريبي التعليم الثانوي **دورة :ماي 2025**
الشعبة : تقني رياضي

اختبار في مادة الرياضيات **المدة : 04 سا و 30 د**

على المترشح إختيار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضـــوع الأول

التمرين الأول:(04.5 نقطة)

1. نعتبر في IZ^2 المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$ حيث : $5x-4y=12...(E)$.
- بيّن أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإنّ $y\equiv 2[5]$ ثم حل المعادلة (E)
2. نضع $p\gcd(x;y)=d$ و $ppcm(x;y)=m$ حيث $(x;y)$ حلول المعادلة (E) .
- جد القيم الممكنة لـ d ثمّ عيّن الثنائيات $(x;y)$ والتي تحقق $d=4$ و $m=572$.
3. أ-أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 11 .
ب- أحسب باقي قسمة العدد $\left(2\times 2025^{1446}+2023^{1444}\right)^{2024}$ على 11.
ج- عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $2025^{5x}\times 1444^{4y+20}+2n\equiv 0[11]$ حيث $(x;y)$ حلول المعادلة (E) .
4. أ-بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n $9n\times 2027^{2n+1}-8^{2n+3}\equiv (n+1)3^{2n+3}[11]$.
ب-عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $9n\times 2027^{2n+1}-8^{2n+3}\equiv 0[11]$.

التمرين الثاني : (04.5 نقطة)

الدالة f المعرفة على $]3;+\infty[$ بـ: $f(x)=3+\sqrt{x-3}$ ، (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ ، (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$ أنظر الشكل (الوثيقة المرفقة) .

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_0=8$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$.

1. أ) مثّل الحدود الأربعة u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 على محور الفواصل مبرزا خطوط الإنشاء
ب) خمّن اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.
2. أ) برهن بالتراجع أنّه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n>4$.
ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنّها متقاربة .
3. لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة على IN بـ: $v_n=\ln\left(\ln(u_n-3)\right)$.
أ- أثبت أنّ المتتالية (v_n) حسابية أساسها $r=-\ln(2)$ يطلب حساب حدها الأول v_0 .
ب- عبّر عن v_n بدلالة n ثمّ بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=e^{\frac{\ln 5}{2^n}}+3$ وأحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$
4. ليكن المجموعين S_n و T_n المعرفين على IN بـ: $S_n=\ln(u_n-3)+\ln(u_{n+1}-3)+...+\ln(u_{n+2025}-3)$ و $T_n=10^{v_0}+10^{v_1}+...+10^{v_n}$ ، أحسب بدلالة n المجموعين S_n و T_n .

التمرين الثالث : (04 نقاط)

يحتوي صندوق غير شفاف على 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس منها كرتين تحملان الرقم 1 وثلاث كريات تحمل الرقم 2 وكرتين تحمل الرقم 3 وكرتين تحمل الرقم 5 وكرية تحمل الرقم 4 .
نسحب من الكيس كرتين في آن واحد .

1) نعتبر الأحداث الآتية : A "الحصول على كرتين مجموع رقميهما يساوي 6 " ،
B " الحصول على كرتين جداء رقميهما مضاعف لـ 2 "
C " الحصول على كرتين رقميهما أوليان فيما بينهما "

أ- أحسب $P(A)$ و $P(B)$ و $P(C)=\frac{37}{45}$.

ب- بيّن أن : $P(A\cap C)=\frac{4}{45}$ ثم استنتج $P\left(\overline{A\cup C}\right)$.

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب لكرتين ، القاسم المشترك الأكبر للرقمين المسجلين عليهما .

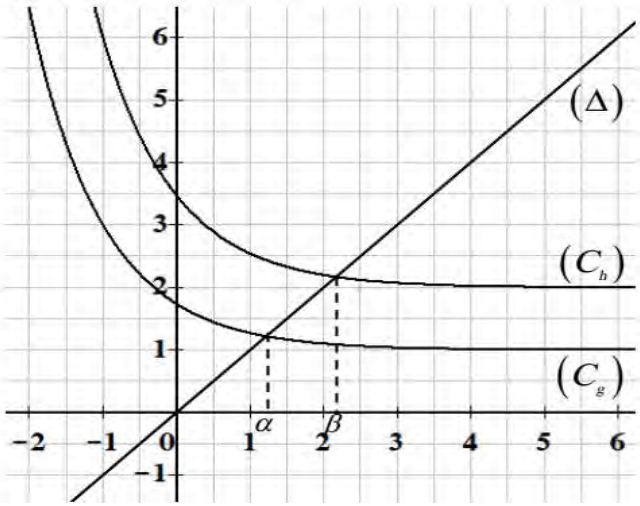
أ- برّر أنّ قيم المتغير العشوائي X هي $\{1;2;3;5\}$.

ب-عرّف قانون إحتمال المتغير العشوائي X ثمّ أحسب الأمل الرياضياتي $E(150X+1835)$.

3) نعيد الكيس إلى وضعه الأول ونضيف له كرية تحمل الرقم 0 ثم نسحب منه أربع كرات على التوالي دون الإرجاع .

– أحسب إحتمال الحصول على أربع كرات أرقامها تشكل العدد 2025 "

التمرين الرابع : (07 نقاط)



I. التمثيلان البيانيان (Cg) و(Ch) للدالتين g و h المعرفتين على IR بـ: $g(x)=1+2e^{-x-1}$ و $h(x)=2g(x)$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$ كما هو موضح في الشكل المقابل .

1. بقراءة بيانية ، حدّد وضعية كلا من (Cg) و(Ch) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

2. أ) استنتج إشارة كلا من $\left[g(x)-x\right]$ و $\left[h(x)-x\right]$ حسب قيم العدد الحقيقي x

ب) تحقق أنّ $1.2<\alpha<1.3$ أنّ $2.1<\beta<2.2$

II. لتكن الدالة العددية f المعرفة على IR بـ:

$f(x)=e^{-x}\left(x-e^{-x-1}+e^{x-1}\right)$ و (Cf) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ثم فسّر النتيجة هندسيا وأحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

2. أ) تحقق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم ، $\frac{f(x)}{x}=e^{-x}+2e^{-1}\left(\frac{e^{-2x}-1}{-2x}\right)$.

ب) أحسب $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ ماذا تستنتج ؟ فسّر النتيجة هندسيا .

ج) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (Cf) عند المبدأ .

3. أ) بيّن أنّه من من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=\left[g(x)-x\right]e^{-x}$.

ب) أدرس إتجاه تغير الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيراتها .

4. بيّن أنّه من من أجل كل عدد حقيقي x ، $f''(x)=\left[x-h(x)\right]e^{-x}$ ثمّ عيّن إحداثيات نقطة إنعطاف للمنحنى (Cf) .

5. أ) أرسم المنحنى (Cf) والمماس (T) (يعطى $f(\beta)=0.6$ و $f(\alpha)=0.7$)

ب) عيّن قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $f(x)=mx$ حلين أحدهما معدوم والأخر موجب تماما .

6. أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب $\int_0^{\alpha}xe^{-x}dx$.

ب) استنتج مساحة الحيّز المستوي المحدّد $A(\alpha)$ بالمنحى (Cf) ومحور الفواصل والمستقيمين الذين معادلتيهما $x=0$ و $x=\alpha$

انتهى الموضوع الأول

الموضـــوع الثـــانـي :

التمرين الأول : (04 نقاط)

أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل :

1. الجذرين التربيعيين للعدد المركب $Z = 5 - 12i$ هما $4 - 3i$ و $-4 + 3i$.
2. الشكل الأسي للعدد المركب $z = -\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ هو $z = e^{-\frac{\pi}{12}i}$.
3. قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد المركب $\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^n$ حقيقيا موجبا هي $n = 8k$ و k عدد طبيعي .
4. Z عدد مركب حيث $Z = 5\sqrt{3} + 5i$ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = 1 + |Z| + |Z|^2 + ... + |Z|^n$

- عبارة المجموع S_n بدلالة n هي $S_n = \frac{10^{n+1} - 1}{9}$.

التمرين الثاني : (04.5 نقاط)

I. لتكن المعادلة (E_n) ذات المجهولين الصحيحين x و y الآتية : $182x - 65y = 9^n - 130n - 1$ مع n عدد طبيعي .

1. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 13 .
2. عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n حتى تقبل المعادلة (E_n) حلولا في $IZ \times IZ$.

II. نضع $n = 3$

1. أ) عيّن الحل الخاص $(x_0; y_0)$ للمعادلة (E_3) حيث $x_0 + y_0 = 10$ ، ثمّ حل المعادلة (E_3).

ب) عيّن الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E_3) حيث $|y - 2x| = 2$

2. N عدد طبيعي يكتب $\overline{1\delta\gamma 5}$ في النظام ذي الأساس 9 ويكتب $\overline{2\beta\alpha 5}$ في النظام ذي الأساس 8 .

- عيّن قيمة α ، β ، γ ، δ ثم أكتب $N + 1$ في النظام العشري علما أنّ $\gamma = \beta + 1$ و $\delta = 2\alpha$.

3. نضع $pgcd(a;b) = d$ و $ppcm(a;b) = m$.

أ) حلّل العدد 2025 إلى جداء عوامل أولية واستنتج الأعداد الطبيعية التي مكعب كل منها يقسم 2025 .

ب) عيّن كل الثنائيات $(a : b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق $m^3 - 50d^3 = 2025$

التمرين الثالث : (04.5 نقطة)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على بـ: $u_0 = -3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}$.

1. أ) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 1$.

ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثمّ برّر تقاربها .

2. لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة على IN بـ: $v_n = e^{\frac{4}{1-u_n}}$

أ) بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = e^4$ يطلب تعيين حدها الأول v_0 .

ب) أكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n ثمّ أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

ج) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \ln(v_0) + \ln(v_1) + ... + \ln(v_n)$

3. أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11 .

ب) عيّن قيمة العدد الطبيعي n حتى يكون : $\begin{cases} S_n + 7n^2 - 2n - 2026^{2025} \equiv 0 [9] \\ 2023 < n < 2026 \end{cases}$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I. الشكل المقابل يمثل جدول تغيرات الدالة g

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$
$g(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=-\frac{1}{x^3}-1+6\ln x$.

1. أ- بيّن انّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $1.2<\alpha<1.3$

ب- أدرس إشارة $g(x)$ حسب قيم x من $]0;+\infty[$ ثمّ استنتج إشارة $g\left(\frac{1}{x}\right)$.

II. لتكن الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=-x+1+\frac{2+3\ln x}{x^2}$ ، وليكن (Cf) تمثيلها البياني في المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

2. أ) بيّن انّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ أنّه : $f'(x)=\frac{1}{x^3}g\left(\frac{1}{x}\right)$.

ب) أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

3. أحسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+x-1\right]$ ثم استنتج أن (Cf) يقبل مستقيم مقارب (Δ) .

4. أدرس وضعية المنحنى (Cf) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

5. ليكن المماس (T) معادلته $y=-x+1+\frac{3}{2}\sqrt[3]{e}$ عند نقطة ذات الفاصلة x_0 ، أحسب x_0 .

6. أرسم كل من (T) ، (Δ) ، (Cf) ($f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=2.28$ ، $\frac{1}{\alpha}\approx 0.78$) .

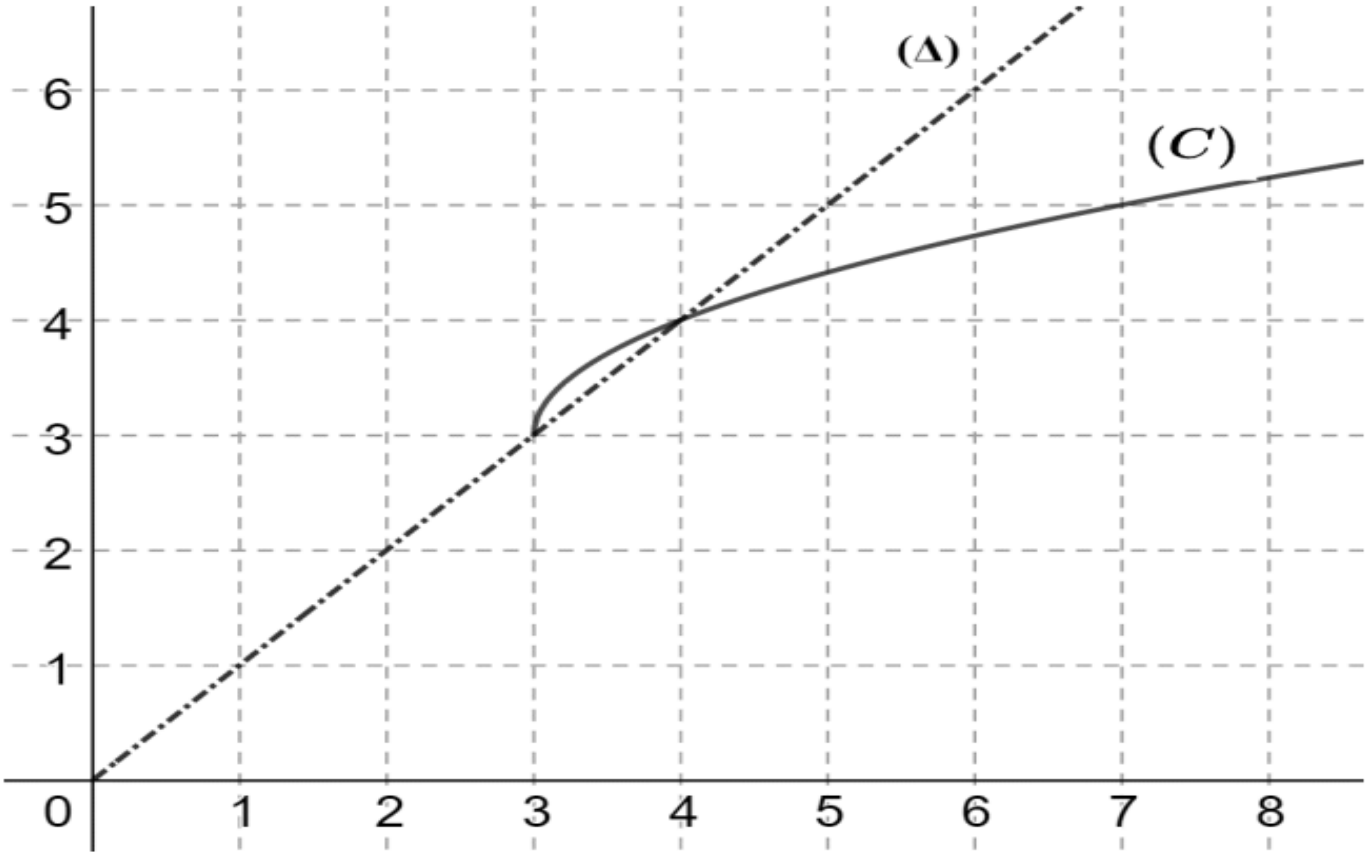
7. عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $f(x)=-x+e^m$ حلين متمايزين .

III. من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $u_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\left[f(x)+x-1\right]dx$.

- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n>0$ ثمّ فسّر هندسيا قيمة u_0 .
- باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب $\int_{e^n}^{e^{n+1}}\frac{3\ln x}{x^2}dx$ ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n .
- نضع $S_n=u_0+u_1+...+u_n$.أحسب S_n بدلالة n.

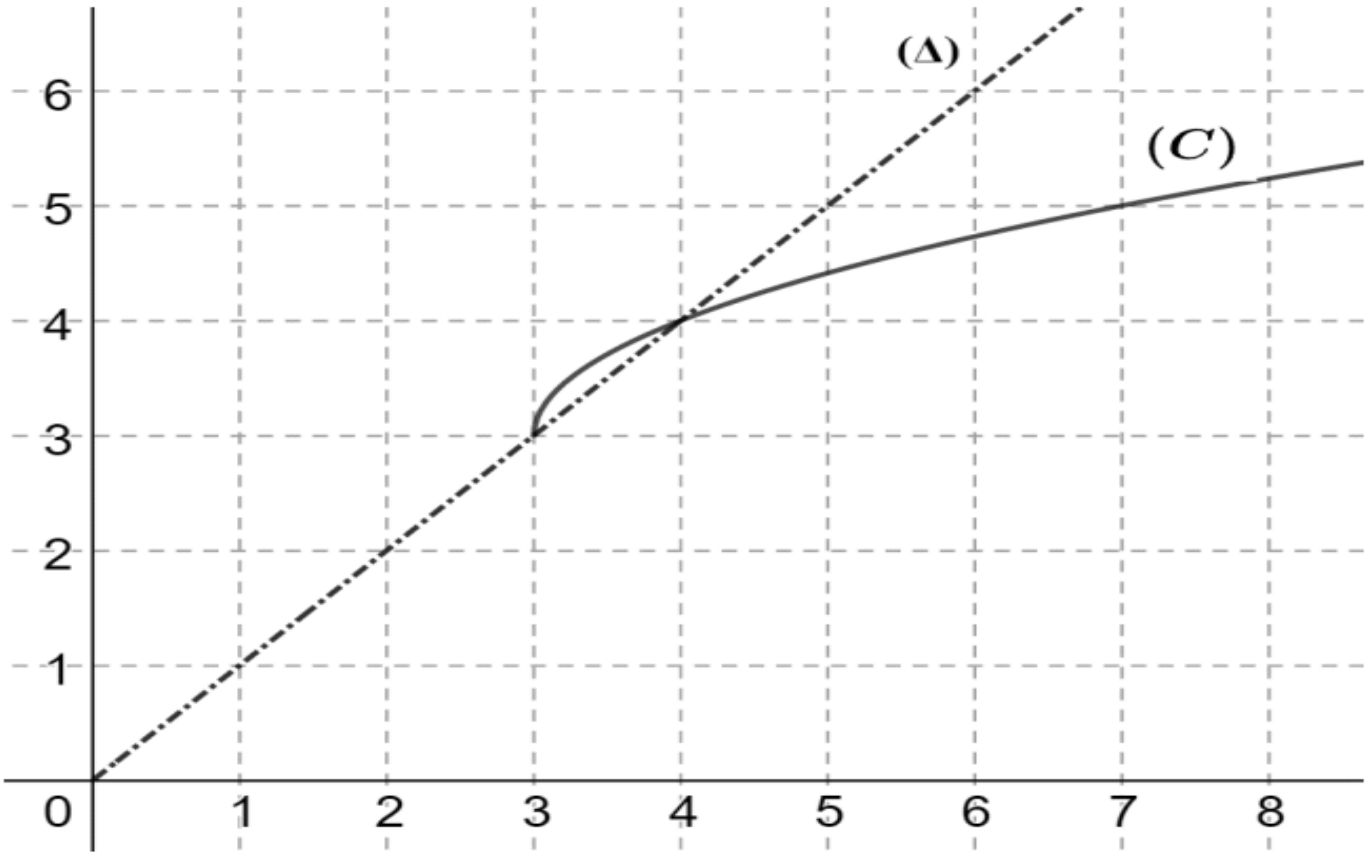
انتهى الموضوع الثاني

الإسم واللقب : .....



.....

الإسم واللقب : .....



التصحيح النموذجي لمادة الرياضيات لإمتحان التجريبي لشعبة 3 ت ر

الموضوع الأول :

التمرين الأول : (4,50 نقطة)

1- $5x - 4y = 12 \dots (E)$

- حل المعادلة (E) معناه : $(x;y)$

$4y = 5x - 12$ ومنه : $4y \equiv -12 [5]$ و $4 \wedge 5 = 1$

ومنه : $y \equiv -3 [5]$ ومنه : $y \equiv 2 [5]$

بما أن : $y = 5k + 2$ مع k عدد صحيح

بالتعويض في (E) نجد :

$5x - 4 \times 5k - 8 = 12$

$5x = 4 \times 5k + 20$

معناه : $5x = 4 \times 5k + 5 \times 4$

$x = 4k + 4 \; ; k \in \mathbb{Z}$

معناه :

$S = \{ (4k+4 ; 5k+2) ; k \in \mathbb{Z} \}$

2- $d = PGCD(x;y)$; $m = PPCM(x;y)$

- معناه : $d = PGCD(x;y)$

ومنه : $\begin{cases} d | x \\ d | y \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} d | 5x \\ d | 4y \end{cases}$ ومنه :

ومنه : $d | 5x - 4y$ ومنه : $d | 12$

$d \in \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$

تعيين الثنائيات $(x;y)$ حيث $d = 4$; $d = 572$

معناه : $x.y = m \times d$ معناه :

$(4x+4)(5k+2) = 4 \times 572$

$20k^2 + 28k + 8 - 2288 = 0$

$20k^2 + 28k - 2280 = 0$

$5k^2 + 7k - 570 = 0$

$\Delta = 49 - 4(5)(-570) = 11449 > 0$

معناه : $k = \frac{-7+107}{10} = \frac{100}{10} = 10$

أو $k = \frac{-7-107}{10} = \frac{-114}{10} = -\frac{57}{5} \notin \mathbb{Z}$.

$(x;y) = (44; 52)$

3- أ- دراسة بواقي قسمة 3^n على 11 :

$3^0 \equiv 1 [11]$; $n=0$; $3^1 \equiv 3 [11]$; $n=1$

$3^2 \equiv 9 [11]$; $n=2$; $3^3 \equiv 5 [11]$; $n=3$

$3^4 \equiv 4 [11]$; $n=4$; $3^5 \equiv 1 [11]$; $n=5$

بواقي قسمة 3^n على 11 متتالية دورية دورها 5

n حسب	$5k$	$5k+1$	$5k+2$	$5k+3$	$5k+4$
$3^n \equiv [11]$	1	3	9	5	4

k عدد طبيعي.

ب- $2 \times 2025^{1446} \equiv 2 [5]$ ومنه $2025 \equiv 1 [11]$

و $2023^{1444} \equiv 1 [11]$ ومنه $2023 \equiv -1 [11]$ و $2023 \equiv 10 [11]$

ومنه :

$2 \times 2025^{1446} + 2023^{1444} \equiv 3 [11]$

ومنه : $(2 \times 2025^{1446} + 2023^{1444})^{2024} \equiv 3^{2024} [11]$

$2024 = 5(404)+4$; $3^{2024} \equiv 4 [11]$

ومنه : $(2 \times 2025^{1446} + 2023^{1444})^{2024} \equiv 4 [11]$

باقي قسمة 4^{2024} على 11 هو باقي قسمة $(2 \times 2025^{1446} + 2023^{1444})^{2024}$ على 11

ج- $1444^{4y+20} \equiv 3^{4y+20} [11]$ ومنه و $1444 \equiv 3 [11]$

$4y + 20 = 20k + 28$

$= 5(4k+5)+3$

$3^{4y+20} \equiv 5 [11]$

ومنه : $2025^{5k} \equiv 1 [11]$ و $1444^{4k+20} \equiv 5 [11]$

ومنه : $2025^{5k} \times 1444^{4k+2} \equiv 5 [11]$

ومنه : $2n \equiv -5 [11]$ أي $5 + 2n \equiv 0 [11]$

ومنه : $2n \equiv 6 [11]$ ومنه : $n \equiv 3 [11]$; $2 \wedge 11 = 1$

أي $n = 11p + 3 ; p \in \mathbb{N}$

4- أ- $2027 \equiv 3 [11]$ ومنه : $2027^{2n+1} \equiv 3^{2n+1} [11]$

ومنه : $9n \times 2027^{2n+1} \equiv n \times 3^2 \cdot 3^{2n+1} [11]$

$9n \times 2027^{2n+1} \equiv n \cdot 3^{2n+3} [11]$

لدينا : ومنه $8 \equiv -3 [11]$ ومنه $8^{2n+3} \equiv -3^{2n+3}$

$9n \times 2027^{2n+1} - 8^{2n+3} \equiv n \cdot 3^{2n+3} + 3^{2n+3} [11]$

$9n \times 2027^{2n+1} - 8^{2n+3} \equiv (n+1) 3^{2n+3} [11]$

ب- $9n \times 2027^{2n+1} - 8^{2n+3} \equiv 0 [11]$

ومنه : $3^{2n+3}(n+1) \equiv 0 [11]$ ، $(3^{2n+3} \wedge 11 = 1)$ ومنه :

$n + 1 \equiv 0 [11]$

$n \equiv -1 [11]$

$n \equiv 10 [11]$

$n = 11p' + 10 ; p' \in \mathbb{N}$

Scanné avec CamScanner

التمرين الثاني : (6,50 نقطة)

$f(x) = 3+\sqrt{x-3}$; $D = [3;+\infty[$

1- أ) تمثيل الحدود u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 .

ب) المتتالية (u_n) متناقصة تماما ومتقاربة نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع (Δ).

2- أ- من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $P(n)$: $u_n > 4$

* من أجل $n=0$: $8 > 4$ أي $u_0 > 4$ وعليه $P(0)$ صحيحة.

* نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل n عدد طبيعي وثبت صحتها من أجل $n+1$.

لدينا : $u_n > 4$ و عليه : $f(u_n) > f(4)$

(f متزايدة تماما) وعليه : $u_{n+1} > 4$

وعليه $P(n+1)$ صحيحة.

من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n > 4$.

ملاحظة : يمكن استعمال الحصر.

ب- من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = 3+\sqrt{u_n-3} - u_n$$

$$= \frac{(\sqrt{u_n-3}+3-u_n)(\sqrt{u_n-3}-3+u_n)}{\sqrt{u_n-3}-3+u_n}$$

$$= \frac{u_n-3-(3-u_n)^2}{\sqrt{u_n-3}+u_n-3} = \frac{(3-u_n)(-1-3+u_n)}{\sqrt{u_n-3}+u_n-3}$$

$$= \frac{(3-u_n)(u_n-4)}{\sqrt{u_n-3}+u_n-3}$$

n	4	$+\infty$
$u_{n+1}-u_n$	$\|\|$	$-$

المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

الإستاج : (u_n) متقاربة لأنها محدودة من الأسفل ومتناقصة تماما.

3- $v_n = \ln\left|\ln(u_n-3)\right|$; $n \in \mathbb{N}$

أ- من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = \ln\left[\ln(u_{n+1}-3)\right]$$

$$= \ln\left[\ln\left|\sqrt{u_n-3}\right|\right] = \ln\left[\frac{1}{2}\ln(u_n-3)\right]$$

$$= \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left|\ln(u_n-3)\right| = -\ln 2 + v_n$$

أي : المتتالية (v_n) حسابية أساسها $r=-\ln 2$ وحدها الأول

$v_0 = \ln\left|\ln(u_0-3)\right| = \ln(\ln 5)$

ب- عبارة v_n بدلالة n :

$v_n = v_0 + nr = \ln(\ln 5) - n\ln 2$; $n \in \mathbb{N}$

من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_n = \ln\left|\ln(u_n-3)\right|$

وعليه : $e^{v_n} = \left|\ln(u_n-3)\right|$ أي $e^{v_n} = \ln(u_n-3)$

$$e^{\ln\ln 5 + n\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = \ln(u_n-3)$$

وعليه :

$$e^{\ln\left[\ln 5\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]} = \ln(u_n-3)$$

وعليه :

$$\frac{\ln 5}{2^n} = \ln(u_n-3)$$

وعليه :

$$u_n - 3 = e^{\frac{\ln 5}{2^n}}$$

$$u_n = 3 + e^{\frac{\ln 5}{2^n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(3+e^{\frac{\ln 5}{2^n}}\right) = 3+1 = 4$$

$\frac{\ln 5}{2^n} \to 0$

$$S_n = \ln(u_n-3) + \ln(u_{n+1}-3) + \cdots + \ln(u_{n+2025}-3)$$

$$= e^{v_n} + e^{v_{n+1}} + \cdots + e^{v_{n+2025}}$$

$$= \ln 5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n + \ln 5\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \cdots + \ln 5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2025}$$

$$= \ln 5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2026}}{1-\frac{1}{2}}\right]$$

$$S_n = 2\ln 5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2026}\right)$$

$$T_n = 10^{v_0} + 10^{v_1} + \cdots + 10^{v_n}$$

$w_n = 10^{v_n} = 10^{\ln(\ln 5) + n\cdot\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = 10^{\ln(\ln 5)}\cdot 10^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)n}$

$= 10^{\ln(\ln 5)} \times \left(10^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}\right)^n$

$10^{-\ln 2}$ و $10^{\ln(\ln 5)}$ حدها الأول

$$T_n = 10^{\ln(\ln 5)}\cdot\frac{(10^{-\ln 2})^{n+1}-1}{10^{-\ln 2}-1}$$

التمرين الثالث : (04 نقاط)

1- أ-

$$P(A) = \frac{C_1^1\times C_3^1 + C_2^2 + C_2^1\times C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{8}{45}$$

③③ أو ⑤① أو ④②

$$P(B) = \frac{C_4^2 + C_4^1\times C_6^1}{C_{10}^2} = \frac{6+24}{45} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}.$$

ب- نكافئ : الحصول على جيتون من نوعين مختلفين.

$$P(C) = \frac{C_2^2 + C_2^1\times C_8^1 + C_3^1\times C_2^1 + C_3^1\times C_2^1}{C_{10}^2} + \frac{C_2^1\times C_1^1 + C_2^1\times C_2^1 + C_1^1\times C_2^1}{C_{10}^2}$$

$$= \frac{1+16+12+6+2}{45} = \frac{37}{45}.$$

① ① / ① ①
② ③
② ⑤
③ ④
③ ⑤
④ ⑤

Scanné avec CamScanner

ب - "Anc" الكرتين الحمراوتين تحملان رقمين مجموعهما 6 و أوليا فيما بينهما"

$$P(Anc) = \frac{C_2^1 \times C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{4}{45}$$ ⑤①

$$P(\overline{A \cup C}) = 1 - P(A \cup C)$$
$$= 1 - P(A) - P(C) + P(Anc)$$
$$= 1 - \frac{8}{45} - \frac{37}{45} + \frac{4}{45}$$
$$= \frac{4}{45}$$

2 - أ - القيم الممكنة للمتغير العشوائي X:

①① $\xrightarrow{X}$ 1 ; ②② ②④ $\xrightarrow{X}$ 2

①④ ③③ $\xrightarrow{X}$ 3 ; ⑤⑤ $\xrightarrow{X}$ 5

$X = \{1; 2; 3; 5\}$

ب -

$$P(X=1) = P(C) = \frac{37}{45}$$
$$P(X=2) = \frac{C_3^2 + C_3^1 \times C_1^1}{C_{10}^2} = \frac{6}{45}$$
$$P(X=3) = \frac{C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{45}$$
$$P(X=5) = \frac{C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{45}$$

x_i	1	2	3	5
p_i	$\frac{37}{45}$	$\frac{6}{45}$	$\frac{1}{45}$	$\frac{1}{45}$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = \frac{37+12+3+5}{45} = \frac{19}{15}$$

$$E(150X + 1835) = 150\,E(X) + 1835$$
$$= 150 \times \frac{19}{15} + 1835 = 2025$$

3 - D "الحصول على أربع كرات أرقامها تشكل العدد 2025".

$$P(D) = \frac{A_3^1 \times A_1^1 \times A_2^1 \times A_2^1}{A_{11}^4} = \frac{12}{A_{11}^4} = \frac{1}{660}.$$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I - 1) وضعية (C_h) بالنسبة لـ (Δ):

x	$-\infty$	β	$+\infty$
الوضع النسبي	(C_h) فوق (Δ)	(C_h) يقطع (Δ)	(C_h) تحت (Δ)

و وضعية (C_g) بالنسبة لـ (Δ):

x	$-\infty$	α	$+\infty$
الوضع النسبي	(C_g) فوق (Δ)	(C_g) يقطع (Δ)	(C_g) تحت (Δ)

2 - أ - إشارة $g(x) - x$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x) - x$	+	0	−

إشارة $h(x) - x$:

x	$-\infty$	β	$+\infty$
$h(x) - x$	+	0	−

II - $f(x) = e^{-x}(x - e^{-x-1} + e^{x-1})$ $D = \mathbb{R}$

1

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{-x}\left(x - e^{-x-1} + e^{x-1}\right)$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{e^x} - e^{-2x-1} + e^{-1}\right) = e^{-1}$$

المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y = e^{-1}$ بجوار $+\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{x}\left(x - e^{-x-1} + e^{x-1}\right) = -\infty$$

2 - أ - تبيان أن x من $\mathbb{R}^*$:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{e^{-x}\left(x - e^{-x-1} + e^{x-1}\right)}{x}$$
$$= \frac{xe^{-x}}{x} - \frac{e^{-2x-1} + e^{-1}}{x} = e^{-x} - e^{-1}\frac{(e^{-2x} - 1)}{x}$$
$$= e^{-x} + 2e^{-1}\left(\frac{e^{-2x} - 1}{-2x}\right)$$

ب -

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0}\left[e^{-1} + 2e^{-1}\left(\frac{e^{-2x} - 1}{-2x}\right)\right]$$
$$= 1 + 2e^{-1}$$

نذكر: $\lim_{u \to 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$

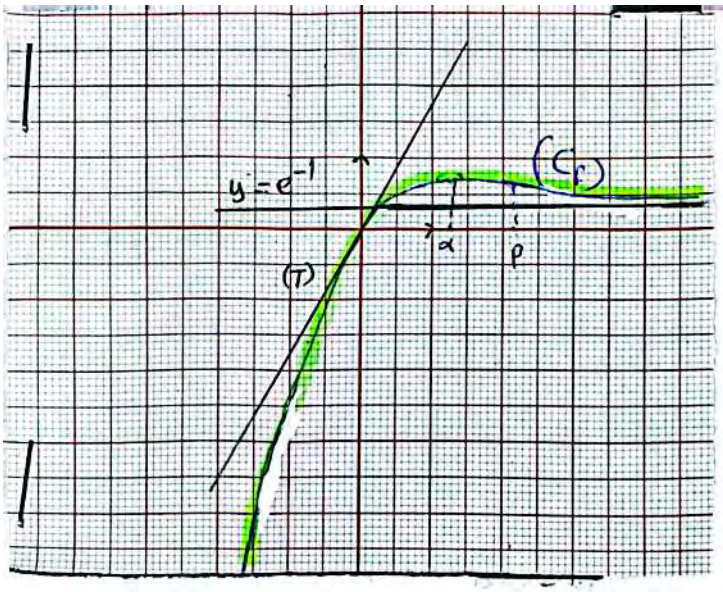
الإستنتاج: الدالة f تقبل إشتقاق عند 0.

التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 معامل توجيهه $1 + 2e^{-1}$.

ج - معادلة المماس (T) عند المبدأ 0:

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$
$$y = (1 + 2e^{-1})x$$

Scanné avec CamScanner



أ - 6

$$\int_0^{\alpha} xe^{-x}dx = [-xe^{-x}]_0^{\alpha} + \int_0^{\alpha} e^{-x}dx$$

$u(x) = x$; $u'(x) = 1$

$v'(x) = e^{-x}$; $v(x) = -e^{-x}$

$$= -\alpha e^{-\alpha} + [-e^{-x}]_0^{\alpha}$$

$$\int_0^{\alpha} xe^{-x}dx = -\alpha e^{-\alpha} - e^{-\alpha} + 1$$

ب -

$$A(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(x)\,dx$$

$$= \int_0^{\alpha} (xe^{-x} - e^{-2x-1} + e^{-1})\,dx$$

$$= \int_0^{\alpha} xe^{-x}dx - \int_0^{\alpha} e^{-2x-1}dx + \int_0^{\alpha} e^{-1}dx$$

$$= -\alpha e^{-\alpha} - e^{-\alpha} + 1 + \frac{1}{2}[e^{-2x-1}]_0^{\alpha} + [xe^{-1}]_0^{\alpha}$$

$$= -\alpha e^{-\alpha} - e^{-\alpha} + \frac{1}{2}e^{-2\alpha-1} - \frac{1}{2}e^{-1} + \alpha e^{-1}$$

$$A(\alpha) = \left[\left(-\alpha - 1 + \frac{e^{-\alpha-1}}{2}\right)e^{-\alpha} + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)e^{-1}\right] ua$$

نتمنى تصحيح الموضوع
الأول. ☺

أ - 3 - تبيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = -e^{-x}(x - e^{-x-1} + e^{x-1}) + (1 + e^{-x-1} + e^{x-1})e^{-x}$$

$$= [-x + e^{-x-1} + e^{x-1} + 1 + e^{-x-1} + e^{x-1}]e^{-x}$$

$$= [1 + 2e^{-x-1} - x]e^{-x}$$

$$= [g(x) - x]e^{-x}$$

ب - إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x) - e^{-x}$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

الدالة f متزايدة تماما على $]-\infty;\alpha]$ ومتناقصة تماما على $[\alpha;+\infty[$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	e^{-1}

4 - تبيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f''(x) = (-2e^{-x-1} - 1)e^{-x} - e^{-x}(1 + 2e^{-x-1})$$

$$= (-2e^{-x-1} - 1 - 1 - 2e^{-x-1} + x)e^{-x}$$

$$= (-2 - 4e^{-x-1} + x)e^{-x}$$

$$= (x - (2 + 4e^{-x-1}))e^{-x} = (x - h(x))e^{-x}$$

x	$-\infty$		β		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

(C_f) يقبل نقطة إنعطاف واحدا هي $M(\beta;f(\beta))$.

5 - أ) إنشاء (C_f) : (D) :

ب - حلول المعادلة $f(x) = mx$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) و (D)

- إذا كان $m < 1 + 2e^{-1}$ فإن المعادلة تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر موجب تماما
- إذا كان $0 < m$

الموضوع الثاني :

التمرين الأول : (04 نقاط)

1 - الإجابة خطأ .

التعليل : لدينا : $Z = 5 - 12i$

وليكن $w = a + ib$ الجذر التربيعي لـ Z حيث :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 5 \dots (1) \\ 2ab = -12 \dots (2) \\ a^2 + b^2 = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13 \dots (3) \end{cases}$$

نجمع (1) مع (3) نجد : $2a^2 = 18$ أي $a^2 = 9$

معناه : $a = 3$ أو $a = -3$

بالتعويض في (2) نجد : $b = -2$ أو $b = 2$

إذن : $w = 3 - 2i$ أو $w = -3 + 2i$

2 - الإجابة خطأ .

التعليل :

$$Z = -\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

لدينا : $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ $\quad \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

إذن : $Z = \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

$Z = e^{\frac{7\pi}{12}i}$

3 - الإجابة صحيحة .

التعليل : نضع : $Z = (-1+i)\frac{1}{\sqrt{2}}$

θ عمدة لـ Z حيث : $r = |Z| = \sqrt{\frac{1+1}{2}} =$;

$\theta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$; $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ و $\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^n$ عدد حقيقي موجب معناه :

$\arg\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^n = 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

$n \arg(Z) = 2k\pi$

$n \times \frac{3\pi}{4} = 2k\pi$

$3n = 8k$

$8/n$ حسب غوص $8 \wedge 3 = 1$ و $8 \mid 3n$

إذن : $n = 8k ; k \in \mathbb{N}$

4 - الإجابة صحيحة .

التعليل :

$|Z| = \sqrt{75+25} = 10$

$S_n = 1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^n$

$= 1 \cdot \frac{10^{n+1} - 1}{10 - 1} = \frac{10^{n+1} - 1}{9}$

التمرين الثاني : (04,5 نقطة)

I - $182x - 65y = 9^n - 130n - 1$

1 - دراسة بواقي قسمة العدد 9^n على 13 :

$9^1 \equiv 9[13]$; $n=1$; $9^0 \equiv 1[13]$; $n=0$

$9^3 \equiv 1[13]$ $n=3$; $9^2 \equiv 3[13]$; $n=2$

بواقي قسمة 9^n على 13 متتالية دورية دورها 3

n حيث	3K	3K+1	3K+2
$9^n = [13]$	1	9	4

K عدد صحيح

2 - نحسب : $PGCD(182; 65) = 13$

$182 = 65(2) + 52$

$65 = 52(1) + 13$

$52 = 13(4) + 0$

المعادلة (E_n) تقبل حلولا في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ لما : $9^n - 130n - 1$ يقسم 13 معناه :

$9^n - 130n - 1 \equiv 0[13]$

$9^n \equiv 1[13]$; $130n \equiv 0[13]$

إذن : $n = 3k ; k \in \mathbb{Z}$

II - $n = 3$.

1 - أ - لدينا : $182x - 65y = 338$

نكافئ : $14x - 5y = 26$

$(x_0; y_0)$ حل المعادلة (E_3) معناه :

$$\begin{cases} 14x_0 - 5y_0 = 26 \\ x_0 + y_0 = 10 \end{cases}$$

معناه : $x_0 = 10 - y_0$

$-14(10 - y_0) - 5y_0 = 26$

$140 - 14y_0 - 5y_0 = 26$

$-19y_0 = -114$

$y_0 = 6$ و $x_0 = 10 - 6 = 4$

$(x_0 = 4)$

أي : $(x_0; y_0) = (4; 6)$

حل المعادلة (E_3) :

لدينا : $14x - 5y = 26 \dots (E_3)$

$14(4) - 5(6) = 26 \dots (E_3')$

نطرح (E_3') من (E_3) نجد :

$14(x-4) - 5(y-6) = 0$

$14(x-4) = 5(y-6) \dots (*)$

$14(x-4)$ يقسم 5 : معناه

$5 \wedge 14 = 1$ و

Scanné avec CamScanner

حسب مبرهنة غوص لدينا :

5 يقسم $x-4$ معناه :

$x-4 = 5p \; ; \; p \in \mathbb{Z}$

$x = 5p+4 \; ; \; p \in \mathbb{Z}$

بالتعويض في (2) نجد :

$-14 \times 5p = 5(y-6)$

$y-6 = -14p$

$y = -14p+6 \; ; \; p \in \mathbb{Z}$

إذن : $S = \{(5p+4 ; -14p+6) ; p \in \mathbb{Z}\}$

ب - لدينا :

$|y-2x| = 2$

$|-14p+6-10p-8| = 2$

$|-4p-2| = 2$

معناه : $-4p-2 = 2$ أو $-4p-2 = -2$

معناه : $-4p = 4$ أو $-4p = 0$

$p = -1$ أو $p = 0$

إذن : $(x;y) \in \{(-1;6) ; (4;-8)\}$

-2

$N = \overline{1\,8\,y\,5}^{\,9}$ $\quad 0 \leq \alpha \leq 7$

$= 9^3 + 8 \times 9^2 + 9y + 5$ $\quad 0 \leq \beta \leq 7$

$= 729 + 648 + 9y + 5$ $\quad 0 \leq \gamma \leq 8$

$= 734 + 81(2\alpha) + 9(\beta+1)$

$= 162\alpha + 9\beta + 9 + 734$

$N = 162\alpha + 9\beta + 743$

$N = \overline{2\,\beta\,\alpha\,5}^{\,8}$

$= 2 \times 8^3 + \beta \cdot 8^2 + 8\alpha + 5$

$= 1024 + 64\beta + 8\alpha + 5$

$N = 8\alpha + 64\beta + 1029$

$162\alpha - 8\alpha + 9\beta - 64\beta = 1029 - 743$

$154\alpha - 55\beta = 286$

نكافئ : $14\alpha - 5\beta = 26$

يعني : $\alpha = x = 5k+4 \; ; \; \beta = y = -14p+6$

بالحصر نجد : $p = 0$

$\alpha = 4 \; ; \; \beta = 6$

$\delta = 8 \; ; \; \gamma = 7$

$N = 162(4) + 9(6) + 743 = 1445$

إذن : $N+1 = 1446$

-3

$PGCD(a;b) = d \; ; \; PPCM(a;b) = m$

-أ

2025	3
675	3
225	3
75	3
25	5
5	5
1	

$2025 = 3^4 \times 5^2$

الأعداد التي مكعب كل منها يقسم 2025 هي 3 و 1 .

ب -

لدينا : $PGCD(a;b) = d$ معناه : $a = da'$ و $b = db'$

مع $a' \wedge b' = 1$

و لدينا : $m \times d = a \times b$ معناه : $m = d(a'.b')$

إذن : $d^3(a'.b')^3 - 50d^3 = 2025$

$d^3[(a'.b')^3 - 50] = 2025$

إذن 2025 يقبل d^3 أي : $d \in \{1;3\}$

من أجل $d=1$ نجد : $(a'.b')^3 = 2075$ متعلقة .

من أجل $d=3$ نجد : $27[(a'.b')^3 - 50] = 2025$

إذن : $(a'.b')^3 - 50 = 75$

$(a'.b')^3 = 125$

$a'.b' = 5$

إذن : $(a';b') \in \{(1;5) ; (5;1)\}$

إذن : $(a;b) \in \{(5;15) ; (15;1)\}$

التمرين الثالث : (4,50 نقطة)

$U_{n+1} = \frac{1}{2-U_n} \; ; \; U_0 = -3$

1- أ - من أجل كل n من $\mathbb{N}$;

$P(n) : \; U_n < 1$

* من أجل $n=0$; أي $-3 < 1$; و منه : $P(0)$ صحيحة .

* نفترض أن الخاصية $P(n)$ صحيحة من أجل n عدد طبيعي و نثبت صحة الخاصية $P(n+1)$

لدينا : $U_n < 1$ و منه $-U_n > -1$ و منه $2-U_n > 1$

أي $\frac{1}{2-U_n} < 1$ و منه $U_{n+1} < 1$

و منه : $P(n+1)$ صحيحة .

من أجل كل n من $\mathbb{N}$; $U_n < 1$.

ب - من أجل كل n من $\mathbb{N}$;

$U_{n+1} - U_n = \frac{1 - 2U_n + U_n^2}{2-U_n} = \frac{(U_n-1)^2}{2-U_n} > 0$

إذن : المتتالية (U_n) متزايدة تماما .

Scanne avec CamScanner

المتتالية (U_n) متقاربة لأنها متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى.

3- $V_n = e^{\frac{4}{1-U_n}}$; $n \in \mathbb{N}$

أ- من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$V_{n+1} = e^{\frac{4}{1-U_{n+1}}}$

$= e^{\frac{4}{1-\frac{1}{2-U_n}}} = e^{\frac{4}{\frac{2-U_n-1}{2-U_n}}}$

$= e^{\frac{4(2-U_n)}{1-U_n}} = e^{\frac{4(1+1-U_n)}{1-U_n}}$

$= e^{\frac{4}{1-U_n}+4} = e^4 \cdot V_n$

إذن: (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = e^4$

ب- كتابة V_n بدلالة n:

من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$V_n = V_0 \times q^n = e^1 \times (e^4)^n = e^{4n+1}$

كتابة U_n بدلالة n:

لدينا: $\ln V_n = \frac{4}{1-U_n}$ معناه:

$\frac{1-U_n}{4} = \frac{1}{\ln V_n}$ إذن: $1-U_n = \frac{4}{4n+1}$

إذن: $U_n = 1 - \frac{4}{4n+1}$

ج- $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\left[1 - \frac{4}{4n+1}\right] = 1$

$S_n = \ln(V_0) + \ln(V_1) + \dots + \ln(V_n)$

$\omega_n = \ln(V_n) = 4n+1$

(ω_n) متتالية حسابية أساسها $r=4$ و $\omega_0 = 1$.

$S_n = \frac{(n+1)(1+4n+1)}{2} = (n+1)(1+2n)$

$S_n = 2n^2 + 3n + 1$

3- أ- دراسة بواقي قسمة 4^n على 11:

$4^0 \equiv 1[11]$; $n=0$; $4^1 \equiv 4[11]$; $n=1$; $4^2 \equiv 5[11]$; $n=2$

$4^3 \equiv 9[11]$; $n=3$; $4^4 \equiv 3[11]$; $n=4$

$4^5 \equiv 1[11]$; $n=5$ بواقي قسمة 4^n على 11 متتالية دورية دورها 5.

n	$5k$	$5k+1$	$5k+2$	$5k+3$	$5k+4$
$4^n \equiv [11]$	1	4	5	9	3

k عدد طبيعي.

ب- $S_n + 7n^2 - 2n - 2026^{2025} \equiv 0[9]$

$9n^2 + 3n + 1 - 2n - 1 \equiv 0[9]$

$2026^{2025} \equiv 1[9]$; ذلك لأن $2026 \equiv 1[9]$

ومنه $(9n^2 \equiv 0[9])$ $n \equiv 0[9]$.

إذن: $n = 9p$; $p \in \mathbb{N}$

لدينا: $2023 < n < 2026$ إذن:

$2023 < 9p < 2026$

أي $\frac{2023}{9} < p < \frac{2026}{9}$ أي $p = 225$

$n = 9 \times 225 = 2025$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I- $g(x) = -\frac{1}{x^3} - 1 + 6\ln x$

$D =]0; +\infty[$.

1- أ- الدالة g متزايدة تماما ومستمرة على $[1,2; 1,3]$ و $g(1,2) \times g(1,3) < 0$

$(g(1,2) \simeq -0,48 \quad g(1,3) \simeq 0,11)$

فإن: المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α من المجال $]1,2; 1,3[$ أي $g(\alpha)=0$.

ب- إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

إشارة $g(\frac{1}{x})$ على $]0; +\infty[$:

$g(\frac{1}{x}) = 0$ معناه: $\frac{1}{x} = \alpha$ أي $x = \frac{1}{\alpha}$

$g(\frac{1}{x}) > 0$ معناه: $\frac{1}{x} > \alpha$ أي $0 < x < \frac{1}{\alpha}$

$g(\frac{1}{x}) < 0$ معناه: $\frac{1}{x} < \alpha$ أي $x > \frac{1}{\alpha}$

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		$+\infty$
$g(\frac{1}{x})$	‖	$+$	0	$-$	

II- $f(x) = -x + 1 + \frac{2 + 3\ln x}{x^2}$; $]0; +\infty[$

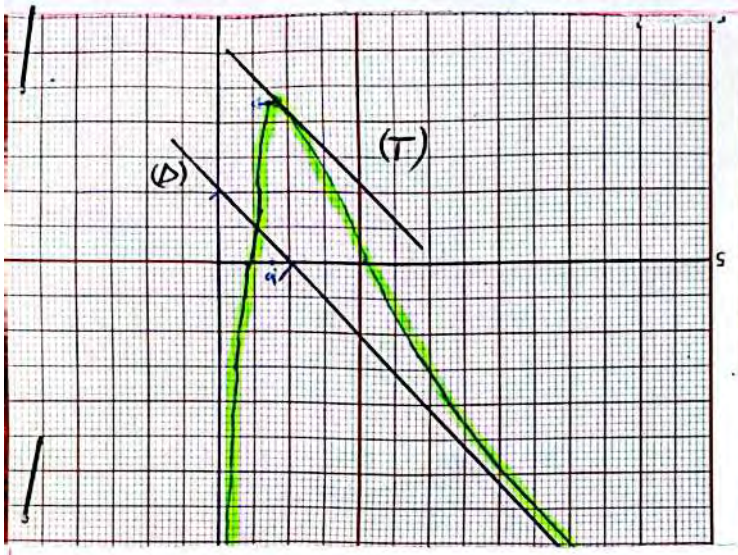
1- $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left[-x + 1 + \frac{1}{x^2}(2 + 3\ln x)\right] = -\infty$

($-x \to 0$; $+1 \to 1$; $\frac{1}{x^2} \to +\infty$; $2 + 3\ln x \to -\infty$)

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[-x + 1 + \frac{2}{x^2} + 3\cdot\frac{\ln x}{x^2}\right] = -\infty$

($-x \to -\infty$; $+1 \to 1$; $\frac{2}{x^2} \to 0$; $3\cdot\frac{\ln x}{x^2} \to 0$)

Scanne avec CamScanner



التمرين: (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=0$

2- أ- من أجل كل x من $]0;+\infty[$

$$f'(x) = -1 + \frac{\frac{3}{x}\cdot x^2 - 2x(2+3\ln x)}{x^4}$$

$$= -1 + \frac{3x - 2x(2+3\ln x)}{x\cdot x^3}$$

$$= \frac{-x^3 + 3 - 4 - 6\ln x}{x^3}$$

$$= \frac{1}{x^3}\cdot(-x^3 - 1 - 6\ln x)$$

$$= \frac{1}{x^3}\left(-\frac{1}{(\frac{1}{x})^3} - 1 + 6\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{x^3}g\left(\frac{1}{x}\right)$$

ب- إشارة $g(\frac{1}{x})$ تعطينا إشارة $f'(x)$.

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

الدالة f متزايدة تماما على $]0;\frac{1}{e}]$ ومتناقصة تماما على $[\frac{1}{e};+\infty[$.

جدول التغيرات:

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$f(\frac{1}{e})$	↘	$-\infty$

3- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+x-1] = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2} + \frac{3\ln x}{x^2} = 0$

(C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلته $y=-x+1$.

4- وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ):

$f(x)-y=0$ معناه: $2+3\ln x=0$ $(x>0)$

معناه: $\ln x = -\frac{2}{3}$ إذن: $x = e^{-\frac{2}{3}}$

x	0		$e^{-\frac{2}{3}}$	
$f(x)-y$	‖	$-$	0	$+$
	الوضع النسبي.	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) فوق (Δ)

5- $(\Delta)\parallel(T)$ معناه: $f'(x)=-1$

معناه: $\frac{1}{x^3}(-x^3-1-6\ln x)=-1$

$-x^3-1-6\ln x=-x^3$ معناه: $\ln x = -\frac{1}{6}$

$x_0 = e^{-\frac{1}{6}}$

6- إنشاء (C_f) ؛ (Δ) ؛ (T):

7- المعادلة $f(x)=-x+e^m$ تقبل حلين متمايزين

$0<m<\ln(1+\frac{3}{2}e^{\frac{1}{3}})$ أي $1<e^m<1+\frac{3}{2}e^{\frac{1}{3}}$ لما

III- $U_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} [f(x)+x-1]\,dx$

• من أجل كل n من $\mathbb{N}$: من أجل كل x من $[e^{-\frac{2}{3}};+\infty[$

$$0 < \frac{2+3\ln x}{x^2} = f(x)+x-1$$

ومنه $\int_{e^n}^{e^{n+1}}(f(x)+x-1)\,dx>0$ أي $U_n>0$

* U_0 هي مساحة الحيز الكائن بين (C_f) و (Δ) والمستقيمين المعادلتين لهما $x=e^1$ و $x=1$

* $\int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{3}{x^2}\ln x\,dx = \left[-\frac{3}{x}\ln x\right]_{e^n}^{e^{n+1}} + 3\int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{1}{x^2}\,dx$

$u'(x)=\frac{3}{x^2}$ ؛ $u(x)=-\frac{3}{x}$ ؛ $v(x)=\ln x$ ؛ $v'(x)=\frac{1}{x}$

$$= -\frac{3}{e^{n+1}}(n+1) + \frac{3n}{e^n} + 3\left[-\frac{1}{x}\right]_{e^n}^{e^{n+1}}$$

$$= -\frac{3(n+1)}{e^{n+1}} + \frac{3n}{e^n} - \frac{3}{e^{n+1}} + \frac{3}{e^n}$$

$$\int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{3\ln x}{x^2}\,dx = \frac{-3n-6}{e^{n+1}} + \frac{3n+3}{e^n}$$

استنتاج عبارة U_n بدلالة n:

$$U_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}}\left(\frac{2}{x^2}+\frac{3\ln x}{x^2}\right)dx = \int_{e^n}^{e^n}\frac{2}{x^2}\,dx + \frac{3n+3}{e^n} - \frac{3n+6}{e^{n+1}}$$

$$= -\frac{2}{e^{n+1}} + \frac{2}{e^n} + \frac{3n+3}{e^n} - \frac{3n+6}{e^{n+1}} = -\frac{3n+8}{e^{n+1}} + \frac{3n+5}{e^n}$$

* نستعمل خاصية شال:

$$S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n = \int_1^{e^{n+1}}\frac{2}{x^2}\,dx + \int_1^{e^{n+1}}\frac{3\ln x}{dx}\,dx$$

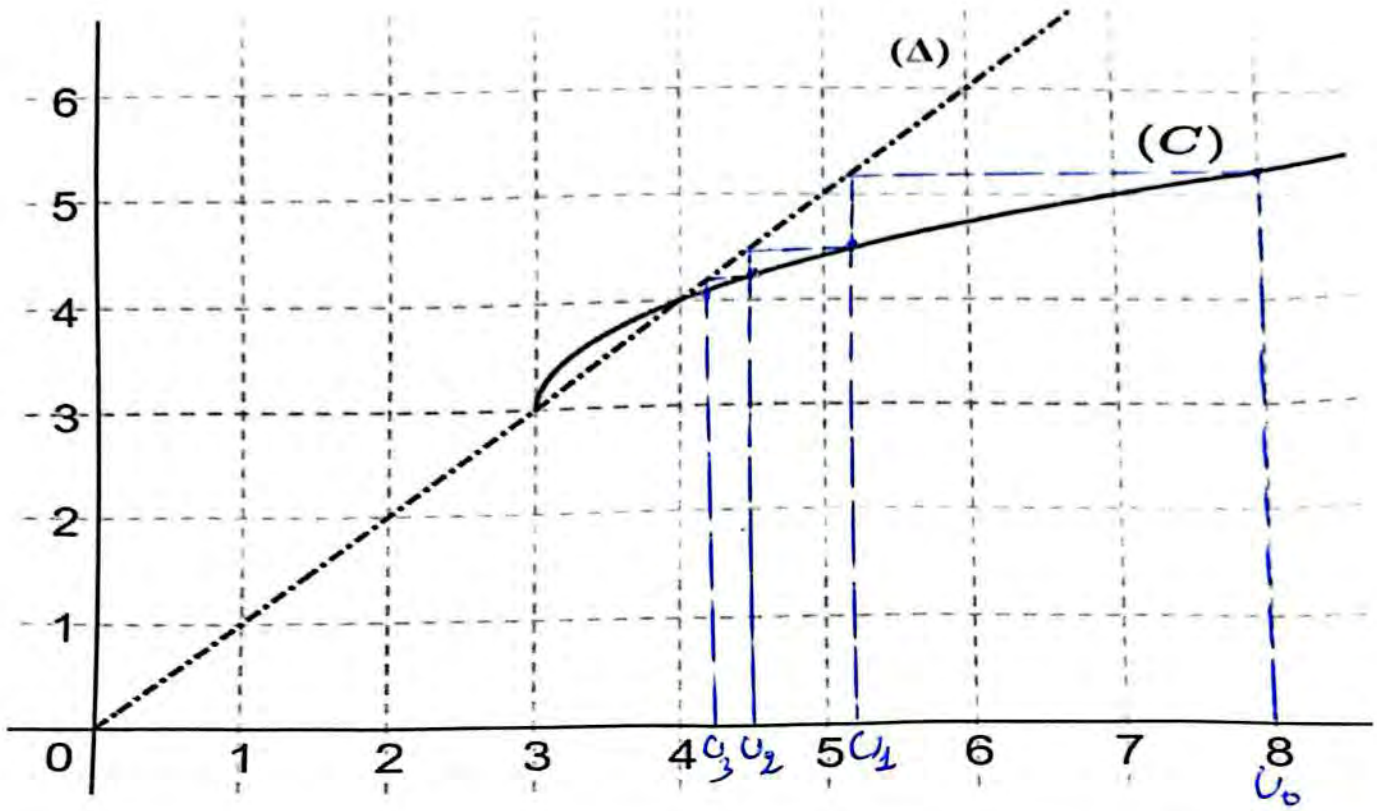
$$= -\frac{2}{e^{n+1}} + \frac{2}{e^1} + \frac{3n+3}{e^{n+1}} - \frac{3}{e^{n+1}} + \frac{3}{e}$$

$$= -\frac{3n+8}{e^{n+1}} + \frac{5}{e} = -(3n+8)e^{-n-1} + 5e^{-1}$$

انتهى تصحيح الموضوع الثاني

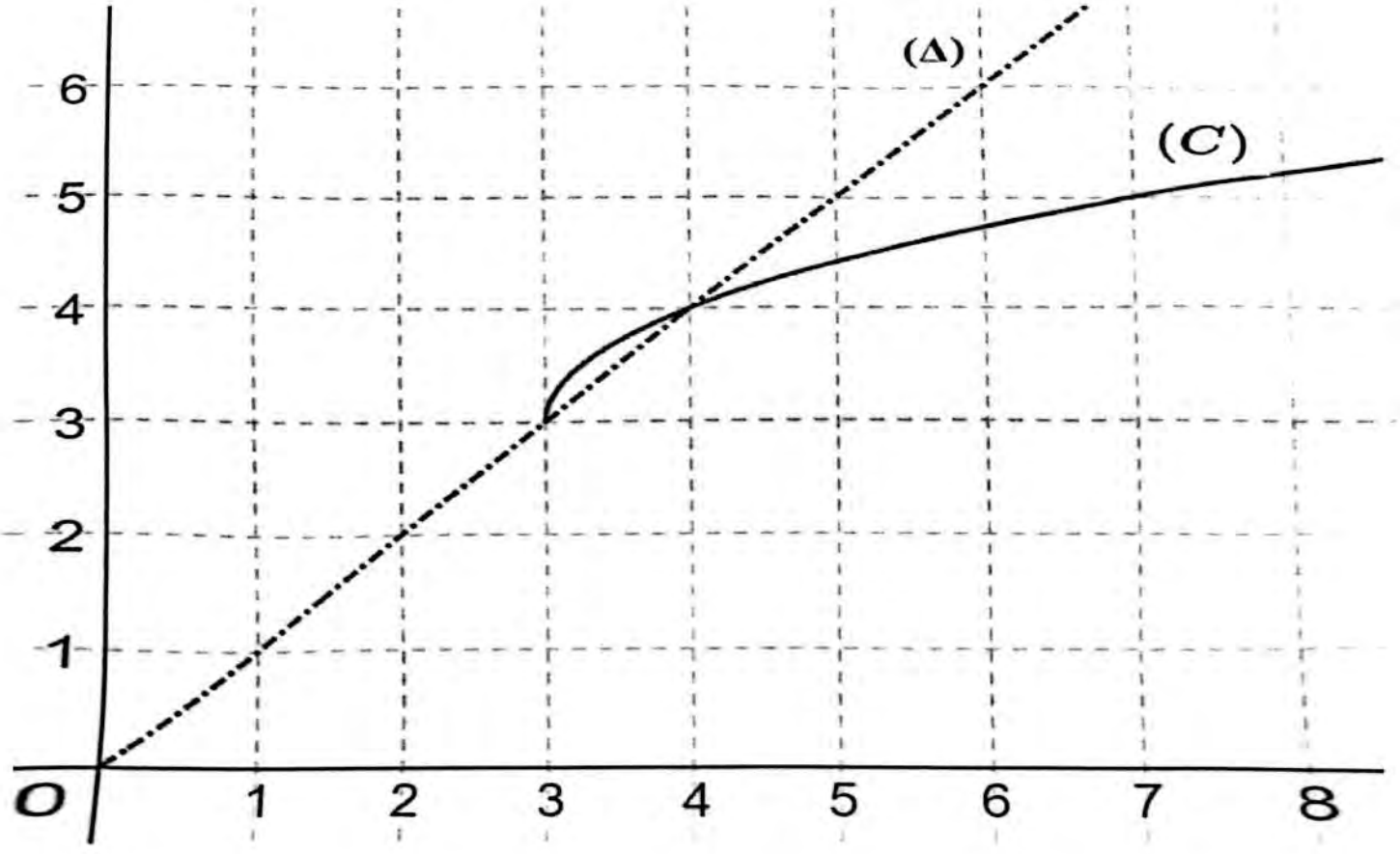
Scanne avec CamScanner

الإسم واللقب : .....



.....

الإسم واللقب : .....



Scanné avec CamScanner