



امتحان البكالوريا التجريبي

المدرسة العليا للأساتذة بورقلة
مصلحة النشاطات الثقافية والرياضية
دورة أفريل 2025
الشعبة: علوم تجريبية
المادة: رياضيات
المدة: 3 ساعات و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:
الموضوع الأول

التمرين الأول (4 ن)

المتتالية العددية (U_n) معرفة بـ: $U_0 = 1$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{U_n}{e^n U_n + e}$

1. أحسب كلاً من U_1 و U_2
2. أ. برهن بالتراجع أنه: من أجل كل عدد طبيعي n ، $U_n > 0$
ب. بين أن (U_n) متناقصة تماماً ثم استنتج أنها متقاربة.
3. المتتالية العددية (V_n) معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $V_n = \frac{e^{-n}}{U_n}$
أ. بين أن المتتالية (V_n) حسابية أساسها e^{-1} ثم استنتج عبارة V_n بدلالة n
ب. أكتب عبارة U_n بدلالة n ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$
4. من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $S_n = U_0 V_0 + U_1 V_1 + \dots + U_n V_n$
أحسب S_n بدلالة n ثم استنتج أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{e}{e-1}$

التمرين الثاني (4 ن)

- صندوق غير شفاف به 5 كريات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس، منها كرتين خضراوين تحملان الرقمين: 0 و 1 ، كرتين حمراوين تحملان الرقمين: 1 و 2 ، وكريّة بيضاء تحمل الرقم: 2.
- نسحب عشوائيا من الصندوق كرتين في آن واحد.
1. أحسب احتمال كلاً من الحدثين الآتيين.
أ. A : "الحصول على كرتين مختلفتين في اللون".
ب. B : "الحصول على كريّة بيضاء على الأقل".
 2. نعتبر X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب مجموع الرقمين المحصل عليهما.
أ. برّر أن مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي $\{1; 2; 3; 4\}$ ، ثم عرّف قانون احتمالها.
ب. استنتج احتمال الحدث $(C_X^2 = 1)$
 3. نُضيف إلى الصندوق k كريّة تحمل الرقم 1 حيث $k \in \mathbb{N}^*$ ، ونسحب عشوائيا كرتين على التوالي بدون إرجاع.
• عيّن قيمة k التي يكون من أجلها احتمال الحصول على عددين جداءهما معدوم هو $\frac{1}{15}$

التمرين الثالث (5 ن)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$
أجب بصحيح أو خاطئ مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية.

1. المعادلة $z + i - i = 0$ تقبل حلاً وحيداً في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$
2. مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث $z + \bar{z} = 0$ هي حامل محور الفواصل.

$$3. \text{ العدد المركب } \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^{1962} \text{ يساوي } i$$

$$4. \text{ إذا كان } z = 1 + i \text{ فإن المتتالية العددية } (U_n) \text{ المعرفة على } \mathbb{N}^* \text{ بـ } U_n = \log |z|^n \text{ هي متتالية حسابية.}$$

$$5. \text{ إذا كان } z \text{ عدداً مركباً حيث } |z| = 1 \text{ فإن } |z - 4| = |4\bar{z} - 1|$$

التمرين الرابع (7 ن)

x	0	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(I) الجدول المقابل هو جدول تغيرات الدالة g المعرفة

$$g(x) = x + \frac{2 \ln x - 1}{x} \text{ على }]0; +\infty[\text{ كما يلي}$$

• أحسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$

(II) الدالة العددية f معرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x^2}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 1 \text{ cm}$

1. أ. بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ وفسر النتيجة هندسياً ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
ب. بين أنه: من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

$$2. \text{ أ. أحسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x] \text{ ثم فسر النتيجة هندسياً.}$$

ب. أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (γ) المنحنى الممثل للدالة $\ln$

3. أنشئ كلاً من (γ) و (C_f)

4. نعتبر λ عدداً حقيقياً حيث $\lambda > 1$ ، نرمز بـ $S(\lambda)$ إلى مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (γ) والمستقيمين ذوا المعادلتين $x = \lambda$ و $x = 1$

$$\text{أ. باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن } \int_1^\lambda \frac{\ln x}{x^2} dx = 1 - \frac{1}{\lambda} - \frac{\ln \lambda}{\lambda}$$

$$\text{ب. استنتج أن } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} S(\lambda) = S(e^{-1})$$

$$5. \text{ الدالة العددية } h \text{ معرفة على }]0; +\infty[\text{ كما يلي : } h(x) = \frac{|\ln x|}{x^2} - |\ln x|$$

• اشرح كيفية إنشاء المنحنى الممثل للدالة h انطلاقاً من (C_f) . (لا يُطلب الإنشاء)

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول (4 ن)

في المدرسة العليا للأساتذة بورقلة يُراد تشكيل لجنة لتمثيل الطلبة تضم رئيساً، نائباً وكاتباً، من بين خمسة طلبة ذكور، وأربع طالبات إناث إحداهن اسمها يسرى.

1. أحسب احتمال كُلاً من الحدثين الآتين.
أ. الحدث A : " أعضاء اللجنة من جنسين مختلفين ".
ب. الحدث B : " يسرى رئيساً للجنة ".
2. بين أن $P(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{84}$ ثم استنتج $P_{\bar{A}}(B)$ احتمال الحدث B علماً أن $\bar{A}$ محقق.
3. نعتبر X المتغير العشوائي الذي يُرفق كل لجنة بعدد الذكور فيها.
أ. بين أن $P(X=1) = \frac{5}{14}$ و $P(X=2) = \frac{10}{21}$
ب. عرّف قانون احتمال المتغير العشوائي X
ج. أحسب $E(X)$ الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X ثم استنتج $E(1962X - 1245)$

التمرين الثاني (4 ن)

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات الآتية مع التبرير.

1. الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $h(x) = 2x + \ln(1 + e^{-4x})$ هي دالة
أ) زوجية. ب) فردية. ج) لا زوجية ولا فردية.
2. مجموعة حلول المعادلة $\log(x - \sqrt{3}) + \log(x + \sqrt{3}) = 0$ ذات المجهول الحقيقي x هي
أ) $\{-2; 2\}$ ب) $\{2\}$ ج) $\{-10; 10\}$
3. قيمة العدد الحقيقي β الذي يحقق $\int_0^\beta x e^x dx = 1$ هي
أ) 1 ب) e ج) -1
4. حلّ المعادلة التفاضلية $y' - 1962y = 2025$ الذي يحقق $y(0) = 0$ هو دالة
أ) متناقصة تماماً على $\mathbb{R}$ ب) ثابتة على $\mathbb{R}$ ج) متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$

التمرين الثالث (5 ن)

- الدالة العددية f معرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{x}{2x+1}$
- ونعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $U_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ب: $U_{n+1} = f(U_n)$
1. شكّل جدول تغيرات الدالة f .
 2. أ. برهن بالتراجع أنه: من أجل كل عدد طبيعي n ، $U_n > 0$
ب. أدرس اتجاه تغير (U_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

$$3. \text{ أ. بين أنه: من أجل كل } n \text{ من } \mathbb{N}^* , f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\text{ب. بين أنه: من أجل كل } n \text{ من } \mathbb{N}^* , U_n \leq \frac{1}{n}$$

$$\text{ج. أحسب } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$$

$$4. \text{ من أجل كل } n \text{ من } \mathbb{N}^* \text{ نضع : } S_n = \frac{2}{U_1} + \frac{2}{U_2} + \dots + \frac{2}{U_n}$$

$$\cdot \text{ بين أنه: من أجل كل } n \text{ من } \mathbb{N}^* , S_n \geq n(n+1) \text{ ثم استنتج } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

التمرين الرابع (7 ن)

I الدالة العددية g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = e^x + x$

1. أدرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$

2. أ. بين أن المعادلة $g(x) = 2$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $0,4 < \alpha < 0,5$

ب. استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x) - 2$

II الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = (x-1)(e^{-x} - 1)$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{j}\| = 1 \text{ cm}$.

1. أ. أحسب كلاً من $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{2 - g(x)}{e^x}$

ج. استنتج أن f متزايدة تماماً على $]-\infty; \alpha]$ ومتناقصة تماماً على $[\alpha; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

2. أ. بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

ب. أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

3. أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة O

4. أ. أنشئ كلاً من (Δ) ، (T) و (C_f)

ب. عين بياناً قيم الوسيط الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $f(x) = x \ln m$ حلين بالضبط.

5. نعتبر λ عدداً حقيقياً حيث $\lambda > 1$ ، نرمز بـ $\mathcal{A}(\lambda)$ إلى مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات

ذات المعادلات : $y = -x + 1$ ، $x = 0$ و $x = \lambda$

• باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب $\int_1^\lambda x e^{-x} dx$ ثم استنتج أن $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = e^{-1} \text{ cm}^2$

انتهى الموضوع الثاني





امتحان البكالوريا التجريبي

المدرسة العليا للأساتذة بورقلة
مصلحة النشاطات الثقافية والرياضية
دورة أفريل 2025
الشعبة: علوم تجريبية
المادة: رياضيات
المدة: 3 ساعات ونصف

الإجابة النموذجية + سلم التنقيط

شكر وعرفان

باقية من الشكر والعرفان للطلبة الآتية أسماؤهم على مجهوداتهم المبذولة خلال عملية التصحيح وكذلك على ملاحظاتهم القيمة التي ساهمت في إنجاز هذا العمل لفائدة التلاميذ المقبلين على امتحان شهادة البكالوريا.

- إيمان بلحوت
- عمرة طويل
- أنفال الشين
- منال حجاج
- منال شبرة مصطفى
- يمينة حامدي
- وئام باوية
- جمانة بوعرقية
- رضوان أحمودة
- رميصاء بن ساسية
- كوثر بن عطاء الله
- مريم بلعيفة
- لؤي دغوم
- دعاء عرار
- آمنة العايب
- إيناس بروج
- عيسى بالعيد
- فضيلة دودو
- ماريما زايدي
- معتز لصفر
- منال باشي

رئيس لجنة التصحيح

إجابة نموذجية مقترحة للموضوع الأول

التمرين الأول (4 نـ)

1. حساب كلاً من U_1 و U_2

$$\begin{aligned}
 U_2 &= \frac{U_1}{e^1 U_1 + e} \\
 &= \frac{\frac{1}{e+1}}{e \times \frac{1}{e+1} + e} \\
 &= \frac{\frac{1}{e+1}}{\frac{e+1}{e+e^2+e}} \\
 &= \frac{1}{e^2 + 2e}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \frac{U_0}{e^0 U_0 + e} \\
 &= \frac{1}{1 \times 1 + e} \\
 &= \frac{1}{e+1}
 \end{aligned}$$

2. أ. البرهان بالتراجع أنه: من أجل كل عدد طبيعي n ، $U_n > 0$

- نرسم للخاصية " $U_n > 0$ " بالرمز $P(n)$.
- نتحقق من صحة $P(0)$ لدينا

$$U_0 = 1$$

ومنه

$$U_0 > 0$$

وعليه $P(0)$ صحيحة.

- من أجل عدد طبيعي كفي k نفترض صحة $P(k)$ ونبرهن صحة $P(k+1)$.
- لدينا

$$U_k > 0$$

وبما أن

$$\begin{cases} e > 0 \\ e^k > 0 \end{cases}$$

فإن

$$\frac{U_k}{e^k U_k + e} > 0$$

أي

$$U_{k+1} > 0$$

وعليه $P(k+1)$ صحيحة.

- وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع نستنتج أن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

ب. تبين أن (U_n) متناقصة تماما ثم استنتاج أنها متقاربة.
من أجل كل n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \frac{U_n}{e^n U_n + e} - U_n \\ &= U_n \left(\frac{1}{e^n U_n + e} - 1 \right) \end{aligned}$$

وبما أن

$$\begin{cases} U_n > 0 \\ \frac{1}{e^n U_n + e} < 1 \end{cases}$$

فإن

$$U_{n+1} - U_n < 0$$

ومنه (U_n) متناقصة تماما.

استنتاج التقارب

لدينا

• (U_n) متناقصة على $\mathbb{N}$

• من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $U_n > 0$ ، وعليه (U_n) محدودة من الأسفل بالعدد 0 وبالتالي (U_n) متقاربة.

3. أ. تبين أن المتتالية (V_n) حسابية أساسها e^{-1} ثم استنتاج عبارة V_n بدلالة n
من أجل كل n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= \frac{e^{-(n+1)}}{U_{n+1}} \\ &= \frac{e^{-(n+1)}}{\frac{U_n}{e^n U_n + e}} \\ &= e^{-n-1} \times \frac{e^n U_n + e}{U_n} \\ &= e^{-n-1} \left(\frac{e^n U_n}{U_n} + \frac{e}{U_n} \right) \\ &= e^{-n-1} \left(e^n + \frac{e}{U_n} \right) \\ &= e^{-n-1+n} + \frac{e^{-n-1+1}}{U_n} \\ &= e^{-1} + \frac{e^{-n}}{U_n} \\ &= V_n + e^{-1} \end{aligned}$$

وبالتالي (V_n) متتالية حسابية أساسها e^{-1} ، وعندئذ من أجل كل n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$\begin{aligned} V_n &= V_0 + (n - 0) e^{-1} \\ &= 1 + n e^{-1} \end{aligned}$$

ب. كتابة عبارة U_n بدلالة n ثم استنتاج $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

من أجل كل n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$V_n = \frac{e^{-n}}{U_n}$$

ومنه

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{e^{-n}}{V_n} \\ &= \frac{e^{-n}}{1 + ne^{-1}} \end{aligned}$$

وبما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$

4. • حساب S_n بدلالة n ثم استنتاج أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{e}{e-1}$

من أجل كل n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$\begin{aligned} S_n &= U_0 V_0 + U_1 V_1 + \dots + U_n V_n \\ &= 1 + e^{-1} + e^{-2} + \dots + e^{-n} \\ &= 1 \times \frac{1 - (e^{-1})^{n-0+1}}{1 - e^{-1}} \\ &= \frac{1 - e^{-n-1}}{1 - e^{-1}} \end{aligned}$$

ولدينا

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-n-1}}{1 - e^{-1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-n} e^{-1}}{1 - e^{-1}} \end{aligned}$$

وبما أن

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$$

فإن

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n &= \frac{1}{1 - e^{-1}} \\ &= \frac{e}{e - 1} \end{aligned}$$

التمرين الثاني (4 ن)

1. حساب احتمال كلاً من الحدثين A و B

أ. A : "الحصول على كرتين مختلفتين في اللون".

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(\overline{A}) \\ &= 1 - \frac{C_2^2 + C_2^2}{C_5^2} \\ &= \frac{8}{10} \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

ب. B : "الحصول على كرتة بيضاء على الأقل".

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{C_1^1 \times C_4^1}{C_5^2} \\ &= \frac{4}{10} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

2. أ. برّر أنّ مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي $\{1; 2; 3; 4\}$ ، ثمّ تعريف قانون احتماله. لدينا

$$\begin{cases} 0 + 1 = 1 \\ 0 + 2 = 2 \\ 1 + 1 = 2 \\ 1 + 2 = 3 \\ 2 + 2 = 4 \end{cases}$$

ومنه مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي $\{1; 2; 3; 4\}$ وعندئذ لدينا

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= \frac{C_1^1 \times C_2^1 + C_2^2}{C_5^2} \\ &= \frac{3}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= \frac{C_1^1 \times C_2^1}{C_5^2} \\ &= \frac{2}{10} \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

وأيضاً

$$\begin{aligned} P(X = 4) &= \frac{C_2^2}{C_5^2} \\ &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= \frac{C_2^1 \times C_2^1}{C_5^2} \\ &= \frac{4}{10} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

وبالتالي

x_i	1	2	3	4	المجموع
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

ب. استنتاج احتمال الحدث ($C_X^2 = 1$)
المعادلة

$$C_X^2 = 1$$

تكافئ

$$\frac{X!}{2!(X-2)!} = 1$$

وتكافئ

$$X(X-1) = 2$$

وتكافئ

$$X^2 - X - 2 = 0$$

وبما أن $X > 0$ فإن

$$X = 2$$

وبالتالي

$$\begin{aligned} P(C_X^2 = 1) &= P(X = 2) \\ &= \frac{3}{10} \end{aligned}$$

3. تعيين قيمة k التي يكون من أجلها احتمال الحصول على عددين جداولهما معدوم هو $\frac{1}{15}$

احتمال الحصول على عددين جداولهما معدوم هو $\frac{1}{15}$ معناه

$$\frac{2A_1^1 \times A_{k+4}^1}{A_{k+5}^2} = \frac{1}{15}$$

وذلك يكافئ

$$\frac{2 \times 1 \times (k+4)}{(k+5)(k+4)} = \frac{1}{15}$$

يكافئ

$$\frac{1}{k+5} = \frac{1}{30}$$

ويكافئ

$$k = 25$$

التمرين الثالث (5 ن)

1. صحيح

التبرير
المعادلة

$$\overline{z+i} - i = 0$$

تكافئ

$$\overline{z+i} = i$$

وتكافئ

$$z+i = -i$$

وتكافئ

$$z = -2i$$

ومنه المعادلة تقبل حلاً وحيداً في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$

2. خاطئ

التبرير

لدينا $z + \bar{z} = 0$ وذلك يكافئ

$$2\operatorname{Re}(z) = 0$$

أي

$$\operatorname{Re}(z) = 0$$

وبالتالي مجموعة النقط M هي حامل محور الترتيب.3. صحيح
التبرير

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{1962} &= \left(\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)^{1962} \\ &= \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{1962} \\ &= e^{i\frac{1962\pi}{4}} \\ &= e^{i\left(\frac{1960\pi}{4} + \frac{2\pi}{4}\right)} \\ &= e^{i\left(490\pi + \frac{\pi}{2}\right)} \\ &= e^{i\left(2\pi \times 245 + \frac{\pi}{2}\right)} \\ &= e^{i\frac{\pi}{2}} \\ &= i \end{aligned}$$

4. صحيح
التبريرمن أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= \log |z|^{n+1} \\ &= \log (|z|^n \times |z|) \\ &= \log |z|^n + \log |z| \\ &= U_n + \log |z| \\ &= U_n + \log |1+i| \\ &= U_n + \log \sqrt{2} \end{aligned}$$

ومنه المتتالية $(U_n)_{n \geq 1}$ حسابية.5. صحيح
التبرير
لدينا

$$|z| = 1$$

ومنه

$$|z|^2 = 1$$

وعليه

$$z \times \bar{z} = 1$$

وبما أن

$$z \neq 0$$

فإن

$$z = \frac{1}{\bar{z}}$$

وبالتعويض نجد

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{1}{\bar{z}} - 4 \right| &= \left| \frac{1 - 4\bar{z}}{\bar{z}} \right| \\
 &= \frac{|1 - 4\bar{z}|}{|\bar{z}|} \\
 &= \frac{|4\bar{z} - 1|}{|z|} \\
 &= \frac{|4\bar{z} - 1|}{1} \\
 &= |4\bar{z} - 1|
 \end{aligned}$$

التمرين الرابع (7 ن)

(I) حساب $g(1)$ ثم استنتاج إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$ لدينا

$$\begin{aligned}
 g(1) &= 1 + \frac{2 \ln 1 - 1}{1} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

وبما أن g متزايدة تماما على $]0; +\infty[$ وعندئذ لدينا

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II) 1. أ. تبين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ وتفسير النتيجة هندسيا ثم حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x - \frac{\ln x}{x^2} \right) \\
 &= +\infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \end{cases}$$

لأن

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln x - \frac{1}{x^2} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\ln x \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \right] \\
 &= +\infty
 \end{aligned}$$

لأن

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^2} = +\infty \end{cases}$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ حامل محور الترتيب (مقارب لـ (C_f))

ب. تبين أنه: من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ثم تشكيل جدول تغيرات الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ لدينا

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} - \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x \times \ln x}{(x^2)^2} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{x - 2x \ln x}{x^4} \\ &= \frac{1}{x} + \frac{2 \ln x - 1}{x^3} \\ &= \frac{1}{x^2} \left(x + \frac{2 \ln x - 1}{x} \right) \\ &= \frac{g(x)}{x^2} \end{aligned}$$

من أجل كل x من $]0; +\infty[$ لدينا

$$x^2 > 0$$

وعليه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ وعندئذ لدينا

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$		$+\infty$	$+\infty$

2. أ. حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x]$ ثم تفسير النتيجة هندسياً.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x - \frac{\ln x}{x^2} - \ln x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln x}{x^2} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

وعليه المنحنى الممثل للدالة $\ln$ مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$

ب. دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (γ) المنحنى الممثل للدالة $\ln$

من أجل كل x من $]0; +\infty[$ لدينا

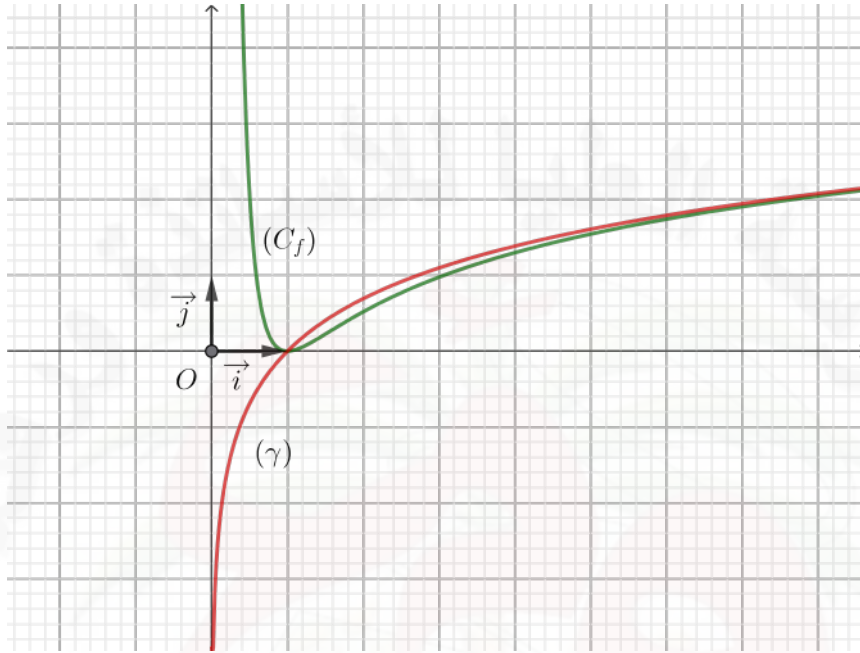
$$f(x) - \ln x = -\frac{\ln x}{x^2}$$

وبما أن $x^2 > 0$ فإن إشارة الفرق من إشارة $\ln x$ وعندئذ لدينا

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - \ln x$		+ 0 -	

وبالتالي

- (C_f) يقع فوق (γ) على $]0; 1[$
- (C_f) يقطع (γ) في النقطة $A(1; 0)$
- (C_f) يقع تحت (γ) على $]1; +\infty[$

3. كلاً من (γ) و (C_f) 4. أ. تبين أن $\int_1^\lambda \frac{\ln x}{x^2} dx = 1 - \frac{1}{\lambda} - \frac{\ln \lambda}{\lambda}$ باستعمال المكاملة بالتجزئة

$$\begin{aligned}
 \int_1^\lambda \frac{\ln x}{x^2} dx &= \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_1^\lambda - \int_1^\lambda \left(-\frac{1}{x^2} \right) dx \\
 &= -\frac{\ln \lambda}{\lambda} + \frac{\ln 1}{1} - \left[\frac{1}{x} \right]_1^\lambda \\
 &= -\frac{\ln \lambda}{\lambda} - \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{1} \right) \\
 &= 1 - \frac{1}{\lambda} - \frac{\ln \lambda}{\lambda}
 \end{aligned}$$

ب. استنتاج أن $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{S}(\lambda) = \mathcal{S}(e^{-1})$
 ولدينا $f(x) - \ln x \leq 0$ على $]1; +\infty[$

$$\begin{aligned}
 \int_1^\lambda [\ln x - f(x)] dx &= \int_1^\lambda \frac{\ln x}{x^2} dx \\
 &= 1 - \frac{1}{\lambda} - \frac{\ln \lambda}{\lambda}
 \end{aligned}$$

وعليه

$$\mathcal{S}(\lambda) = \left(1 - \frac{1}{\lambda} - \frac{\ln \lambda}{\lambda}\right) cm^2$$

وبما أنّ

$$\begin{cases} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\ln \lambda}{\lambda} = 0 \\ \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} = 0 \end{cases}$$

فإنّ

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{S}(\lambda) = 1 cm^2$$

ولدينا

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(e^{-1}) &= \left(1 - \frac{1}{e^{-1}} - \frac{\ln e^{-1}}{e^{-1}}\right) cm^2 \\ &= (1 - e + e) cm^2 \\ &= 1 cm^2 \end{aligned}$$

وبالتالي

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{S}(\lambda) = \mathcal{S}(e^{-1})$$

5. شرح كيفية إنشاء المنحنى الممثل للدالة h انطلاقا من (C_f) .من أجل كلّ x من $]0; +\infty[$ لدينا

$$h(x) = \begin{cases} \frac{-\ln x}{x^2} + \ln x & ; \quad 0 < x \leq 1 \\ \frac{\ln x}{x^2} - \ln x & ; \quad x \geq 1 \end{cases}$$

أي

$$h(x) = \begin{cases} -f(x) & ; \quad 0 < x \leq 1 \\ f(x) & ; \quad x \geq 1 \end{cases}$$

وبالتالي

- من أجل $x \in]0; 1]$ ، المنحنى الممثل للدالة h نظير (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل.
- من أجل $x \in [1; +\infty[$ ، المنحنى الممثل للدالة h ينطبق على (C_f)

سلم تنقيط الموضوع الأول

التمرين الأول (4 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
1	0,5
أ.2	0,5
ب.2	0,5
أ.3	1
ب.3	0,75
4	0,75

التمرين الثاني (4 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
أ.1	1
ب.1	0,75
أ.2	1,5
ب.2	0,5
3	0,25

التمرين الثالث (5 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
1	0,5 + 0,5
2	0,5 + 0,5
3	0,5 + 0,5
4	0,5 + 0,5
5	0,5 + 0,5

التمرين الرابع (7 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
(I)	0,75
(II) 1.أ	0,75 + 0,5
(II) 1.ب	0,5 + 0,5
(II) 2.أ	0,75
(II) 2.ب	0,75
(II) 3	0,5 + 0,5
(II) 4.أ	0,5
(II) 4.ب	0,5
(II) 5	0,5

إجابة نموذجية مقترحة للموضوع الثاني

التمرين الأول (4 ن)

1. حساب احتمال كلاً من الحدثين A و B
 أ. الحدث A : "أعضاء اللجنة من جنسين مختلفين".

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{3A_5^2 \times A_4^1 + 3A_5^1 \times A_4^2}{A_9^3} \\ &= \frac{420}{504} \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

- ب. الحدث B : "يسرى رئيسا اللجنة".

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{A_1^1 \times A_8^2}{A_9^3} \\ &= \frac{56}{504} \\ &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

2. تبين أن $P(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{84}$ ثم استنتاج $P_{\bar{A}}(B)$

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap B) &= \frac{A_1^1 \times A_3^2}{A_9^3} \\ &= \frac{6}{504} \\ &= \frac{1}{84} \end{aligned}$$

عندئذ نستنتج أن

$$\begin{aligned} P_{\bar{A}}(B) &= \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})} \\ &= \frac{P(\bar{A} \cap B)}{1 - P(A)} \\ &= \frac{\frac{1}{84}}{1 - \frac{5}{6}} \\ &= \frac{1}{14} \end{aligned}$$

3. أ. تبين أن $P(X=1) = \frac{5}{14}$ و $P(X=2) = \frac{10}{21}$

$$\begin{aligned} P(X=2) &= \frac{3 \times A_5^2 \times A_4^1}{A_9^3} \\ &= \frac{240}{504} \\ &= \frac{10}{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X=1) &= \frac{3 \times A_5^1 \times A_4^2}{A_9^3} \\ &= \frac{180}{504} \\ &= \frac{5}{14} \end{aligned}$$

ب. تعريف قانون احتمال المتغير العشوائي X
مجموعة قيم المتغير العشوائي هي $\{0; 1; 2; 3\}$ ، ولدينا

$$\begin{aligned} P(X=3) &= \frac{A_5^3}{A_9^3} \\ &= \frac{60}{504} \\ &= \frac{5}{42} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X=0) &= \frac{A_4^3}{A_9^3} \\ &= \frac{24}{504} \\ &= \frac{1}{21} \end{aligned}$$

وعندئذ لدينا

x_i	0	1	2	3	المجموع
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{42}$	1

ج. حساب $E(X)$ الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X ثم استنتاج $E(1962X - 1245)$

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times \frac{1}{21} + 1 \times \frac{5}{14} + 2 \times \frac{10}{21} + 3 \times \frac{5}{42} \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

وعندئذ نستنتج أن

$$\begin{aligned} E(1962X - 1245) &= 1962E(X) - 1245 \\ &= 1962 \times \frac{5}{3} - 1245 \\ &= 2025 \end{aligned}$$

التمرين الثاني (4 ن)

1. الاقتراح الصحيح هو أ

التبرير
لدينا

- $\mathbb{R}$ متناظرة بالنسبة إلى العدد 0
- من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$\begin{aligned}
 h(-x) &= -2x + \ln(1 + e^{4x}) \\
 &= -2x + \ln[e^{4x}(e^{-4x} + 1)] \\
 &= -2x + \ln(e^{4x}) + \ln(e^{-4x} + 1) \\
 &= -2x + 4x + \ln(1 + e^{-4x}) \\
 &= 2x + \ln(1 + e^{-4x}) \\
 &= h(x)
 \end{aligned}$$

وعليه h دالة زوجية.

2. الاقتراح الصحيح هو ب

التبرير

المعادلة معرفة إذا وفقط إذا كان

$$x - \sqrt{3} > 0 \quad \text{و} \quad x + \sqrt{3} > 0$$

أي

$$x > \sqrt{3} \quad \text{و} \quad x > -\sqrt{3}$$

وذلك يكافئ

$$x > \sqrt{3}$$

عليه المجموعة المرجعية للمعادلة هي $[\sqrt{3}; +\infty[$ ولدينا

$$\log(x - \sqrt{3}) + \log(x + \sqrt{3}) = 0$$

وذلك يكافئ

$$\log[(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})] = 0$$

ويكافئ

$$\log(x^2 - 3) = \log 1$$

ويكافئ

$$x^2 = 4$$

ويكافئ

$$x = -2 \quad \text{أو} \quad x = 2$$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة هي S حيث

$$\begin{aligned}
 S &= \{-2; 2\} \cap [\sqrt{3}; +\infty[\\
 &= \{2\}
 \end{aligned}$$

3. الاقتراح الصحيح هو أ

التبرير
لدينا

$$\begin{aligned}\int_0^{\beta} x e^x dx &= [x e^x]_0^{\beta} - \int_0^{\beta} e^x dx \\ &= \beta e^{\beta} - 0 \times e^0 - [e^x]_0^{\beta} \\ &= \beta e^{\beta} - e^{\beta} + 1\end{aligned}$$

وبالتالي المعادلة

$$\int_0^{\beta} x e^x dx = 1$$

تكافئ

$$\beta e^{\beta} - e^{\beta} + 1 = 1$$

وتكافئ

$$\beta e^{\beta} - e^{\beta} = 0$$

وتكافئ

$$e^{\beta} (\beta - 1) = 0$$

وتكافئ

$$\beta - 1 = 0$$

وتكافئ

$$\beta = 1$$

4. الاقتراح الصحيح هو ج

التبرير
لدينا

$$y' - 1962y = 2025$$

وذلك يكافئ

$$y' = 1962y + 2025$$

ومنه حلول المعادلة التفاضلية هي الدوال y حيث

$$y = C e^{1962x} - \frac{2025}{1962}$$

مع C ثابت حقيقي، وبما أن $y(0) = 0$ فإن

$$C e^0 - \frac{2025}{1962} = 0$$

أي

$$C = \frac{2025}{1962}$$

وعليه

$$y = \frac{2025}{1962} e^{1962x} - \frac{2025}{1962}$$

وبالتالي

$$y' = 2025 e^{1962x}$$

وينتج عن ذلك أن حل المعادلة التفاضلية دالة متزايدة تماماً.

التمرين الثالث (5 ن)

1. تشكيل جدول تغيرات الدالة f .
لدينا

$$f(0) = \frac{0}{2 \times 0 + 1} = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

وبما أن f قابلة للاشتقاق على $[0; +\infty[$ فإنه من أجل كل x من $[0; +\infty[$ لدينا

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \times (2x + 1) - 2(x)}{(2x + 1)^2} \\ &= \frac{1}{(2x + 1)^2} \\ &> 0 \end{aligned}$$

وعليه

x	0	$+\infty$
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$

2. أ. البرهان بالتراجع أنه: من أجل كل عدد طبيعي n ، $U_n > 0$

• نرسم للخاصية " $U_n > 0$ " بالرمز $P(n)$.

• نتحقق من صحة $P(0)$

لدينا

$$U_0 = 1$$

ومنه

$$U_0 > 0$$

وعليه $P(0)$ صحيحة.

• من أجل عدد طبيعي كفي k نفترض صحة $P(k)$ ونبرهن صحة $P(k + 1)$.

لدينا

$$U_k > 0$$

وبما أن f متزايدة تماما على $[0; +\infty[$ فإن

$$f(U_k) > f(0)$$

أي

$$U_{k+1} > 0$$

وعليه $P(k + 1)$ صحيحة.

• وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع نستنتج أن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

ب. دراسة اتجاه تغيّر (U_n) ثم استنتاج أنها متقاربة.
من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \frac{U_n}{2U_n + 1} - U_n \\ &= \frac{U_n - 2U_n^2 - U_n}{2U_n + 1} \\ &= \frac{-2U_n^2}{2U_n + 1} \end{aligned}$$

وبما أنّ

$$\begin{cases} -2U_n^2 < 0 \\ 2U_n + 1 > 0 \end{cases}$$

فإنّ $U_{n+1} - U_n < 0$ وعليه (U_n) متناقصة تماماً على $\mathbb{N}$.

استنتاج التقارب

لدينا

- (U_n) متناقصة على $\mathbb{N}$
- من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ ، $U_n > 0$ ، وعليه (U_n) محدودة من الأسفل بالعدد 0 وبالتالي (U_n) متقاربة.

3. أ. تبين أنّه: من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ ، $f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n+1}$

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{n}\right) &= \frac{\frac{1}{n}}{2 \times \frac{1}{n} + 1} \\ &= \frac{\frac{1}{n}}{2 + n} \\ &= \frac{1}{n + 2} \\ &< \frac{1}{n + 1} \end{aligned}$$

ب. تبين أنّه: من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ ، $U_n \leq \frac{1}{n}$

- نرسم للخاصية " $U_n > 0$ " بالرمز $P(n)$.
- نتحقّق من صحّة $P(1)$ لدينا

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{U_0}{2U_0 + 1} \\ &= \frac{1}{3} \\ &\leq \frac{1}{1} \end{aligned}$$

وعليه $P(1)$ صحيحة.

• من أجل عدد طبيعي كفي k حيث $k \geq 1$ نفترض صحة $P(k)$ ونبرهن صحة $P(k+1)$.
لدينا

$$U_k \leq \frac{1}{k}$$

وبما أن f متزايدة تماما على $[0; +\infty[$ فإن

$$\begin{aligned} f(U_k) &\leq f\left(\frac{1}{k}\right) \\ &\leq \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

أي

$$U_{k+1} \leq \frac{1}{k+1}$$

وعليه $P(k+1)$ صحيحة.

• وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع نستنتج أن $P(n)$ صحيحة من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$

ج. حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$0 < U_n \leq \frac{1}{n}$$

وبما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$

4. تبين أنه: من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ ، $S_n \geq n(n+1)$ ثم استنتاج $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$U_n \leq \frac{1}{n}$$

ومنه

$$\frac{2}{U_n} \geq 2n$$

وعليه

$$\begin{aligned} \frac{2}{U_1} + \frac{2}{U_2} + \cdots + \frac{2}{U_n} &\geq 2 \times 1 + 2 \times 2 + \cdots + 2 \times n \\ &\geq 2(1 + 2 + \cdots + n) \\ &\geq 2 \times \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

أي

$$S_n \geq n(n+1)$$

وبما أن

$$\begin{aligned} \lim [n(n+1)] &= \lim n^2 \\ &= +\infty \end{aligned}$$

فإن

$$\lim S_n = +\infty$$

التمرين الرابع (7 ن)

(I) 1. دراسة اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$
 g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا

$$g'(x) = e^x + 1 > 0$$

ومنه g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

2. أ. تبين أن المعادلة $g(x) = 2$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,4 < \alpha < 0,5$

- g مستمرة على $\mathbb{R}$
- g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$
- لدينا

$$g(0,4) \approx 1,89$$

$$g(0,5) \approx 2,15$$

$$\text{ومنه } g(0,4) < g(\alpha) < g(0,5)$$

عندئذ نستنتج أن المعادلة $g(x) = 2$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,4 < \alpha < 0,5$.

ب. استنتج إشارة $g(x) - 2$ حسب قيم العدد الحقيقي x

- g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$
- $g(\alpha) = 2$
- عندئذ لدينا

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x) - 2$	-	0	+

(II) 1. أ. حساب كلاً من $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(x-1)(e^{-x}-1)] = -\infty$$

لأن

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^t = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x-1)(e^{-x}-1)] = -\infty$$

لأن

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$$

ب. تبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{2-g(x)}{e^x}$

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times (e^{-x} - 1) + (-e^{-x}) \times (x - 1) \\ &= e^{-x} - 1 - xe^{-x} + e^{-x} \\ &= 2e^{-x} - xe^{-x} - 1 \\ &= (2 - x - e^x) e^x \\ &= \frac{2 - (x + e^x)}{e^{-x}} \\ &= \frac{2 - g(x)}{e^x} \end{aligned}$$

ج. استنتاج أن f متزايدة تماماً على $]-\infty; \alpha]$ و متناقصة تماماً على $[\alpha; +\infty[$ ثم تشكيل جدول تغيراتها.
من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $e^x > 0$ ، ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $2 - g(x)$ وعندئذ لدينا

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-

• $f'(x) > 0$ على $]-\infty; \alpha[$ و $f'(\alpha) = 0$ ومنه f متزايدة تماماً على $]-\infty; \alpha]$
• $f'(x) < 0$ على $[\alpha; +\infty[$ و $f'(\alpha) = 0$ ومنه f متناقصة تماماً على $[\alpha; +\infty[$
وعندئذ نشكل جدول تغيراتها كما يلي

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$-\infty$

2. أ. تبين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$
من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$\begin{aligned} f(x) - (-x + 1) &= (x - 1)(e^{-x} - 1) + (x - 1) \\ &= (x - 1)(e^{-x} - 1 + 1) \\ &= (x - 1)e^{-x} \end{aligned}$$

وعليه

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x + 1)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x - 1)e^{-x}] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{-x} - e^{-x}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

لأن

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{-x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-te^t) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^t = 0 \end{cases}$$

وبالتالي المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$
ب. دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)
من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$f(x) - (-x + 1) = (x - 1)e^{-x}$$

و بما أن $e^{-x} > 0$ فإن إشارة الفرق من إشارة $x - 1$ وعندئذ لدينا

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x - 1$	-	0	+

وينتج عن ذلك ما يلي

- (C_f) يقع تحت (Δ) على المجال $]-\infty; 1[$
- (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1; 0)$
- (C_f) يقع فوق (Δ) على المجال $]1; +\infty[$

3. كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة O
 f قابلة للاشتقاق عند 0 ومنه (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه $f'(0)$ حيث
 $(T) : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

ولدينا

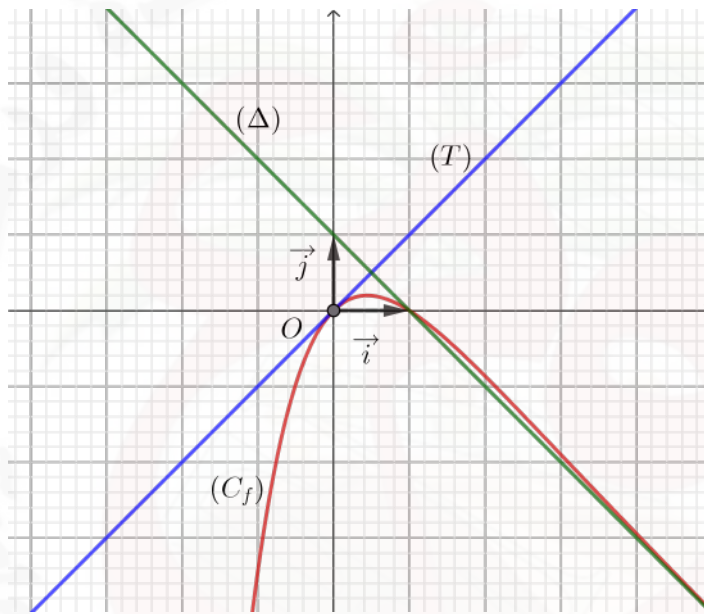
$$f'(0) = \frac{2 - g(0)}{e^{-0}} = 1$$

$$f(0) = (1 - 0)(e^{-0} - 1) = 0$$

وبالتالي

$$(T) : y = x$$

4. أ. إنشاء كُلا من (Δ) ، (T) و (C_f)



ب. تعيين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $f(x) = x \ln m$ حلين بالضبط.

حلول المعادلة بيانيا هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ_m) حيث

$$(\Delta_m) : y = x \ln m$$

مجموعة قيم m هي المجال $]0; +\infty[$ ، وعليه من أجل كل m من $]0; +\infty[$ لدينا $O(0;0) \in (\Delta_m)$ ، وبوضع $m' = \ln m$ ، ينتج

عدد حلول المعادلة	قيم m	في حالة
حل واحد	$m \in]-\infty; e^{-1}]$	$m' \leq -1$
حلان	$m \in]e^{-1}; e[$	$-1 < m' < 1$
حل واحد	$m = e$	$m' = 1$
حلان	$m \in]e; +\infty[$	$m' > 1$

وبالتالي مجموعة قيم m التي تقبل من أجلها المعادلة حلين بالضبط هي

$$]e^{-1}; e[\cup]e; +\infty[$$

5. حساب $\int_1^\lambda x e^{-x} dx$ ثم استنتاج أن $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = e^{-1} cm^2$

$$\begin{aligned} \int_1^\lambda x e^{-x} dx &= [-x e^{-x}]_1^\lambda - \int_1^\lambda (-e^{-x}) dx \\ &= -\lambda e^{-\lambda} + 1 \times e^{-1} - [e^{-x}]_1^\lambda \\ &= -\lambda e^{-\lambda} + e^{-1} - e^{-\lambda} + e^{-1} \\ &= -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 2e^{-1} \end{aligned}$$

وبما أن f مستمرة على $[1; +\infty[$ و $f(x) - (-x + 1) \geq 0$ على $[1; +\infty[$ فإن

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\lambda) &= \int_1^\lambda (x - 1) e^{-x} dx \\ &= \int_1^\lambda x e^{-x} dx - \int_1^\lambda e^{-x} dx \\ &= -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 2e^{-1} + [e^{-x}]_1^\lambda \\ &= -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 2e^{-1} + e^{-\lambda} - e^{-1} \\ &= (-\lambda e^{-\lambda} + e^{-1}) cm^2 \end{aligned}$$

وعندئذ نستنتج أن

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = e^{-1} cm^2$$

لأن

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (-\lambda e^{-\lambda}) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} (te^t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

سلم تنقيط الموضوع الثاني

التمرين الأول (4 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
1	0,5
أ.2	0,5
ب.2	
أ.3	1
ب.3	0,5
4	0,75

+ 0,75

التمرين الثاني (4 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
1	0,5 + 0,5
2	0,5 + 0,5
3	0,5 + 0,5
4	0,5 + 0,5

التمرين الثالث (5 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
1	0,75
أ.2	1
ب.2	1
أ.3	0,5
ب.3	0,5
ج.3	0,5
4	0,75

التمرين الرابع (7 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
1 (I)	0,5
2 (I)	0,5
2 (I)	0,5
1 (II)	0,5
1 (II)	0,5
1 (II)	1
2 (II)	0,5
2 (II)	0,5
3 (II)	0,5
4 (II)	1
4 (II)	0,25
5 (II)	0,75

■ انتهى

يكتمل الملف بملاحظات القراء الكرام، لذلك في حالة وجود أي خلل في الملف يرجى مراسلتنا به بغية تصحيحه لفائدة التلاميذ المقبلين على امتحان البكالوريا وذلك عن طريق البريد الإلكتروني prof.ardjani@gmail.com وجزاكم الله خيرا