

على المترشح اختيار احد الموضوعين الموضوع الاول

التمرين الأول : (4ن)

يراد عشوائيا اختيار لجنة تضم مسؤول للقسم ونائبه الاول والثاني . من بين المترشحين يوجد خمس مترشحين ذكور من بينهم مترشح اسمه رياض وأربع مترشحات إناث .

1. احسب احتمال الحوادث التالية :

A : "مسؤول القسم ونائبيه كلهم ذكور" B : "رياض ضمن اللجنة المختارة"

C : "رياض هو مسؤول القسم"

2. بين أن $P(A \cap C) = \frac{1}{42}$ ثم استنتج $P(A \cup C)$.

3. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل لجنة مختارة عدد الإناث اللواتي تضمهم اللجنة .

(ا) عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضياتي.

4. احسب احتمال الحدث $(\log X > 0)$.

التمرين الثاني : (5ن)

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (t_n) المعرفتين بحددهما الاول $u_0 = 3$ و $t_0 = 1$ ومن اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 2u_n - 1$ و $t_{n+1} = 2t_n + 3$.

1. (ا) برهن بالتراجع أنه من أجل عدد طبيعي n ، $u_n = 2^{n+1} + 1$.

(ب) هل العددا u_n و u_{n+1} أوليان فيما بينهما.

2. (ا) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 5.

(ب) استنتج باقي قسمة العدد 1447^{2025} على 5 .

3. (ا) برهن بالتراجع أنه من أجل عدد طبيعي n ، $2u_n - t_n = 5$ ، ثم استنتج عبارة t_n بدلالة n .

(ب) عين القيم الممكنة للعدد $PGCD(u_n, t_n)$.

(ج) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $PGCD(u_n, t_n) = 5$.

التمرين الثالث : (4ن)

لكل سؤال من الأسئلة التالية جواب واحد صحيح فقط ، عينه مع التعليل.

1. الشكل الجبري للعدد المركب $z = \frac{7+3i}{5-2i}$ هو:

أ) $1+i$ ب) $1-i$ ج) $\frac{7}{5} - \frac{3}{2}i$

2. مجموعة حلول المعادلة $z = \frac{z-2}{z-1}$ في $\mathbb{C}$ هي :

أ) $\{1+i\}$ ب) $\emptyset$ ج) $\{1-i; 1+i\}$

3. إذا كان $z = -\sqrt{3} + e^{i\frac{\pi}{6}}$ فإن الشكل الأسّي ل z هو :

أ) $e^{i\frac{5\pi}{6}}$ ب) $e^{i\frac{5\pi}{3}}$ ج) $\sqrt{3}e^{i\frac{-\pi}{6}}$

4. الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $y'' = 2(e^x + 1 - \frac{1}{x^2})$ والذي يحقق $f(1) = 2e + 1$ و $f'(1) = 2e + 4$ هي الدالة f بحيث:

أ) $f(x) = 2e^x + 2\ln x + x^2$ ب) $f(x) = 2e^x + x^2 + 1$ ج) $f(x) = e^{2x} + 2\ln x + x^2 + 1$

التمرين الرابع : (7ن)

I) لتكن الدالتان g و h المعرفتان على المجال $]-1; +\infty[$ ب $g(x) = (2x-1)\ln(x+1)$ و $h(x) = \frac{-x^2+x}{x+1}$ وليكن (C_h) و (C_g) على

الترتيب تمثيلهما في المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ و α فاصلة نقطة تقاطعهما كما هو موضح في الشكل المقابل .

1. بقراءة بيانية عين الوضع النسبي للمنحنيين (C_h) و (C_g) .

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1; +\infty[$ ب $f(x) = (x^2 - x)\ln(x+1)$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم بين أن $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$ واستنتج أن (C_f)

يقبل مستقيم مقارب (T) يطلب تعيين معادلته .

2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $f'(x) = g(x) - h(x)$.

3. استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4. عين نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل .

5. أنشئ (T) والمنحنى (C_f) . (يعطى $\alpha \simeq 0,64$ و $f(\alpha) \simeq -0,11$)

III) لتكن الدالة k المعرفة على $]-1; +\infty[$ ب $k(x) = -f(x)$.

1. اشرح كيف يمكن إنشاء (C_k) التمثيل البياني للدالة k انطلاقا من (C_f) ثم أنشئه على نفس المعلم .

2. أثبت أن الدالة F المعرفة ب $F : x \mapsto (\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{6})\ln(x+1) - \frac{x^3}{9} + \frac{5x^2}{12} - \frac{5x}{6}$ دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1; +\infty[$

3. استنتج ب cm^2 مساحة الحيز المستوي المحصور بالمنحنى (C_f) ، (C_k) و المستقيمت التي معادلتها $x = 0$ و $x = \alpha$.

إنتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (4ن)

يحتوي كيس على أربع كريات بيضاء مرقمة 0، 2، 7 و 3- و ثلاث كريات خضراء مرقمة 0 و 7 و 4 و كرتان حمراء مرقمة 2 و 4 (الكريات لا نفرق بينها باللمس) نسحب كرتين عشوائيا في ان واحد.

1. احسب احتمال الحوادث التالية :
A : "سحب كرتين من نفس اللون"
B : "سحب كرتين رقمهما متوافقان بترديد 5"
C : "سحب كرتين جداء أرقامهما معدوم"
2. بين أن $P(A \cap C) = \frac{5}{36}$ ثم استنتج $P(A \cup C)$.
3. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات ذات رقم زوجي الباقية في الكيس .
(ا) عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X .
(ب) احسب الامل الرياضي و التباين للمتغير العشوائي X .
4. عين قيمتي العددين الحقيقيين α و β حتى يكون $E(\alpha X + \beta) = 0$ و $V(\alpha X + \beta) = \frac{7}{2}$.

التمرين الثاني : (5ن)

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بحددها الأول $u_1 = \frac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1} = \left(\frac{n+1}{2n}\right) u_n$

1. (ا) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n > 0$
(ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة.
2. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $v_n = \frac{u_n}{n}$.
(ا) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.
(ب) أكتب كلا من v_n ثم u_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
3. نعتبر المتتالية (t_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $t_n = \ln(v_n)$.
(ا) برهن أن المتتالية (t_n) حساية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .
(ب) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = (v_1 + t_1) + (v_2 + t_2) + \dots + (v_n + t_n) + t_{n+1} + t_{n+2} + \dots + t_{2n}$

التمرين الثالث : (4ن)

1. (ا) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 7.
(ب) برهن أن العدد $1954^{1962} - 2 \times 1446^{2025} + 2025^{1446}$ يقبل القسمة على 7.

2. نعتبر في مجموعه الاعداد الصحيحه $\mathbb{Z}$ المعادلة (E) ذات المجهولين $(x; y)$ التالية

$$74x - 9y = 204 \quad \dots(E)$$

- (ا) عين الحل الخاص $(x_0; y_0)$ للمعادلة (E) الذي يحقق $x_0 - y_0 = 1$
(ب) استنتج حلول المعادلة (E) في $\mathbb{Z}^2$.

(ج) حل العدد 204 إلى جداء عوامل أولية ثم استنتج القيم الممكنة لـ $PGCD(x; y)$ حيث الثنائية $(x; y)$ حل للمعادلة (E) .

التمرين الرابع : (7ن)

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $g(x) = (2x + 1)e^x - 1$.

1. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

2. ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

3. احسب $g(0)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x(e^x - 1)^2$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2. (ا) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

(ب) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

3. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = (e^x - 1)g(x)$.

4. استنتج اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

5. اكتب معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 والمار من مبدأ المعلم.

6. أنشئ كلا من (T) ، (Δ) و (C_f) .

7. (ا) تحقق أن دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة h حيث $h(x) = x - f(x)$

(ب) احسب $\int_0^{\ln 2} h(x) dx$ ثم فسر النتيجة بانياء.

إنهى الموضوع الثاني

تصحيح الموضوع الأول

التمرين الأول (04 نقاط)

FB: P.Mohamed Maths

1. حساب احتمال الجواث : $P(A) = \frac{A_5^3}{A_9^3} = \frac{5}{42}$

$$\bullet P(C) = \frac{A_1^1 \cdot A_8^2}{A_9^3} = \frac{1}{9} \quad \bullet P(B) = \frac{3 \cdot A_1^1 \cdot A_8^2}{A_9^3} = \frac{1}{3}$$

2. تبين أن $P(A \cap C) = \frac{1}{42}$ ثم استنتاج $P(A \cup C)$:

$$\bullet P(A \cap C) = \frac{A_1^1 \cdot A_4^2}{A_9^3} = \frac{1}{42}$$

$$\bullet P(A \cup C) = P(A) + P(B) - P(A \cap C) = \frac{13}{63}$$

3. تعيين قانون الإحتمال :

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{42}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{21}$

$$P(X = 1) = \frac{3A_4^1 \cdot A_5^2}{A_9^3} = \frac{10}{21}$$

بنفس الطريقة نعين احتمال تحقق بقية المخارج.

4. حساب الأمل الرياضي و التباين :

لدينا

$$\bullet E(X) = \sum_{i=1}^4 x_i \cdot p_i = \frac{4}{3}$$

5. حساب احتمال الحدث $(\log X > 0)$:لدينا $(\log X > 0)$ تكافئ $(X > 10^0)$ أي $(X > 1)$ و عليه

$$P(\log X > 0) = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{17}{42}$$

التمرين الثاني (05 نقطة)

FB: P.Mohamed Maths

1. البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 2^{n+1} + 1$ نضع : $P(n) : u_n = 2^{n+1} + 1$ • لما $n = 0$ لدينا $u_0 = 3$ ومنه $P(0)$ محققة.• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي كافي n ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+1} = 2^{n+2} + 1$

البرهان:

لدينا

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= 2u_n - 1 \\&= 2(2^{n+1} + 1) - 1 \\&= 2^{n+2} + 1\end{aligned}$$

و منه حسب مبدأ البرهان بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n $u_n = 2^{n+1} + 1$.

2. هل العددين u_n و u_{n+1} أوليان فيما بينهما :

لدينا $u_{n+1} = 2u_n - 1$ و منه $-u_{n+1} + 2u_n = 1$ و منه حسب مبرهنة بيزو العددين u_n و u_{n+1} أوليان فيما بينهما.

3. تحديد بواقي قسمة 2^n و على 5 :

$n =$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
حيث $k \in \mathbb{Z}$	1	2	4	3
	باقي قسمة 2^n على 5			

4. استنتاج باقي قسمة العدد 1447^{2025} على 5 :

$$\text{لدينا} \quad \begin{cases} 1447 \equiv 2^2 [5] \\ 2025 = 4 \times 506 + 1 \end{cases} \text{ و عليه}$$

$$1447^{2025} \equiv 2^{4 \times 506 + 1} [5]$$

$$1447^{2025} \equiv 2 [5]$$

5. البرهان بالتراجع أنه من أجل عدد طبيعي n ، $2u_n - t_n = 5$:

نضع : $P(n) : 2u_n - t_n = 5$

• لما $n = 0$ لدينا $2u_0 - t_0 = 5$ ومنه $P(0)$ محققة.

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي كافي n ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $2u_{n+1} - t_{n+1} = 5$.

البرهان:

لدينا

$$\begin{aligned}2u_{n+1} - t_{n+1} &= 2(2u_n - 1) - (2t_n + 3) \\&= 2(2u_n - t_n) - 5 \\&= 2 \times 5 - 5 \\&= 5\end{aligned}$$

و منه حسب مبدأ البرهان بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n $2u_n - t_n = 5$.

استنتاج عبارة t_n بدلالة n

لدينا $2u_n - t_n = 5$ و منه $t_n = 2u_n - 5$ أي $t_n = 2^{n+2} - 3$.

6. تعيين القيم الممكنة للعدد $PGCD(u_n, t_n)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} d \mid 2^{n+1} + 1 \\ d \mid 2^{n+2} - 3 \end{array} \right. \text{ نضع } PGCD(u_n, t_n) = d \text{ عليه و منه } d \mid 2(2^{n+1} + 1) - (2^{n+2} - 3) \text{ أي } d \mid 5$$

و منه $d \in \{1, 5\}$

7. تعيين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها: $PGCD(u_n, t_n) = 5$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2^{n+1} \equiv 4 [5] \\ 2^{n+2} \equiv 3 [5] \end{array} \right. \text{ أي } \left\{ \begin{array}{l} 2^{n+1} + 1 \equiv 0 [5] \\ 2^{n+2} - 3 \equiv 0 [5] \end{array} \right. \text{ و منه } \left\{ \begin{array}{l} 5 \mid 2^{n+1} + 1 \\ 5 \mid 2^{n+2} - 3 \end{array} \right. \text{ معناه } PGCD(u_n, t_n) = 5$$

$n =$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
باقي قسمة 2^n على 5	1	2	4	3
باقي قسمة 2^{n+1} على 5	2	4	3	1
باقي قسمة 2^{n+2} على 5	4	3	1	2

مما سبق :

ومنه $PGCD(u_n, t_n) = 5$ من أجل $n = 4k+1$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

التمرين الثالث (04 نقاط)

FB: P.Mohamed Maths

1. الشكل الجبري للعدد المركب $z = \frac{7+3i}{5-2i}$ هو: (أ) $1+i$

2. مجموعة حلول المعادلة $z = \frac{z-2}{z-1}$ في $\mathbb{C}$ هي: (ج) $\{1-i; 1+i\}$

3. إذا كان $z = -\sqrt{3} + e^{i\frac{\pi}{6}}$ فإن الشكل الأسّي ل z هو: (أ) $e^{i\frac{5\pi}{6}}$

4. الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $y'' = 2(e^x + 1 - \frac{1}{x^2})$ والذي يحقق $f(1) = 2e+1$ و $f'(1) = 2e+4$ هي الدالة

f بحيث: (أ) $f(x) = 2e^x + 2\ln x + x^2$

التمرين الرابع (07 نقطة)

FB: P.Mohamed Maths

1. النهايات :

• لما $x \in]-1, 0[\cup]\alpha; +\infty[$ فوق (C_h) .

• لما $x \in]0, \alpha[$ تحت (C_h) .

• (C_g) بقطع (C_h) في نقطتين فاصلتهما 0 و α .

2. النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x) \ln(x+1) = +\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} [(x+1)(x-2) + 2] \ln(x+1) \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} [(x+1)(x-2) \ln(x+1) + 2 \ln(x+1)] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} [(t-3)t \ln(t) + 2 \ln(t)] \\ &= -\infty \end{aligned}$$

3. تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = (e^x - 1)g(x)$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على D_f و لدينا:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x-1) \ln(x+1) + \frac{1}{x+1} (x^2 - x) \\ &= g(x) - h(x) \end{aligned}$$

4. إتجاه تغير الدالة f :

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-1, 0[$ و على المجال $]\alpha; +\infty[$ و متناقصة تماما على المجال $]0, \alpha[$.

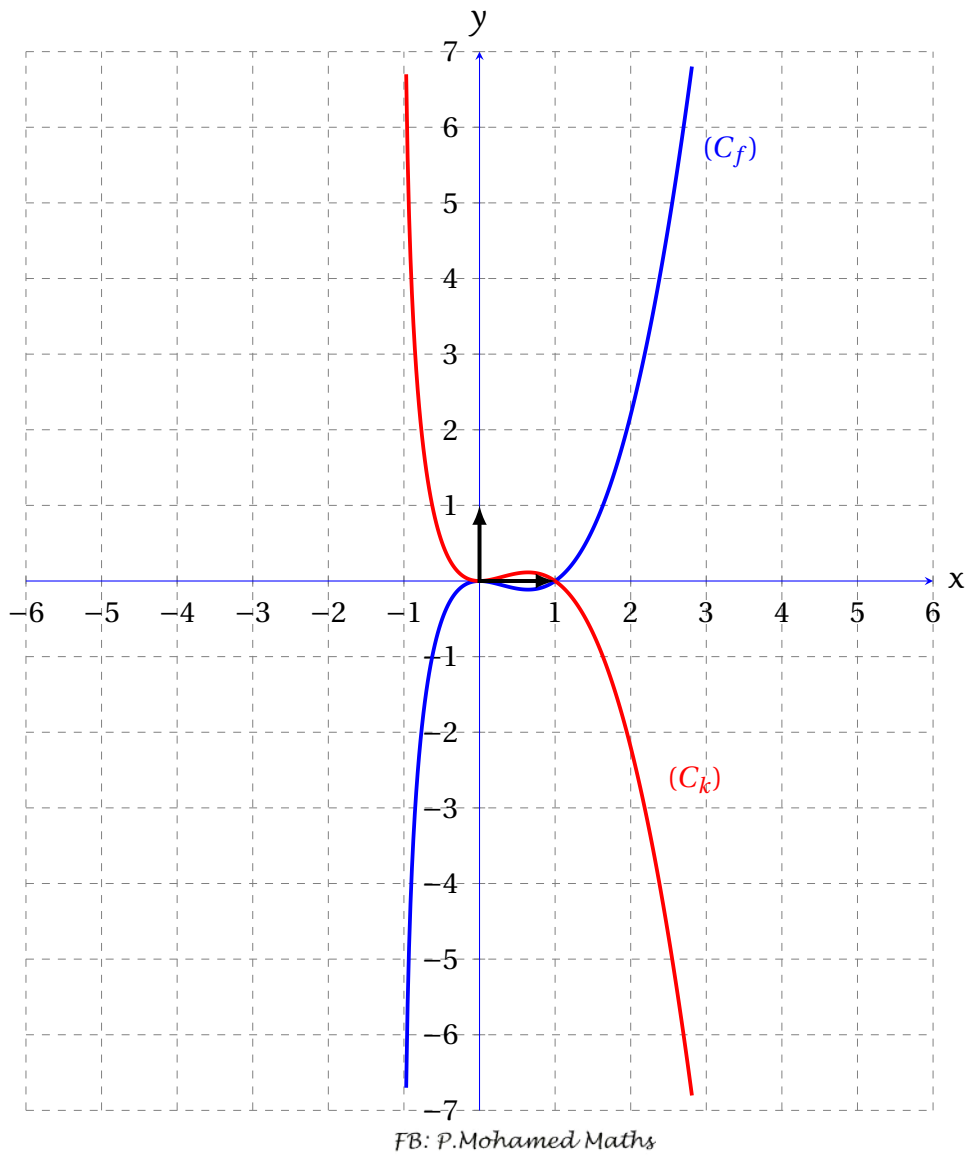
• جدول التغيرات :

x	-1	0	α	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	0	2	$+\infty$	

5. إشارة $g(x)$:

نحل المعادلة $f(x) = 0$ أي $(x^2 - x) \ln(x+1) = 0$ و منه $(x^2 - x) = 0$ أو $\ln(x+1) = 0$ و منه (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين $(0; 0)$ و $(1; 0)$.

6. التمثيل البياني :



7. إثبات أن F دالة أصلية ل f على $]-1; +\infty[$:

من أجل كل x من $]-1; +\infty[$ لدينا $F'(x) = f(x)$ و منه المطلوب.

8. حساب قيمة $\int_0^{\ln 2} h(x) dx$:

لدينا

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\alpha} [k(x) - f(x)] dx &= \int_0^{\alpha} [-f(x) - f(x)] dx \\
 &= -2 \int_0^{\alpha} f(x) dx \\
 &= -2 [F(x)]_0^{\alpha} \\
 &= -2F(\alpha)
 \end{aligned}$$

التمرين الأول (04 نقاط)

FB: P.Mohamed Maths

1. حساب إ احتمال الحوادث :

$$\bullet P(C) = \frac{C_2^2 + C_2^1 \cdot C_7^1}{C_9^2} = \frac{15}{36} \quad \bullet P(B) = \frac{C_5^2 + C_2^2 + C_2^2}{C_9^2} = \frac{12}{36} \quad \bullet P(A) = \frac{C_4^2 + C_3^2 + C_2^2}{C_9^2} = \frac{10}{36}$$

2. تبيان أن $P(A \cap C) = \frac{5}{36}$ ثم استنتاج $P(A \cup C)$:

$$\bullet P(A \cap C) = \frac{C_1^1 \cdot C_3^1 + C_1^1 \cdot C_2^1}{C_9^2} = \frac{5}{36}$$

$$\bullet P(A \cup C) = P(A) + P(B) - P(A \cap C) = \frac{20}{36}$$

3. تعيين قانون الإ احتمال :

x_i	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{15}{36}$	$\frac{18}{36}$	$\frac{3}{36}$

$$P(X = 4) = \frac{C_6^2}{C_9^2} = \frac{15}{36}$$

بنفس الطريقة نعين إ احتمال تحقق بقية المخارج.

4. حساب الأمل الرياضي و التباين :

لدينا

$$\bullet E(X) = \sum_{i=1}^3 x_i \cdot p_i = \frac{14}{3}$$

$$\bullet V(X) = \sum_{i=1}^3 x_i^2 \cdot p_i - E^2(X) = \frac{7}{18}$$

5. تعيين قيمتي العددين الحقيقيين α و β :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \frac{14}{3} + \beta = 0 \\ \alpha^2 \frac{7}{18} = \frac{7}{2} \end{array} \right. \quad \text{و منه} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha E(X) + \beta = 0 \\ \alpha^2 V(\alpha X) = \frac{7}{2} \end{array} \right. \quad \text{تكافئ} \quad \left\{ \begin{array}{l} E(\alpha X + \beta) = 0 \\ V(\alpha X + \beta) = \frac{7}{2} \end{array} \right. \quad \text{لدينا :}$$

بحل الجملة الأخيرة نجد $(\alpha; \beta) \in \{(-3; 14), (3; -14)\}$

التمرين الثاني (05 نقطة)

FB: P.Mohamed Maths

1. البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n > 0$

نضع : $P(n) : u_n > 0$

• لما $n = 1$ لدينا $u_1 = \frac{1}{2} > 0$ ومنه $P(1)$ محققة.

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي كفي غير معدوم n ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+1} > 0$.

البرهان:

لدينا $u_n > 0$

و منه $\left(\frac{n+1}{2n}\right)u_n > 0$ (لأن n عدد طبيعي)

و منه حسب مبدأ البرهان بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n $u_n > 0$.

2. اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

لدينا

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(\frac{n+1}{2n}\right)u_n - u_n \\ &= \left(\frac{-n+1}{2n}\right)u_n \end{aligned}$$

مما سبق لدينا $u_n > 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n بحقق $n \geq 1$ لدينا $2n > 0$ و $-n+1 \leq 0$ و عليه $u_{n+1} - u_n \leq 0$ و منه المتتالية (u_n) متناقصة تماما ، و بما أنها محدودة من الأسفل ب 0 فهي متقاربة.

3. البرهان أن المتتالية (v_n) هندسية :

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{\left(\frac{n+1}{2n}\right)u_n}{n+1} \\ &= \frac{u_n}{2n} \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

4. كتابة كلا من v_n ثم u_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $v_n = v_1 \cdot q^{n-1}$ أي $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ و بما أن $u_n = n \cdot v_n$ فإن $u_n = \frac{n}{2^n}$.

نهاية (u_n) :

بما أن (u_n) متقاربة فإن نهايتها موجودة و تحقق $l = \left(\frac{n+1}{2n}\right)l$ و منه $l(1 - \frac{n+1}{2n}) = 0$ و عليه

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l = 0$$

5. إثبات أن (t_n) متتالية حسابية :

$$\begin{aligned} t_{n+1} - t_n &= \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) \\ &= \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= -\ln 2 \end{aligned}$$

و منه (t_n) متتالية حسابية أساسها $-\ln 2$.

6. حساب المجموع :

$$\begin{aligned}
 S_n &= (v_1 + t_1) + (v_2 + t_2) + \dots + (v_n + t_n) + t_{n+1} + t_{n+2} + \dots + t_{2n} \\
 &= v_1 + v_2 + \dots + v_n + t_1 + t_2 + \dots + t_{2n} \\
 &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - n(1+2n)\ln 2
 \end{aligned}$$

التمرين الثالث (04 نقاط)

FB: P.Mohamed Maths

1. تحديد بواقي قسمة 2^n و على 7 :

$n =$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
حيث $k \in \mathbb{Z}$	1	2	4
	باقي قسمة 2^n على 7		

2. تبين أن العدد $2025^{1446} + 1446^{2025} - 2 \times 1954^{1962}$ يقبل القسمة على 7 :

$$\text{لدينا} \quad \begin{cases} 2025 \equiv 2 [7] \\ 1446 \equiv 2^2 [7] \\ 1954 \equiv 1 [7] \end{cases} \text{ و عليه}$$

$$2025^{1446} + 1446^{2025} - 2 \times 1954^{1962} \equiv 2^{1446} + 2^{4050} - 2 \times 1^{1962} [7]$$

$$2025^{1446} + 1446^{2025} - 2 \times 1954^{1962} \equiv 1 + 1 - 2 \times 1 [7]$$

$$2025^{1446} + 1446^{2025} - 2 \times 1954^{1962} \equiv 0 [7]$$

و منه $2025^{1446} + 1446^{2025} - 2 \times 1954^{1962}$ يقبل القسمة على 7.

3. تعيين الحل الخاص للمعادلة (E) :

$$\begin{cases} 74x_0 - 9y_0 = 204 & (*) \\ x_0 - y_0 = 1 & (**) \end{cases}$$

لتكن الثنائية $(x_0; y_0)$ حلا للمعادلة (E) و منه

من (**) نجد $y_0 = x_0 - 1$. نعوض في (*) فنجد $x_0 = 3$ و $y_0 = 2$ و منه الثنائية $(3; 2)$ حل ل (E) يحقق الشرط المطلوب.

4. تعيين حلول المعادلة (E) :

$$\begin{cases} 74x - 9y = 204 & (*) \\ 74 \times 3 - 9 \times 2 = 204 & (**) \end{cases}$$

لتكن الثنائية $(x; y)$ حل للمعادلة (E) و منه

$$74(x-3) - 9(y-2) = 0 \text{ و منه } 74(x-3) = 9(y-2)$$

و منه $74|9(y-2)$ و بما أن 74 و 9 أوليان فيما بينهما فإن $74|y-2$ و عليه $y = 74k + 2$ حيث k عدد صحيح .

بتعويض قيمة y في (*) نجد $x = 9k + 3$ و منه $S = \{(9k+3; 74k+2) / k \in \mathbb{Z}\}$

5. تعيين قيم PGCD(x; y) :

لدينا $204 = 2^2 \times 3 \times 17$.

نضع $PGCD(x; y) = d$ و عليه
$$\begin{cases} d \mid 9k+2 \\ d \mid 74k+3 \end{cases}$$
 و منه $d \mid 74(9k+3) - 9(74k+3)$ أي $d \mid 204$
و منه $d \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12, 17, 34, 51, 68, 102, 204\}$.

التمرين الرابع (07 نقطة)

FB: P.Mohamed Maths

1. النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^x + e^x - 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x+1)e^x - 1 = +\infty$$

2. إتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على مجال تعريفها و لدينا $g'(x) = e^x(2x+3)$.

بما أن $e^x > 0$ فإن إشارة $g'(x)$ من إشارة $2x+3$ و عليه الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty; -\frac{3}{2}]$ متزايدة تماما على المجال $]-\frac{3}{2}; +\infty[$.

• جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	-1	$g(-\frac{3}{2})$	$+\infty$

3. إشارة g(x) :

لدينا $g(0) = 0$ و منه إشارة $g(x)$ من الشكل

x	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة $g(x)$	-	0	+

1. النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x(e^x - 1)^2 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^x - 1)^2 = +\infty$$

2. إثبات أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب ل (C_f) بجوار $-\infty$.

لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x(e^x - 1)^2 - x \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{2x} + 2xe^x \\ &= 0 \end{aligned}$$

و عليه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $-\infty$ معادلته $y = x$.

3. تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = (e^x - 1)g(x)$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على D_f و لدينا:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^x - 1)^2 + 2x(e^x - 1) \\ &= (e^x - 1)g(x) \end{aligned}$$

4. اتجاه التغير :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+
$e^x - 1$	-	0	+
$f'(x)$	+	0	+

و منه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

• جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

5. كتابة معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 :

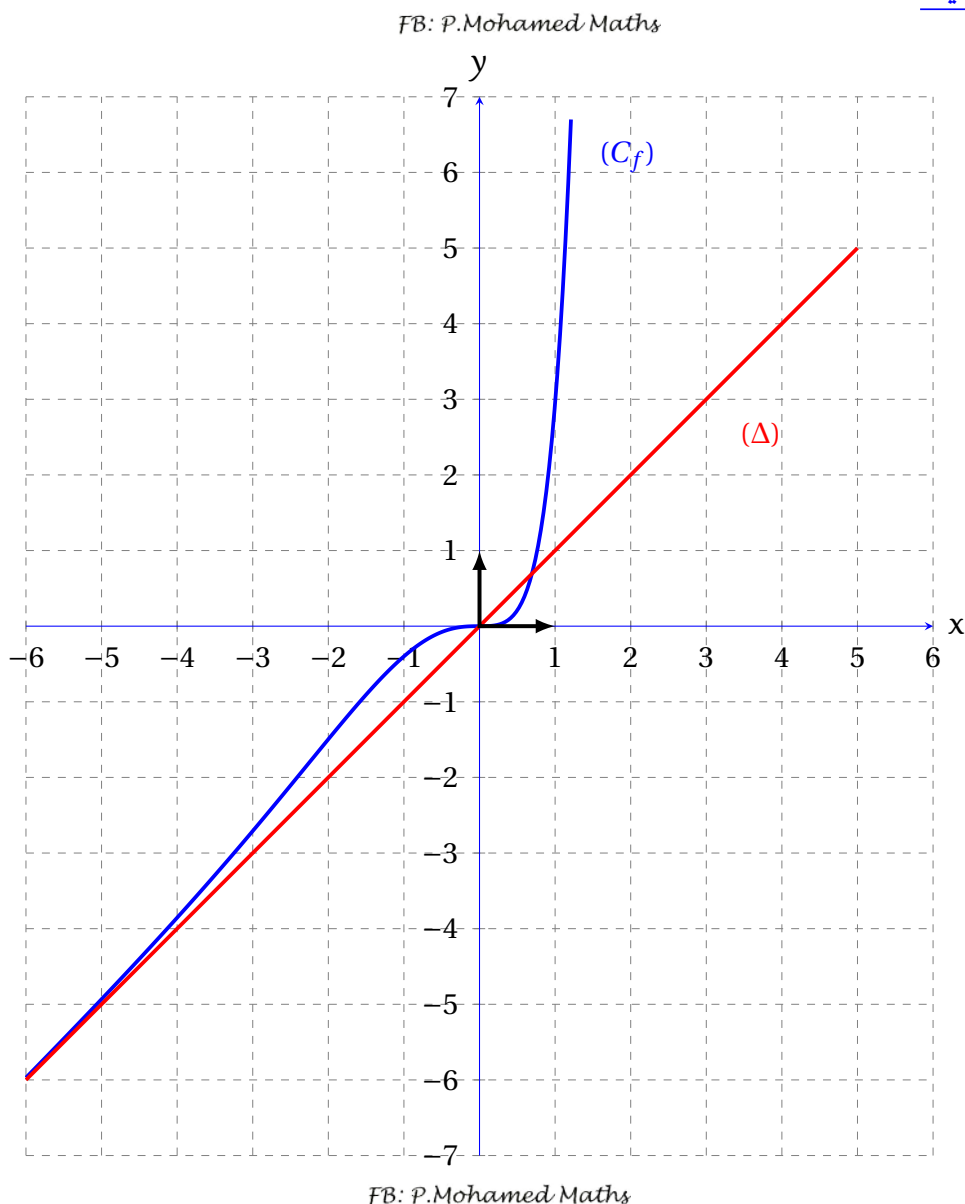
معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة x_0 هي $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ أي $y = (e^{x_0} - 1) [(2x_0 + 1)e^{x_0} - 1] (x - x_0) + x_0(e^{x_0} - 1)^2$.

المماس (T) يشمل المبدأ معناه:

$$\begin{aligned} (e^{x_0} - 1) [(2x_0 + 1)e^{x_0} - 1] (-x_0) + x_0(e^{x_0} - 1)^2 &= 0 \\ (e^{x_0} - 1) [(2x_0 e^{x_0} + e^{x_0} - 1)(-x_0) + x_0(e^{x_0} - 1)] &= 0 \\ (e^{x_0} - 1) [-2x_0^2 e^{x_0} - x_0 e^{x_0} + x_0 + x_0 e^{x_0} - x_0] &= 0 \\ (e^{x_0} - 1)(-2x_0^2 e^{x_0}) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

و منه $x_0 = 0$ و عليه معادلة (T) من الشكل $y = 0$

6. التمثيل البياني:



7. إثبات أن H دالة أصلية ل h على $\mathbb{R}$:

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $H'(x) = h(x)$ و منه المطلوب.

8. حساب قيمة $\int_0^{\ln 2} h(x) dx$:

$$\int_0^{\ln 2} h(x) dx = [H(x)]_0^{\ln 2} = \ln(4) - \frac{5}{4} \text{ لدينا}$$

قيمة التكامل هي مساحة الحيز المحصور بين (C_f) ، (Δ) و المستقيمت التي معادلتها $x = 0$ و $x = \ln 2$.