الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية أحمد زبانة زهانة **وزارة التربية الوطنية** **الديوان الوطني للامتحانات و المسابقات**

امتحان بكالوريا تجريبي التعليم الثانوي **دورة : ماي 2025**

الشعبة : تقني رياضي	**اختبار في مادة : الرياضيات**	**المدة : 04 سا و 30 د**

على المترشح أن يختار احد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (03 نقاط)

لدينا حجر نرد مغشوش مكعب الشكل ، وجوهه مرقمة بالأرقام من 1 إلى 6

نسمي P_n احتمال الحصول على الرقم n مع $1 \leq n \leq 6$ حيث :

- الأعداد $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ تشكل بهذا الترتيب حدودا متتابعة لمتتالية حسابية أساسها r غير معدوم
- الأعداد P_1, P_2, P_4 تشكل بهذا الترتيب حدودا متعاقبة لمتتالية هندسية

1) أ) بين أن : $P_1 = r = \frac{1}{21}$

ب) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n حيث : $1 \leq n \leq 6$، لدينا : $P_n = \frac{n}{21}$

2) نرمي هذا النرد مرة واحدة و نسجل الرقم الظاهر على الوجه العلوي بعد استقرار النرد

أ) احسب احتمال وقوع الحوادث التالية :

A " الحصول على رقم زوجي " ، B " الحصول على رقم اكبر او يساوي 3 " ، C " الحصول على مربع تام "

التمرين الثاني : (05 نقاط)

I. نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ب : $U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$

1) أ) يبن ان $U_1 = \ln\sqrt{2}$

ب) يبن انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $U_{n+2} + U_n = \frac{1}{n+1}$

ج) استنتج قيمة U_3

2) أ) بين أنه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $0 \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$

ب) احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

II. لتكن المتتالية (V_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ب : $V_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2) dx$

1) باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أنه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $V_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2}{n+1} U_{n+2}$

2) ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} nV_n$

التمرين الثالث : (04,5 نقاط)

1) أ/ أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 5^n على 7.

ب/ برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $3^n \equiv 3[6]$

ج/ استنتج أن العدد 7 قاسما للعدد a حيث : $a = 1447^{2025^{1962}} - \left(2025^{1447}\right)^{1962}$

2) عين قيم العدد الطبيعي n التي من اجلها يكون : $4\left(5^{n-2} + 5^{n-3} + \cdots + 1\right) \equiv 3[7]$

3) أ/ تحقق أنه من اجل كل عدد طبيعي n يكون : $2C_{n+1}^2 + A_{n+3}^2 = 2n^2 + 6n + 6$

ب/ عين قيم العدد الطبيعي n التي من اجلها يكون العدد : $2C_{n+1}^2 + A_{n+3}^2$ مضاعفا للعدد 7 .

4) فيما يلي نفرض : $n = 9$

نعتبر المعادلة : $C_{10}^2 x - A_{12}^2 y = 15 \cdots (E)$ ذات المجهولين الصحيحين x و y

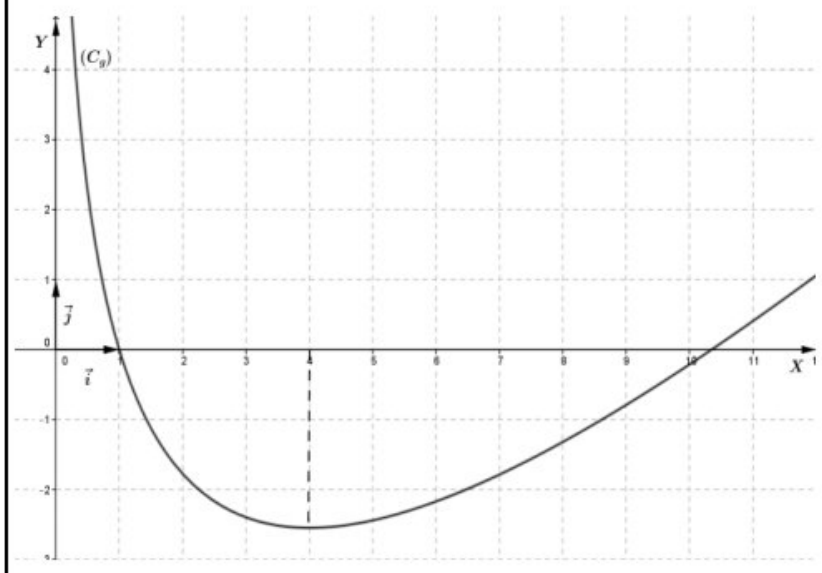
أ/ بين أن المعادلة (E) تقبل حلا على الأقل

ب/ بين انه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فإن : $y \equiv 0[5]$ ثم حل في $\square^2$ المعادلة (E)

التمرين الرابع : (07,5 نقاط)

I. الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ ب : $g(x) = (x-1) - 4\ln x$

و ليكن (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O ; \vec{i} ; \vec{j}\right)$. في الشكل المقابل المنحني (C_g) يقطع محور الفواصل في النقطتين فواصلها 1 و α



بقراءة بيانية :

أ) شكل جدول تغيرات الدالة g

ب) حدد حسب قيم x إشارة g

II. الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ ب : $f(x) = \frac{e^{x-1}}{x^4} - (x-1) + 4\ln x$ ، و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O ; \vec{i} ; \vec{j}\right)$.

1) أ) تحقق انه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f(x) = e^{g(x)} - g(x)$

ب) بين ان $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ و أن $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ \succ}} f(x) = +\infty$ ثم فسر هندسيا النتيجة.

2) أ) بين انه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x) = g'(x)\left(e^{g(x)} - 1\right)$

ب) بين أن f متناقصة تماما على المجالين $]0;1]$ و $[4;\alpha]$ و f متزايدة تماما على المجالين $[1;4]$ و $[\alpha;+\infty[$

ج) بين أن $f(\alpha) = 1$ و احسب $f(1)$ ثم شكل جدول تغيراتها

3) بين انه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $e^x - 2x \succ 0$ ثم ادرس الوضع النسبي ل (C_f) و (C_g)

4) أرسم المنحني (C_f) نأخذ $\alpha \approx 10.5$.

5) A مساحة الحيز المستوي المحدد ب (C_f) و حامل محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتهما $x = 3$ و $x = 5$

أ) بين انه من أجل كل عدد حقيقي x على المجال $[3;5]$: $-g(x) \prec f(x) \prec f(4)$

ب) الدالة $x \mapsto x(-1+\ln x)$ هي أصلية ل $x \mapsto \ln x$ على المجال $]0;+\infty[$

ج) بين أن $20\ln 5 - 12\ln 3 - 14 \prec A \prec 2f(4)$

الإجابة النموذجية لموضوع إمتحان البكالوريا التجريبية دورة ماي 2025 شعبة تقني رياضي

(الموضوع الأول) عناصر الاجابة	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
التمرين الأول : 03 نقاط		
1) أ) لدينا : $P_2 = P_1 + r$ و $P_4 = P_1 + 3r$ و $P_2^2 = P_1 \times P_4$ بالتعويض نجد : $P_1 = r$	0,5ن	03ن
و $\sum_1^6 P_i = 6(\frac{P_1 + P_6}{2}) = 21P_1 = 1$ ومنه $P_1 = r = \frac{1}{21}$	0,5ن	
2) لدينا $P_1 = r = \frac{1}{21}$ ومنه $P_2 = P_1 + r = 2P_1 = \frac{2}{21}$ ومنه $P_n = \frac{n}{21}$	0,5ن	
3) $P(A) = \frac{12}{21}$ ، $P(B) = \frac{18}{21}$ ، $P(C) = \frac{5}{21}$	0,5ن×3	
التمرين الثاني : 05 نقاط		
I. أ) $U_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \ln\sqrt{2}$	0,5ن	05ن
ب) $U_{n+2} + U_n = \left(\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2} + \frac{x^n}{1+x^2}\right)dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\Big]_0^1 = \frac{1}{n+1}$	0,5ن	
ج) $U_3 + U_1 = \frac{1}{2}$ ومنه $U_3 = \frac{1}{2} - \ln\sqrt{2}$	0,5ن	
2) أ) $0 \le U_n \le \frac{1}{n+1}$	01ن	
ب) $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$	0,5ن	
II. 1) $V_n = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(1+x^2)\Big]_0^1 - \frac{2}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2}dx = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2}{n+1}U_{n+2}$	01ن	
2) $\lim_{n\to+\infty} V_n = 0$ و $\lim_{n\to+\infty} nV_n = \ln 2$	01ن	
التمرين الثالث :04,5 نقاط		
1) أ) $5^0 \equiv 1[7]; 5^1 \equiv 5[7]; 5^2 \equiv 4[7]; 5^3 \equiv 6[7]; 5^4 \equiv 2[7]; 5^5 \equiv 3[7]; 5^6 \equiv 1[7]$ ومنه لكل $k \in \mathbb{N}$ $5^{6k+\alpha} \equiv 5^\alpha [7]$ حيث $\alpha = \{0;1;2;3;4;5\}$	0,5ن	04,5ن
ب) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $P(n) \cdots 3^n \equiv 3[6]$		
المرحلة الأولي : من أجل $n=1$: $3^1 \equiv 3[6]$ ومنه $P(1)$ محققة	0,5ن	
المرحلة الثانية : نفرض انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $P(n)$ محققة ونبرهن صحة $P(n+1)$		
$1447^{2025^{1962}} \equiv 1[7]$ و $\left(2025^{1447}\right)^{1962} \equiv 1[7]$	01ن	
ومنه $1447^{2025^{1962}} - \left(2025^{1447}\right)^{1962} \equiv 0[7]$ و بالتالي : a قاسم ل 7		
2) $5^{n-1} \equiv 3[7]$: ($k \in \mathbb{N}^*$) $n = 6k$ و منه من اجل $4 \times \left(5^{n-2} + 5^{n-3} + \cdots + 1\right) = 5^{n-1}$	0,5ن	
3) أ) $2C_{n+1}^2 + A_{n+3}^2 = n(n+1) + (n+3)(n+2) = 2n^2 + 6n + 6$	0,25ن	

ب)

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6
$2n^2 \equiv$	0	2	1	4	4	1	2
$6n \equiv$	0	6	5	4	3	2	1
$2n^2+6n+6 \equiv$	6	0	5	0	6	2	2

01ن

وبالتالي : $n = 7k+1$ او $n = 7k+3$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

4) $C_{10}^2 x - A_{12}^2 y = 15 \cdots (E)$ ومنه $45x - 132y = 15$ ومنه $15x - 44y = 5$ **0,25ن**

ومنه $44y = 15x - 5$ ومنه $44y \equiv -5[15]$ ومنه $y \equiv 5[15]$

و بالتالي $y \equiv 0[5]$ لان $y = 15k+5 = 5(3k+1)$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) : $(x;y) = \{44k+15;5k\}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ **0,5ن**

التمرين الرابع : 07,5 نقاط

I. أ) جدول تغيرات الدالة g **0,5ن**

x	0		4		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$ ‖	↘	$3-8\ln 2$	↗	$+\infty$

ب) جدول اشارة $g(x)$ **0,5ن**

x	0		1		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

07,5ن

II. أ)

$$e^{g(x)} - g(x) = e^{(x-1)-4\ln x} - (x-1) + 4\ln x = \frac{e^{(x-1)}}{e^{4\ln x}} - (x-1) + 4\ln x$$

$$= \frac{e^{x-1}}{x^4} - (x-1) + 4\ln x = f(x)$$ **0,5ن**

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{g(x)} - g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\left[\frac{e^{g(x)}}{g(x)} - 1\right] = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} e^{g(x)} - g(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x)\left[\frac{e^{g(x)}}{g(x)} - 1\right] = +\infty$ **2×0,25ن**

التفسير الهندسي : المنحني (C_f) يقبل حامل محور التراتيب كمستقيم مقارب **0,25ن**

5) أ) الدالة قابلة للاستقاق على المجال و دالتها المشتقة هي :

$$f'(x) = g'(x)e^{g(x)} - g'(x) = g'(x)\left(e^{g(x)} - 1\right)$$ **0,25ن**

ب) إشارة $f'(x)$: $g'(x)=0$ أو $e^{g(x)}-1=0$

x	0		1		4		α		$+\infty$
$g'(x)$	‖		$-$		0		$+$		
$e^{g(x)}-1$	‖	$+$	0		$-$		0	$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

0,5ن

وبالتالي : الدالة f متناقصة تماما على المجالين $[0;1[$ و $[4;\alpha]$ و الدالة f متزايدة تماما على المجالين $[1;4]$ و $]\alpha;+\infty[$

0,5ن

ج) لدينا $f(\alpha)=e^{g(\alpha)}-g(\alpha)=e^0-0=1$ و $f(1)=e^{g(1)}-g(1)=e^0-0=1$

2×ن0,25

جدول تغيرات الدالة f

0,5ن

x	0		1		4		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$+\infty$	↘	1	↗	$f(4)$	↘	1	↗ $+\infty$

$$f(4)=e^{g(4)}-g(4)=e^{3-8\ln 2}-3+8\ln 2=\frac{e^3}{2^8}-3+8\ln 2$$

6) $e^x-2x\succ 0$ ،دراسة الوضع النسبي ل (C_f) و (C_g)

0,25ن

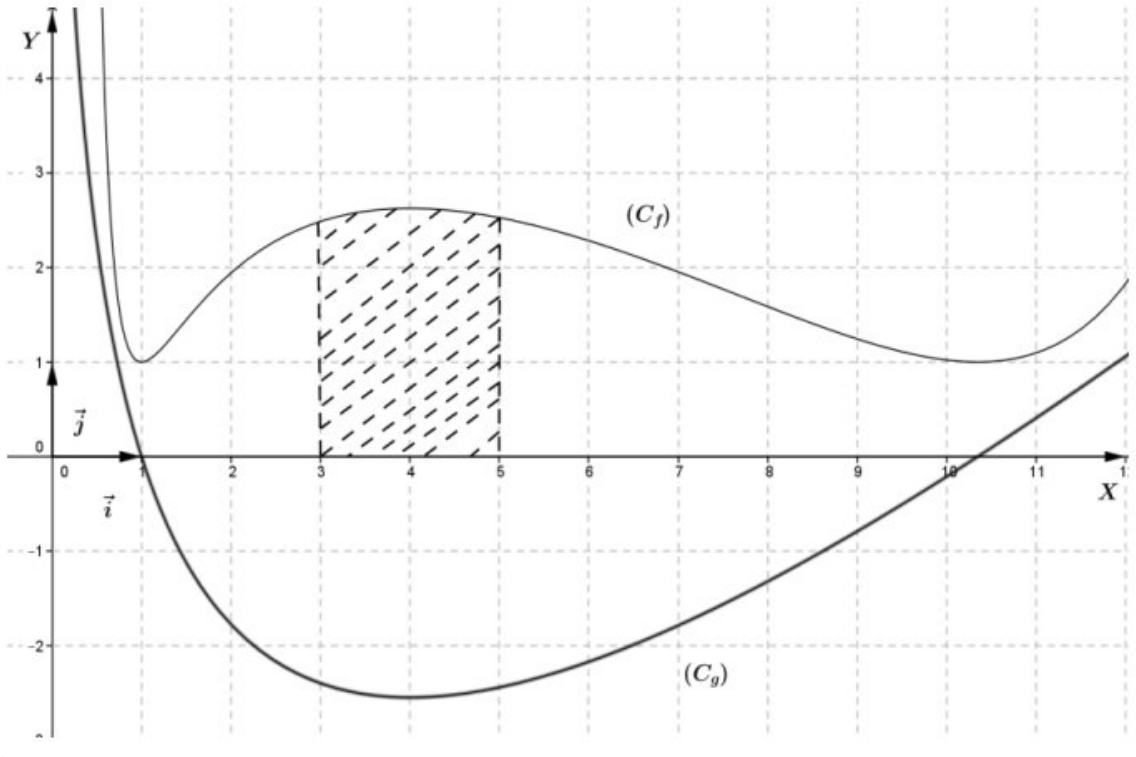
ندرس إشارة الفرق $f(x)-g(x)$: $f(x)-g(x)=e^{g(x)}-2g(x)\succ 0$

0,5ن

وبالتالي (C_f) يقع فوق (C_g)

7) رسم (C_f)

01ن



8) أ) $-g(x) \prec f(x) \prec f(4)$	**0,25ن**	
ب) الدالة $x \mapsto x(-1+\ln x)$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و دالتها المشتقة هي: $x \mapsto \ln x$ وبالتالي الدالة $x \mapsto x(-1+\ln x)$ هي أصلية ل $x \mapsto \ln x$ على المجال $]0;+\infty[$	**0,5ن**	
ج) لدينا $-g(x) \prec f(x) \prec f(4)$ ومنه $-\int_3^5 g(x)dx \prec \int_3^5 f(x)dx \prec \int_3^5 f(4)\,dx$ ومنه $-\frac{1}{2}x^2+x+4x(-1+\ln x)\Big]_3^5 \prec \int_3^5 f(x)dx \prec f(4)\,x\Big]_3^5$ و بالتالي $20\ln 5-12\ln 3-14 \prec A \prec 2f(4)$	**0,5ن**	

من إعداد الأستاذ : زراوني عمر

ثانوية الشهيد أحمد زبانة " زهانة "