الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

امتحان البكالوريا التجريبي — **دورة : ماي 2025**
المقاطعة التفتيشية : ورقلة 01 – تقرت 02 — **الشعبة : تقني رياضي**

اختبار في مادة: الرياضيات — **المدّة : 4 ساعات و 30 د**

على المترشّح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأوّل

التمرين الأوّل (4 ن)

صندوق غير شفّاف به 6 بطاقات متماثلة لا نفرّق بينها عند اللّمس، منها ثلاث بطاقات بيضاء تحمل الأرقام: 1 ، 1 ، α ، وبطاقتين خضراوين تحملان الرقمين: 1 ، α ، وبطاقة حمراء تحمل الرّقم: α ، حيث $\alpha \in \mathbb{N}$.
نسحب عشوائيا من الصندوق ثلاث بطاقات على التوالي دون إرجاع.

I) **1.** أُحسب احتمال كلّا من الحدثين الآتيين.

أ. A: " الحصول على ثلاث بطاقات متمايزة اللّون مثنى مثنى ".

ب. B: " البطاقات تحمل أرقاما جداؤها يُساوي α ".

2. بيّن أنّ $P(A \cap B) = \dfrac{1}{10}$ ، ثمّ استنتج $P(A \cup B)$

II) نعتبر X المتغيّر العشوائي الذي يُرفق كل إمكانية بجداء الأرقام المتحصّل عليها.

1. **أ.** برّر أنّ مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي $\{1; \alpha; \alpha^2; \alpha^3\}$

ب. عيّن قانون احتمال المتغيّر العشوائي X ثمّ أُحسب أمله الرياضياتي $E(X)$

2. عيّن قيمة α التي يكون من أجلها $E(X) = \dfrac{\alpha^3 + 9\alpha^2 + 1954}{20}$

التمرين الثاني (4 ن)

نعتبر في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة (E) المعرّفة كما يلي $(E) : 2025x - 674y = 3$

1. **أ.** أُحسب $PGCD(2025; 674)$ ثمّ استنتج أنّ المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

ب. تحقّق أنّ الثنائية $(1; 3)$ حل للمعادلة (E) ثمّ استنتج مجموعة حلول المعادلة (E)

2. نعتبر L عددا طبيعيا يكتب $\overline{\alpha\gamma\beta\beta 0\beta}$ في نظام التعداد ذي الأساس 4 حيث $\gamma = \alpha + \beta$ والثنائية $(\alpha; \gamma)$ حلّ للمعادلة (E)

- عيّن كُلّا من α ، β و γ ثمّ أُكتب L في النظام العشري.

3. **أ.** بيّن أنّ العدد 977 أوّلي ثمّ استنتج تحليل العدد 1954 إلى جداء عوامل أوّلية.

ب. عيّن كلّ الثنائيات $(a; b)$ من $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ حيث $a < b$ و التي تحقّق

$$\begin{cases} PGCD(a; b) = 1 \\ ab - 2b + 4a = 1962 \end{cases}$$

التمرين الثالث (5 ن)

I) الدّالة العددية f معرّفة على $]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x}$

• بيّن أنّ f متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$

II) المتتالية العددية (U_n) معرّفة بـ $U_0=2$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n ، $U_{n+1}=f(U_n)$

1. أ. برهن بالتّراجع أنّه : من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $U_n>1$

ب. أُدرس اتجاه تغيّر المتتالية (U_n) ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

2. أ. بيّن أنّه : من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ ، $0<U_{n+1}-1\leq\dfrac{1}{2}(U_n-1)$

ب. أثبت أنّه : من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ ، $0<U_n-1\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ ثمّ استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

3. من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ نضع: $S_n=\log\dfrac{2}{U_0-1}+\log\dfrac{2}{U_1-1}+\cdots+\log\dfrac{2}{U_n-1}$

• بيّن أنّه : من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ ، $S_n\geq(n+1)(n+2)\log\sqrt{2}$

التمرين الرّابع (7 ن)

I) الجدول المقابل هو جدول تغيّرات الدّالة g المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x-\ln x-1$

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+\infty$ ↘	$g(1)$	↗	$+\infty$

• أُحسب $g(1)$ ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$

II) الدّالة العددية f معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{(x+1)\ln x}{x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1. أ. أُحسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}f(x)$ وفسّر النتيجة هندسيا ثمّ أُحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

ب. بيّن أنّه: من أجل كلّ x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)+2}{x^2}$ ثمّ شكّل جدول تغيّرات f

2. أ. أُحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\ln x]$ ثمّ فسّر النتيجة هندسياً.

ب. أُدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (γ) المنحنى الممثّل للدّالة $\ln$

3. أُكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1

4. أ. أنشئ كُلّا من (T) ، (γ) و (C_f)

ب. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x)=2x-e^m$

5. نعتبر λ عددا حقيقياً حيث $\lambda>1$ ، نرمز بـ $\mathcal{S}(\lambda)$ إلى مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنيين (C_f) و (γ) والمستقيمين ذوا المعادلتين $x=1$ و $x=\lambda$

• عيّن قيمة λ التي يكون من أجلها $\mathcal{S}(\lambda)=2\,(u.a)$

6. الدّالة العددية k معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $k(x)=f\left(e^{-x}\right)$

• أُدرس اتجاه تغيّر الدّالة k على $\mathbb{R}$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها (لا يُطلب حساب $k(x)$).

انتهى الموضوع الأوّل

الموضوع الثاني

التمرين الأوّل (4 ن)

صندوق غير شفّاف به 10 كريّات متماثلة لا نفرّق بينها عند اللّمس، منها أربع كريّات حمراء تحمل الأرقام: 0، 1 ، 1 ، 1 ، وثلاث كريّات بيضاء تحمل الأرقام: 0 ، 1 ، 1 ، وكرّيتين خضراوين تحملان الرّقمين: 0 و 1 وكرّية سوداء تحمل الرقم 1.

نسحب عشوائيا من الصندوق أربع كريّات في آن واحد.

I) 1. أُحسب احتمال كلّا من الحدثين الآتيين.

أ. A: " الحصول على أربع كريّات تحمل نفس الرّقم ".

ب. B: " الكريّات المسحوبة تُشكّل ألوان علم **فلسطين** (أحمر، أسود، أبيض، أخضر) ".

2. بيّن أنّ $P(A \cap B) = \dfrac{1}{35}$ ، ثمّ استنتج $P\left(\overline{A \cup B}\right)$

II) نعتبر X المتغيّر العشوائي الذي يُرفق كل إمكانية بمجموع الأرقام المتحصّل عليها.

1. أ. برّر أنّ مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي $\{1; 2; 3; 4\}$

ب. عيّن قانون احتمال المتغيّر العشوائي X ثمّ أُحسب أمله الرياضياتي.

2. أُحسب احتمال الحدث $(X + 1 \equiv 0\,[2])$

التمرين الثاني (4 ن)

عيّن الاقتراح الصّحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كلّ حالة من الحالات الآتية مع التّبرير.

1. مجموعة حلول المعادلة $\overline{z}^2 + 2\overline{z} + 4 = 0$ ذات المجهول z في $\mathbb{C}$ هي

أ) $\{1 - i\sqrt{2}; 1 + i\sqrt{2}\}$ ب) $\{-i\sqrt{2}; i\sqrt{2}\}$ ج) $\{-1 - i\sqrt{3}; -1 + i\sqrt{3}\}$

2. إذا كان z عددا مركّبا حيث $z = \cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}$ فإنّ العدد z^{1962}

أ) حقيقي موجب تماما ب) حقيقي سالب تماما ج) تخيّلي صرف

3. إذا كان z عددا مركّبا حيث $|z| = 1$ فإنّ

أ) $|z - i| = |\overline{z}|$ ب) $|z - i| = |\overline{z} - i|$ ج) $|z - i| = |\overline{z} + i|$

4. إذا كان z عددا مركّبا حيث $z = 1 + e^{\frac{i\pi}{4}}$ فإنّ

أ) $\arg z \equiv \dfrac{\pi}{4}\,[2\pi]$ ب) $\arg z \equiv \dfrac{\pi}{8}\,[2\pi]$ ج) $\arg z \equiv \pi\,[2\pi]$

التمرين الثالث (5 ن)

المتتاليتان العدديتان (U_n) و (V_n) معرّفتان على $\mathbb{N}$ كما يلي

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = 2U_n - 3n + 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad V_n = 2U_n - 6n - 4$$

1. أ. أثبت أنّ المتتالية (V_n) هندسية أساسها 2 يُطلب تعيين حدّها الأوّل.

ب. أُكتب V_n بدلالة n ثم استنتج U_n بدلالة n

ج. من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ نضع: $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$

• بيّن أنّه : من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ ، $2S_n = 2^{n+2} + 3n^2 + 7n + 2$

2. أ. أُدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7

ب. استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $2025^{2024} + 1962^{1954} + 1444^{1446}$ على 7

3. عيّن الأعداد الطبيعية n التي تحقّق $2S_{3n} + U_{3n} - 3 \equiv 0\,[7]$

التمرين الرّابع (7 ن)

I) الدّالة العددية g معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = x - 2e^{-x}$

1. بيّن أنّ g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

2. أ. بيّن أنّ المعادلة $g(x) = -1$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $0,3 < \alpha < 0,4$

ب. استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x) + 1$

II) الدّالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = xe^x - 2x + 1$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$

1. أ. بيّن أنّ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ثمّ أُحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

ب. بيّن أنّه من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{1 + g(x)}{e^{-x}}$

ج. استنتج اتجاه تغيّر f على $\mathbb{R}$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2. أ. بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -2x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$

ب. أُدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

3. أُكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور التراتيب.

4. أ. أنشئ كُلّا من (Δ) ، (T) و (C_f) (نأخذ $f(\alpha) \approx 0,8$)

ب. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = -|m|\,x + 1$

5. نعتبر λ عددا حقيقيا حيث $\lambda < 0$ ، نرمز بـ $\mathcal{A}(\lambda)$ إلى مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين ذوا المعادلتين $x = \lambda$ و $x = 0$

• باستعمال المكاملة بالتجزئة أُحسب $\int_{\lambda}^{0} xe^x dx$ ثمّ استنتج أنّ $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \mathcal{A}(\lambda) = 1\,(u.a)$

انتهى الموضوع الثاني

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

امتحان البكالوريا التجريبي — **دورة ماي** 2025
المقاطعة التفتيشية: ورقلة 01 – تقرت 02 — **الشعبة:** تقني رياضي

اختبار في مادة: الرياضيات — **المدّة:** 4 ساعات و 30 د

الإجابة النموذجية + سلّم التنقيط

إجابة نموذجية مقترحة للموضوع الأوّل

التمرين الأوّل (6 نق)

1. حساب احتمال كلا من الحدثين A و B

أ. A: " الحصول على ثلاث بطاقات متمايزة اللّون مثنى مثنى ".

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{A \text{ عناصر عدد}}{\text{عدد الإمكانيات}} \\ &= \frac{6 \times A_3^1 \times A_2^1 \times A_1^1}{A_6^3} \\ &= \frac{36}{120} \\ &= \frac{3}{10} \end{aligned}$$

ب. B: " البطاقات تحمل أرقاما جداؤها يُساوي α ".

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{B \text{ عناصر عدد}}{\text{عدد الإمكانيات}} \\ &= \frac{3A_3^1 \times A_3^2}{A_6^3} \\ &= \frac{54}{120} \\ &= \frac{9}{20} \end{aligned}$$

2. تبيين أنّ $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$ ، ثمّ استنتاج $P(A \cup B)$

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= \frac{6A_1^1 \times A_1^1 \times A_2^1}{A_6^3} \\ &= \frac{12}{120} \\ &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{3}{10} + \frac{9}{20} - \frac{1}{10} \\ &= \frac{13}{20} \end{aligned}$$

3. أ. تبرير أنّ مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي $\{1; \alpha; \alpha^2; \alpha^3\}$

لدينا

$$\begin{cases} 1 \times 1 \times 1 = 1 \\ 1 \times 1 \times \alpha = \alpha \\ 1 \times \alpha \times \alpha = \alpha^2 \\ \alpha \times \alpha \times \alpha = \alpha^3 \end{cases}$$

وعليه مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي $\{1; \alpha; \alpha^2; \alpha^3\}$

ب. تعيين قانون احتمال المتغيّر العشوائي X ثمّ استنتاج أمله الرياضياتي $E(X)$

ولدينا

$$P(X=1)=\frac{A_3^3}{A_6^3}=\frac{6}{120}=\frac{1}{20}$$

$$P(X=\alpha)=P(B)=\frac{9}{20}$$

وأيضاً

$$P(X=\alpha^2)=\frac{3A_3^1\times A_3^2}{A_3^2}=\frac{54}{120}=\frac{9}{20}$$

$$P(X=\alpha^3)=\frac{A_3^3}{A_6^3}=\frac{6}{120}=\frac{1}{20}$$

وعليه

x_i	1	α	α^2	α^3	المجموع
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$	1

وعندئذ نستنتج أنّ

$$E(X)=1\times\frac{1}{20}+\alpha\times\frac{9}{20}+\alpha^2\times\frac{9}{20}+\alpha^3\times\frac{1}{20}=\frac{1+9\alpha+9\alpha^2+\alpha^3}{20}$$

4. تعيين قيمة α التي يكون من أجلها $E(X)=\frac{\alpha^3+9\alpha^2+1954}{20}$

المعادلة

$$E(X)=\frac{\alpha^3+9\alpha^2+1954}{20}$$

تكافئ

$$\frac{1+9\alpha+9\alpha^2+\alpha^3}{20}=\frac{\alpha^3+9\alpha^2+1954}{20}$$

وتكافئ

$$1+9\alpha+9\alpha^2+\alpha^3=\alpha^3+9\alpha^2+1954$$

وتكافئ

$$1+9\alpha=1954$$

وتكافئ

$$\alpha=\frac{1954-1}{9}=217$$

■

التمرين الثاني (4 نق)

1. أ. حساب $PGCD\,(2025;674)$ ثمّ استنتاج أنّ المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

لدينا

$$\begin{aligned}2025&=674\times3+3\\674&=3\times224+2\\3&=2\times1+1\\2&=2\times1+0\end{aligned}$$

ومنه $PGCD\,(2025;674)=1$ وبما أنّ $1\mid3$ فإنّ المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

ب. التحقّق أنّ الثنائية $(1;3)$ حل للمعادلة (E) ثمّ استنتاج مجموعة حلول المعادلة (E)

لدينا

$$\begin{aligned}2025\times1-674\times3&=2025-2022\\&=3\end{aligned}$$

ومنه الثنائية $(1;3)$ حل للمعادلة (E) ، وعندئذٍ لدينا

$$\begin{cases}2025x-674y=3\\2025x_0-674y_0=3\end{cases}$$

ومنه

$$2025\,(x-x_0)-674\,(y-y_0)=0$$

وعليه

$$2025\,(x-1)=674\,(y-3)$$

وبما أنّ $PGCD\,(2025;674)=1$ فإنّ $2025\mid y-3$ وينتج عن ذلك أنّ

$$\begin{cases}y=2025k+3\\k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

ومنه

$$\begin{cases}x=674k+1\\k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة هي S حيث

$$S=\{(674k+1\ ;\ 2025k+3)\mid k\in\mathbb{Z}\}$$

2. • تعيين كُلّا من α ، β و γ ثمّ كتابة L في النظام العشري.

الثنائية $(\alpha;\beta)$ حلّ للمعادلة (E) معناه

$$\begin{cases}\alpha=674k+1\\\beta=2025k+3\\k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

وبما أنّ

$$\begin{cases}0<\alpha<4\\0\leqslant\gamma<4\end{cases}$$

فإنّ $k=0$ ، وبالتالي $\alpha=1$ و $\gamma=3$، وبما أنّ

$$\gamma=\alpha+\beta$$

فإنّ

$$\begin{aligned}\beta&=\gamma-\alpha\\&=3-1\\&=2\end{aligned}$$

كتابة L على الشكل العشري

$$\begin{aligned} L &= \beta \times 4^0 + 0 \times 4^1 + \beta \times 4^2 + \beta \times 4^3 + \gamma \times 4^4 + \alpha \times 4^5 \\ &= 1024\alpha + 82\beta + 256\gamma \\ &= 1024 \times 1 + 82 \times 2 + 256 \times 3 \\ &= 1954 \end{aligned}$$

3. أ. تبيين أنّ العدد 977 أوّلي ثمّ استنتاج تحليل العدد 1954 إلى جداء عوامل أوّلية.

لدينا $\sqrt{977} \approx 31,25$ ، وبما أنّ

$2 \nmid 31$	$13 \nmid 31$
$3 \nmid 31$	$17 \nmid 31$
$5 \nmid 31$	$19 \nmid 31$
$7 \nmid 31$	$23 \nmid 31$
$11 \nmid 31$	$29 \nmid 31$

فإنّ 977 عدد أوّلي.

الاستنتاج.

لدينا

1954	2
977	977
1	

ومنه $1954 = 2 \times 977$

ب. تعيين كلّ الثنائيات $(a;b)$ من $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ حيث $a < b$ و التي تحقّق

$$\begin{cases} PGCD\,(a;b) = 1 \\ ab - 2b + 4a = 1962 \end{cases}$$

لدينا

$$ab - 2b + 4a - 8 = 1954$$

وذلك يكافئ

$$b\,(a-2) + 4\,(a-2) = 1954$$

ويكافئ

$$(a-2)\,(b+4) = 1954$$

وبما أنّ $a < b$ فإنّ $a - 2 < b + 4$ وينتج عن ذلك ما يلي

• **في حالة** $b + 4 = 1954$ **و** $a - 2 = 1$

لدينا

$$\begin{cases} a - 2 = 1 \\ b + 4 = 1954 \end{cases}$$

ومنه

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 1950 \end{cases}$$

ولكنّ $3 \mid 1954$ ، وعليه $PGCD\,(3;1950) \neq 1$ وهذا مرفوض.

• **في حالة** $b + 4 = 977$ **و** $a - 2 = 2$

لدينا

$$\begin{cases} a - 2 = 2 \\ b + 4 = 977 \end{cases}$$

ومنه

$$\begin{cases} a = 4 \\ b = 973 \end{cases}$$

وبما أنّ 973 عدد فردي، فإنّ $4 \nmid 973$ و $2 \nmid 973$ ومنه $PGCD\,(4;973) = 1$ وبالتالي توجد ثنائية وحيدة تُحقّق الجملة هي $(2;977)$

■

التمرين الثالث (5 نق)

I) تبيين أنّ f متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$

• f قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$ ولدينا

$$f'(x)=\frac{(2x-1)\,x-1\times(x^2-x+1)}{x^2}$$
$$=\frac{2x^2-x-x^2+x-1}{x^2}$$
$$=\frac{x^2-1}{x^2}$$

وبما أنّ $x^2>0$ و $x^2-1>0$ على $]1;+\infty[$ فإنّ $f'(x)>0$ على $]1;+\infty[$ ولدينا $f'(1)=0$ ، عندئذ f متزايدة تماما على $]1;+\infty[$.

II) المتتالية العددية (U_n) معرّفة بـ $U_0=2$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n ، $U_{n+1}=f(U_n)$

1. أ. البرهان بالتّراجع أنّه : من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $U_n>1$

• **نرمز للخاصية** " $U_n>1$ " **بالرمز** $P(n)$.

• **نتحقّق من صحّة** $P(0)$.

لدينا $U_0=2$ ، ومنه $U_0>1$ ، وعليه $P(0)$ صحيحة.

• **من أجل عدد طبيعي كيفي** k **نفترض صحّة** $P(k)$ **ونبرهن صحّة** $P(k+1)$.

لدينا

$$U_k>1$$

وبما أنّ f متزايدة تماما على $]1;+\infty[$ فإنّ

$$f(U_k)>f(1)$$

أي

$$U_{k+1}>1$$

ومنه $P(k+1)$ صحيحة.

• **حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع نستنتج أنّ** $P(n)$ **صحيحة من أجل كلّ عدد طبيعي** n.

ب. دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (U_n) ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$U_{n+1}-U_n=\frac{{U_n}^2-U_n+1}{U_n}-U_n$$
$$=\frac{{U_n}^2-U_n+1-{U_n}^2}{U_n}$$
$$=\frac{1-U_n}{U_n}$$

وبما أن $U_n>1$ فإنّ

$$\begin{cases}U_n>0\\1-U_n<0\end{cases}$$

وعليه (U_n) متناقصة تماما.

استنتاج أنّ (U_n) **متقاربة.** لدينا

• (U_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

• من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا $U_n>1$ ، وعليه (U_n) محدودة من الأسفل بالعدد 1.

وبالتالي (U_n) متقاربة.

2. أ. تبيين أنّه : من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ ، $0 < U_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(U_n - 1)$

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$U_n > 1$$

ومنه

$$U_n - 1 > 0$$

وعليه

$$0 < U_{n+1} - 1$$

ومن أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$\begin{aligned} U_{n+1} - 1 - \frac{1}{2}(U_n - 1) &= \frac{2{U_n}^2 - 2U_n + 2 - 2U_n - {U_n}^2 + U_n}{2U_n} \\ &= \frac{{U_n}^2 - 3U_n + 2}{2U_n} \\ &= \frac{(U_n - 1)(U_n - 2)}{2U_n} \end{aligned}$$

وبما أنّ (U_n) متناقصة تماما و $U_0 = 2$ ، فإنّه من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$1 < U_n \leq 2$$

ومنه

$$\begin{cases} U_n - 2 \leqslant 0 \\ U_n - 1 > 0 \\ 2U_n > 0 \end{cases}$$

وعليه

$$U_{n+1} - 1 - \frac{1}{2}(U_n - 1) \leqslant 0$$

وبالتالي

$$U_{n+1} - 1 \leqslant \frac{1}{2}(U_n - 1)$$

ب. إثبات أنّه : من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ ، $0 < U_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ثمّ استنتاج $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

لدينا

$$0 < U_0 - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0$$

ومن أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$\begin{cases} 0 < U_1 - 1 \leqslant \frac{1}{2}(U_0 - 1) \\ 0 < U_2 - 1 \leqslant \frac{1}{2}(U_1 - 1) \\ \vdots \\ 0 < U_n - 1 \leqslant \frac{1}{2}(U_{n-1} - 1) \end{cases}$$

ومنه

$$0 < (U_1 - 1) \times (U_2 - 1) \times \cdots \times (U_n - 1) \leqslant \frac{1}{2}(U_0 - 1) \times \frac{1}{2}(U_1 - 1) \times \cdots \times \frac{1}{2}(U_{n-1} - 1)$$

وعليه

$$0 < U_n - 1 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n (U_0 - 1)$$

وبالتالي

$$0 < U_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

بما أنّ $-1 < \frac{1}{2} < 1$ فإنّ

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

وبالتالي

$$\lim_{n\to+\infty}(U_n - 1) = 0$$

وبما أنّ (U_n) متقاربة فإنّ

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 1$$

3. بيّن أنّه : من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ ، $S_n \geq (n+1)(n+2)\log\sqrt{2}$

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$\begin{aligned}
S_n &= \log\frac{2}{U_0-1} + \log\frac{2}{U_1-1} + \cdots + \log\frac{2}{U_n-1} \\
&= \log\left(\frac{2}{U_0-1}\times\frac{2}{U_1-1}\times\cdots\times\frac{2}{U_n-1}\right) \\
&= \log\left[\frac{2\times2\times\cdots\times2}{(U_0-1)\times(U_1-1)\times\cdots\times(U_n-1)}\right] \\
&= \log\left[\frac{2^{n+1}}{(U_0-1)\times(U_1-1)\times\cdots\times(U_n-1)}\right]
\end{aligned}$$

ومن أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$0 < U_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ومنه

$$\begin{aligned}
0 < (U_0-1)\times(U_1-1)\times\cdots\times(U_n-1) &< \left(\frac{1}{2}\right)^0\times\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\cdots\times\left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&< \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}
\end{aligned}$$

وعليه

$$\frac{1}{(U_0-1)\times(U_1-1)\times\cdots\times(U_n-1)} > 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

وبالتالي

$$\frac{2^{n+1}}{(U_0-1)\times(U_1-1)\times\cdots\times(U_n-1)} > 2^{n+1}\times2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

ومنه

$$\begin{aligned}
S_n &> \log\left(2^{n+1}\times2^{\frac{n(n+1)}{2}}\right) \\
&> \log\left(2^{\frac{2(n+1)+n(n+1)}{2}}\right) \\
&> \frac{2(n+1)+n(n+1)}{2}\log 2 \\
&> (n+1)(n+2)\log\sqrt{2}
\end{aligned}$$

■

التمرين الرّابع (7 نق)

I) حساب $g(1)$ ثمّ استنتاج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$

لدينا

$$\begin{aligned} g(1) &= 1 - \ln 1 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

وعليه نستنتج ما يلي

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$+$	

II) 1. أ. حساب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ وتفسير النتيجة هندسيا ثمّ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) &= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \left(\frac{x+1}{x}\ln x\right) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

لأنّ

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{x+1}{x} = +\infty \end{cases}$$

وتُفسّر النتيجة هندسيا بأنّ المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ (حامل محور التراتيب) مقارب لـ (C_f)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1}{x}\ln x\right) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

لأنّ

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x} = 1 \end{cases}$$

ب. تبيين أنّه: من أجل كلّ x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x) = \dfrac{g(x)+2}{x^2}$ ثمّ تشكيل جدول تغيّرات f

f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left[1 \times \ln x + (x+1) \times \frac{1}{x}\right] x - 1 \times (x+1)\ln x}{x^2} \\ &= \frac{x\ln x + x + 1 - x\ln x - \ln x}{x^2} \\ &= \frac{x - \ln x + 1}{x^2} \\ &= \frac{x - \ln x - 1 + 2}{x^2} \\ &= \frac{g(x)+2}{x^2} \end{aligned}$$

من أجل كلّ x من $]0;+\infty[$ لدينا $x^2 > 0$ ، وعليه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)+2$ ، وبما أنّ $g(x) \geq 0$ على $]0;+\infty[$ فإنّ $g(x)+2 > 0$ على $]0;+\infty[$ ، أي $f'(x) > 0$ على $]0;+\infty[$ وعندئذ لدينا

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2. أ. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\ln x]$ ثمّ تفسير النتيجة هندسياً.

من أجل كلّ x من $]0;+\infty[$ لدينا

$$f(x)-\ln x=\frac{(x+1)\ln x}{x}-\ln x$$
$$=\frac{x\ln x+\ln x-x\ln x}{x}$$
$$=\frac{\ln x}{x}$$

وبما أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ فإنّ

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\ln x]=0$$

وتُفسّر النتيجة هندسياً بأنّ المنحنى (γ) مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

ب. دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (γ) المنحنى الممثّل للدّالة $\ln$

من أجل كلّ x من $]0;+\infty[$ لدينا

$$f(x)-\ln x=\frac{\ln x}{x}$$

وبما أنّ $x>0$ فإنّ إشارة الفرق من إشارة $\ln x$ وعندئذٍ لدينا

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-\ln x$	‖	$-$	0	$+$	

وبالتالي

- (C_f) يقع تحت (γ) على $]0;1[$
- (C_f) يقطع (γ) في النقطة $A(1;0)$
- (C_f) يقع فوق (γ) على $]1;+\infty[$

3. كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1

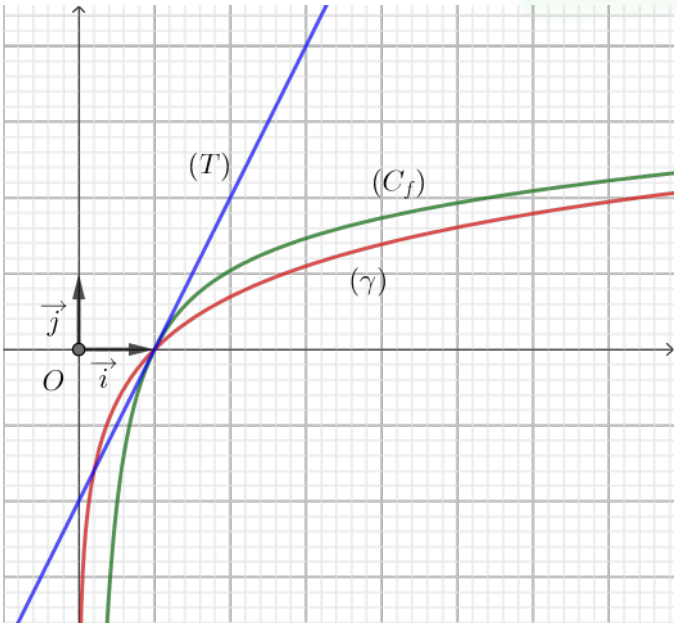
f قابلة للاشتقاق عند 1 ومنه (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه $f'(1)$ حيث

$$(T):y=f'(1)(x-1)+f(1)$$

وبما أنّ $f(1)=0$ و $f'(1)=2$ فإنّ

$$(T):y=2x-2$$

4. أ. إنشاء كُلّا من (T) ، (γ) و (C_f)



ب. مناقشة عدد حلول المعادلة $f(x)=2x-e^m$ بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m

حلول المعادلة بيانيا هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y=2x-e^m$ ،
بوضع $m'=-e^m$ نجد أنّ مجموعة قيم m' هي المجال $]-\infty;0[$ وعندئذ ينتج ما يلي

في حالة	قيم m	عدد حلول المعادلة
$m'<-2$	$m\in]\ln 2;+\infty[$	حلّان
$m'=-2$	$m=\ln 2$	حلّ واحد
$-2<m'<0$	$m\in]-\infty;\ln 2[$	لا توجد حلول

5. تعيين قيمة λ التي يكون من أجلها $\mathcal{S}(\lambda)=2\,(u.a)$

f مستمرّة على $[1;+\infty[$ و $f(x)-\ln x\geq 0$ على $[1;+\infty[$ ولدينا

$$\int_1^{\lambda}[f(x)-\ln x]dx=\int_1^{\lambda}\left(\frac{1}{x}\times\ln x\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^{\lambda}$$
$$=\frac{1}{2}(\ln\lambda)^2-\frac{1}{2}(\ln 1)^2$$
$$=\frac{1}{2}(\ln\lambda)^2$$

وبالتالي

$$\mathcal{S}(\lambda)=\frac{1}{2}(\ln\lambda)^2\,(u.a)$$

وعندئذ لدينا

$$\frac{1}{2}(\ln\lambda)^2=2$$

وذلك يكافئ

$$(\ln\lambda)^2=4$$

ويكافئ

$$|\ln\lambda|=2$$

وبما أنّ $\lambda>1$ فإنّ $\ln\lambda=2$ ، وعليه $\lambda=e^2$

6. دراسة اتجاه تغيّر الدّالة k على $\mathbb{R}$ ثمّ تشكيل جدول تغيّراتها.

الدّالة k قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $k'(x)=-e^{-x}\times f'(e^{-x})$ ، من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ لدينا $e^{-x}f'(e^{-x})>0$
وعليه $k'(x)<0$ على $\mathbb{R}$ ، وبالتالي k متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.
ولدينا

$$\lim_{x\to+\infty}k(x)=\lim_{x\to+\infty}f\left(e^{-x}\right)$$
$$=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}k(x)=\lim_{x\to-\infty}f\left(e^{-x}\right)$$
$$=+\infty$$

وبالتالي

x	$-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$
$k(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$

سلّم تنقيط الموضوع الأوّل

التمرين الأوّل (4 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
I) 1.أ	0, 75
I) 1.ب	0, 5
I) 2	0, 5
II) 1.أ	1
II) 1.ب	1
II) 2	0, 25

التمرين الثاني (4 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
1.أ	0, 75
1.ب	1
2	1
3.أ	0, 75
3.ب	0, 5

التمرين الثالث (5 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
I) 1	0, 5
II) 1.أ	1
II) 1.ب	1
II) 2.أ	0, 5
II) 2.ب	0, 5 + 1
II) 3	0, 5

التمرين الرابع (7 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
I) 1	0, 75
II) 1.أ	1
II) 1.ب	1, 5
II) 2.أ	0, 5
II) 2.ب	0, 5
II) 3	0, 5
II) 4.أ	1
II) 4.ب	0, 25
II) 5	0, 5
II) 6	0, 5

إجابة نموذجية مقترحة للموضوع الثاني

التمرين الأوّل (6 نق)

I) 1. حساب احتمال كلّا من الحدثين A و B

$$P(A)=\frac{C_7^4}{C_{10}^4}=\frac{35}{210}=\frac{1}{6}$$

$$P(B)=\frac{C_4^1\times C_3^1\times C_2^1\times C_1^1}{C_{10}^4}=\frac{24}{210}=\frac{4}{35}$$

2. تبيين أنّ $P(A\cap B)=\frac{1}{35}$ ، ثمّ استنتاج $P\left(\overline{A\cup B}\right)$

لدينا

$$P(A\cap B)=\frac{C_3^1\times C_2^1\times C_1^1\times C_1^1}{C_{10}^4}=\frac{6}{210}=\frac{1}{35}$$

ومنه

$$\begin{aligned}P\left(\overline{A\cup B}\right)&=1-P(A\cup B)\\&=1-[P(A)+P(B)-P(A\cap B)]\\&=1-\left(\frac{1}{6}+\frac{4}{35}-\frac{1}{35}\right)\\&=\frac{157}{210}\end{aligned}$$

II) 1. أ. تبرير أنّ مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي $\{1;2;3;4\}$

لدينا

$$\begin{cases}0+0+0+1=1\\0+0+1+1=2\\0+1+1+1=3\\1+1+1+1=4\end{cases}$$

وعليه مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي $\{1;2;3;4\}$

ب. تعيين قانون احتمال المتغيّر العشوائي X ثمّ حساب أمله الرياضياتي.

لدينا

$$P(X=1)=\frac{C_3^3\times C_7^1}{C_{10}^4}=\frac{7}{210}=\frac{1}{30}$$

$$P(X=2)=\frac{C_3^2\times C_7^2}{C_{10}^4}=\frac{63}{210}=\frac{3}{10}$$

وأيضاً

$$P(X=3)=\frac{C_3^1\times C_7^3}{C_{10}^4}=\frac{105}{210}=\frac{1}{2}$$

$$P(X=4)=P(A)=\frac{35}{210}=\frac{1}{6}$$

وبالتالي

x_i	1	2	3	4	المجموع
$P(X=x_i)$	$\frac{7}{210}$	$\frac{63}{210}$	$\frac{105}{210}$	$\frac{35}{210}$	1

وعندئذ نستنتج أنّ

$$E(X)=1\times\frac{7}{210}+2\times\frac{63}{210}+3\times\frac{105}{210}+4\times\frac{35}{210}=\frac{14}{5}$$

2. حساب احتمال الحدث $(X+1\equiv 0\,[2])$

لدينا

$$X+1\equiv 0\,[2]$$

وذلك يكافئ

$$X\equiv -1\,[2]$$

ويكافئ

$$X\equiv 1\,[2]$$

ومنه

$$X=1 \quad \text{أو} \quad X=3$$

وبالتالي

$$P(X+1\equiv 0\,[2])=P(X=1)+P(X=3)=\frac{7}{210}+\frac{105}{210}=\frac{8}{15}$$

■

التمرين الثاني (4 نق)

1. الاقتراح الصحيح هو ج

التبرير. المعادلة

$$\overline{z}^2+2\overline{z}+4=0$$

تكافئ

$$\overline{z^2+2\overline{z}+4}=0$$

وتكافئ

$$\overline{\overline{z}}^2+2\overline{\overline{z}}+4=0=0$$

وتكافئ

$$z^2 + 2z + 4 = 0$$

ولدينا

$$\begin{aligned}\Delta &= 2^2 - 4 \times 1 \times 4\\ &= -12\\ &= 12i^2\end{aligned}$$

عندئذ للمعادلة حلّان z_1 و z_2 حيث

$$z_1 = \frac{-2 - 2i\sqrt{3}}{2 \times 1} = -1 - i\sqrt{3} \qquad \left| \qquad z_2 = \overline{z_1} = -1 + i\sqrt{3}\right.$$

2. الاقتراح الصحيح هو ج

التبرير. لدينا

$$\begin{aligned}z &= \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\\ &= e^{\frac{i\pi}{12}}\end{aligned}$$

وعليه

$$\begin{aligned}z^{1962} &= \left(e^{\frac{i\pi}{12}}\right)^{1962}\\ &= e^{i\left(2\pi\times 81+\pi+\frac{\pi}{2}\right)}\\ &= e^{i\frac{3\pi}{2}}\\ &= e^{-i\frac{\pi}{2}}\\ &= -i\end{aligned}$$

وبالتالي العدد z^{1962} تخيّلي صرف.

3. الاقتراح الصحيح هو ج

التبرير لدينا

$$|z| = 1$$

ومنه

$$|z|^2 = 1$$

وعليه

$$z \times \overline{z} = 1$$

وبما أنّ

$$z \neq 0$$

فإنّ

$$z = \frac{1}{\overline{z}}$$

ومنه

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\overline{z}} - i\right| &= \left|\frac{1 - i\overline{z}}{\overline{z}}\right|\\ &= \frac{|1 - i\overline{z}|}{|\overline{z}|}\\ &= \frac{|i\overline{z} - 1|}{|z|}\end{aligned}$$

$$\left|\frac{1}{\bar{z}}-i\right| = \frac{|i\bar{z}-1|}{1}$$
$$= |i(\bar{z}+i)|$$
$$= |i| \times |\bar{z}+i|$$
$$= 1 \times |\bar{z}+i|$$
$$= |\bar{z}+i|$$

أي

$$|z-i| = |\bar{z}+i|$$

4. الاقتراح الصحيح هو ب

التبرير لدينا

$$z = 1+e^{\frac{i\pi}{4}}$$
$$= e^{\frac{i\pi}{8}}\left(e^{-\frac{i\pi}{8}}+e^{\frac{i\pi}{8}}\right)$$
$$= 2\cos\frac{\pi}{8}e^{\frac{i\pi}{8}}$$

وعليه

$$\arg z \equiv \frac{\pi}{8}\,[2\pi]$$

■

التمرين الثالث (5 نق)

1. أ. إثبات أنّ المتتالية (V_n) هندسية أساسها 2 وتعيين حدّها الأوّل.

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$V_{n+1} = 2U_{n+1}-6(n+1)-4$$
$$= 2(2U_n-3n+1)-6n-6-4$$
$$= 4U_n-6n+2-6n-10$$
$$= 4U_n-12n-8$$
$$= 2(2U_n-6n-4)$$
$$= 2V_n$$

ومنه (V_n) هندسية أساسها 2 وحدّها الأوّل V_0 حيث

$$V_0 = 2U_0-6\times 0-4$$
$$= 2\times 3-4$$
$$= 2$$

ب. كتابة V_n بدلالة n ثم استنتاج U_n بدلالة n

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$V_n = V_0\times 2^{n-0}$$
$$= 2\times 2^n$$
$$= 2^{n+1}$$

ولدينا

$$V_n = 2U_n-6n-4$$

ومنه

$$U_n = \frac{1}{2}(V_n+6n+4)$$
$$= \frac{1}{2}(2^{n+1}+6n+4)$$
$$= 2^n+3n+2$$

ج. تبيين أنّه : من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ ، $2S_n = 2^{n+2} + 3n^2 + 7n + 2$

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$\begin{aligned} S_n &= 2^0 + 3\times 0 + 2 + 2^1 + 3\times 1 + 2 + \cdots + 2^n + 3n + 2 \\ &= 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n + 3\left(0 + 1 + \cdots n\right) + 2\left(n+1\right) \\ &= 1 \times \frac{2^{n-0+1} - 1}{2-1} + \frac{3n\left(n+1\right)}{2} + 2n + 2 \\ &= 2^{n+1} + \frac{3n^2 + 3n}{2} + 2n + 1 \end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned} 2S_n &= 2^{n+2} + 3n^2 + 3n + 4n + 2 \\ &= 2^{n+2} + 3n^2 + 7n + 2 \end{aligned}$$

2. أ. دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7 تبعا لقيم العدد الطبيعي n

لدينا

$$\begin{cases} 2^0 \equiv 1\,[7] \\ 2^1 \equiv 2\,[7] \\ 2^2 \equiv 4\,[7] \\ 2^3 \equiv 1\,[7] \end{cases}$$

وعليه من أجل كلّ عدد طبيعي k لدينا

$$\begin{cases} 2^{3k} \equiv 1\,[7] \\ 2^{3k+1} \equiv 2\,[7] \\ 2^{3k+2} \equiv 4\,[7] \end{cases}$$

ب. استنتاج باقي القسمة الإقليدية للعدد $2025^{2024} + 1962^{1954} + 1444^{1446}$ على 7

لدينا

$1444 \equiv 2\,[7]$

ومنه

$$\begin{aligned} 1444^{1446} &\equiv 2^{1446}\,[7] \\ &\equiv 2^{3\times 482}\,[7] \\ &\equiv 1\,[7] \end{aligned}$$

لدينا

$1962 \equiv 2\,[7]$

ومنه

$$\begin{aligned} 1962^{1954} &\equiv 2^{1954}\,[7] \\ &\equiv 2^{3\times 651+1}\,[7] \\ &\equiv 2\,[7] \end{aligned}$$

لدينا

$2025 \equiv 2\,[7]$

ومنه

$$\begin{aligned} 2025^{2024} &\equiv 2^{2024}\,[7] \\ &\equiv 2^{3\times 674+2}\,[7] \\ &\equiv 4\,[7] \end{aligned}$$

وعليه

$$\begin{aligned} 2025^{2024} + 1962^{1954} + 1444^{1446} &\equiv 4 + 2 + 1\,[7] \\ &\equiv 7\,[7] \\ &\equiv 0\,[7] \end{aligned}$$

وبالتالي باقي القسمة الإقليدية للعدد $2025^{2024} + 1962^{1954} + 1444^{1446}$ على 7 هو 0.

3. أ. تعيين الأعداد الطبيعية n التي تحقّق $2S_{3n} + U_{3n} - 3 \equiv 0\,[7]$

لدينا

$$\begin{aligned} 2S_{3n} + U_{3n} - 3 &\equiv 2^{3n+2} + 3\times(3n)^2 + 7\times 3n + 2 + 2^{3n} + 3\times 3n + 2 - 3\,[7] \\ &\equiv 2^{3n+2} + 27n^2 + 2^{3n} + 9n + 1\,[7] \\ &\equiv 4 - n^2 + 1 + 2n + 1\,[7] \\ &\equiv -n^2 + 2n + 6\,[7] \\ &\equiv -n^2 + 2n - 1\,[7] \\ &\equiv -(n-1)^2\,[7] \end{aligned}$$

ومنه

$$-(n-1)^2 \equiv 0\,[7]$$

وعليه

$$(n-1)^2 \equiv 0\,[7]$$

وبالتالي

$$n-1 \equiv 0\,[7]$$

ومنه

$$n \equiv 1\,[7]$$

وينتج عن ذلك أنّ $n = 7k+1$ حيث $k \in \mathbb{N}$

■

التمرين الرابع (7 نق)

I) 1. تبيين أنّ g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا

$$g'(x) = 1 + 2e^{-x}$$

من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ لدينا $1 + 2e^{-x} > 0$ ، أي $g'(x) > 0$ على $\mathbb{R}$ ، ومنه g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

2. أ. تبيين أنّ المعادلة $g(x) = -1$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $0,3 < \alpha < 0,4$

- g مستمرة على $\mathbb{R}$
- g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$
- لدينا

$$g(0,3) \approx -1,18 \qquad | \qquad g(0,4) \approx -0,94$$

ومنه $g(0,3) < -1 < g(0,4)$

عندئذ نستنتج أنّ المعادلة $g(x) = -1$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $0,3 < \alpha < 0,4$.

ب. استنتاج إشارة $g(x)+1$ حسب قيم العدد الحقيقي x

- g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$
- $g(\alpha) + 1 = 0$

عندئذ نستنتج ما يلي

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)+1$		$-$	0	$+$	

II) 1. أ. تبيين أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ثمّ حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (xe^x - 2x + 1)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left[x\left(e^x - 2 + \frac{1}{x}\right)\right]$$
$$= +\infty$$

لأنّ

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (xe^x - 2x + 1)$$
$$= +\infty$$

لأنّ

$$\lim_{x\to-\infty} (xe^x) = 0$$

ب. تبيين أنّه من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{1+g(x)}{e^{-x}}$

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1\times e^x + e^x \times x - 2 \\ &= e^x + xe^x - 2 \\ &= e^x\left(1+x-\frac{2}{e^x}\right) \\ &= \frac{1+x-2e^{-x}}{e^{-x}} \\ &= \frac{1+g(x)}{e^{-x}} \end{aligned}$$

ج. استنتاج اتجاه تغيّر f على $\mathbb{R}$ ثمّ تشكيل جدول تغيّراتها.

من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ لدينا $e^{-x}>0$ ، ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $1+g(x)$ وعندئذ لدينا

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

- $f'(x)<0$ على $]0;\alpha[$ و $f'(\alpha)=0$ ومنه f متناقصة تماما على $]-\infty;\alpha]$
- $f'(x)>0$ على $]\alpha;+\infty[$ و $f'(\alpha)=0$ ومنه f متزايدة تماما على $[\alpha;+\infty[$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

2. أ. تبيين أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-2x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$

من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$f(x)-(-2x+1)=xe^x$$

بما أنّ

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$$

فإنّ

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-2x+1)\right]=0$$

وبالتالي المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-2x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$

ب. دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$f(x)-(-2x+1)=xe^x$$

وبما أنّ $e^x>0$ على $\mathbb{R}$ فإنّ إشارة الفرق من إشارة x وعندئذ لدينا

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-x$		$-$	0	$+$	

وبالتالي

- (C_f) يقع تحت (Δ) على $]-\infty;0[$
- (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(0;1)$
- (C_f) يقع فوق (Δ) على $]0;+\infty[$

3. كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور التراتيب.

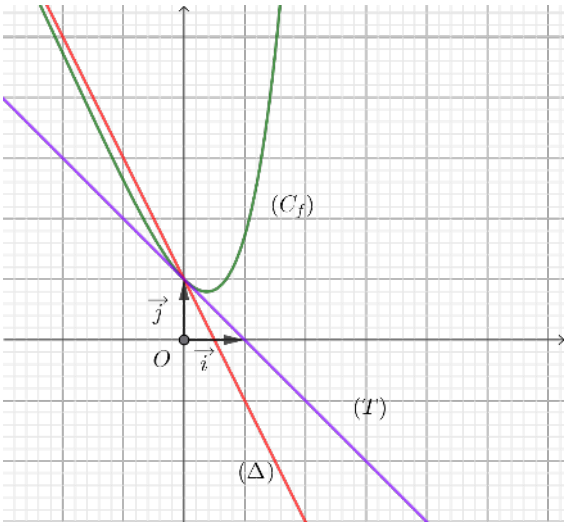
f قابلة للاشتقاق عند 0 ومنه (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه $f'(0)$ حيث

$$(T): y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

وبما أنّ $f(0) = 1$ و $f'(0) = -1$ فإنّ

$$(T): y = -x + 1$$

4. أ. إنشاء كُلّا من (Δ) ، (T) و (C_f) (نأخذ $f(\alpha) \approx 0,8$)



ب. مناقشة عدد حلول المعادلة $f(x) = -|m|x$ حسب قيم الوسيط الحقيقي m

حلول المعادلة بيانيا هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ_m) حيث

$$(\Delta_m): y = -|m|x$$

بوضع $m' = -|m|$ نجد أنّ مجموعة قيم m' هي المجال $]-\infty; 0]$ وعندئذ ينتج ما يلي

في حالة	قيم m	عدد حلول المعادلة
$m' \leq -2$	$m \in]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$	حلّ واحد
$-2 < m' < -1$	$m \in]-2; -1[\cup]1; 2[$	حلّان
$m' = -1$	$m \in \{-1; 1\}$	حلّ واحد
$-1 < m' \leq 0$	$m \in]-1; 1[$	حلّان

5. حساب $\int_{\lambda}^{0} xe^x dx$ باستعمال المكاملة بالتجزئة ثمّ استنتاج أنّ $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \mathcal{A}(\lambda) = 1\,(u.a)$

$$\int_{\lambda}^{0} xe^x dx = [xe^x]_{\lambda}^{0} - \int_{\lambda}^{0} e^x dx$$

$$= 0 \times e^0 - \lambda e^{\lambda} - [e^x]_{\lambda}^{0}$$

$$= -\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda} - e^0$$

$$= -\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda} - 1$$

ولدينا f مستمرّة على $\mathbb{R}$ و $f(x) - (-2x+1) \leq 0$ على $]-\infty; 0]$ ، وأيضاً

$$\int_{\lambda}^{0} [f(x) - (-2x+1)]dx = \int_{\lambda}^{0} xe^x dx$$

$$= -\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda} - 1$$

وعليه

$$\mathcal{A}(\lambda) = (1 + \lambda e^{\lambda} - e^{\lambda})\,(u.a)$$

وبالتالي

$$\lim_{\lambda \to -\infty} \mathcal{A}(\lambda) = 1(u.a)$$

لأنّ

$$\begin{cases} \lim\limits_{\lambda \to -\infty} (\lambda e^{\lambda}) = 0 \\ \lim\limits_{\lambda \to -\infty} e^{\lambda} = 0 \end{cases}$$

سلّم تنقيط الموضوع الثاني

التمرين الأوّل (4 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
I) 1.أ	0,75
I) 1.ب	0,5
I) 2	0,5
II) 1.أ	1
II) 1.ب	1
II) 2	0,25

التمرين الثاني (4 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
1	$0,5+0,5$
2	$0,5+0,5$
3	$0,5+0,5$
4	$0,5+0,5$

التمرين الثالث (5 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
1.أ	1
1.ب	1
1.ج	0,75
2.أ	1
2.ب	0,75
3	0,5

التمرين الرابع (7 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
I) 1	0, 5
I) 2.أ	0, 5
I) 2.ب	0, 5
II) 1.أ	0, 75
II) 1.ب	0, 75
II) 1.ج	0, 75
II) 2.أ	0, 5
II) 2.ب	0, 5
II) 3	0, 5
II) 4.أ	1
II) 4.ب	0, 25
II) 5	0, 5

■ انتهى

يكتمل الملف بملاحظات القرّاء الكرام، لذلك في حالة وجود أي خلل في الحل يُرجى مُراسلتنا به بغية تصويبه لفائدة التلاميذ المقبلين على امتحان شهادة البكالوريا وذلك عن طريق البريد الإلكتروني prof.ardjani@gmail.com وجزاكم الله خيرا