

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول : (05 نقاط)

المتتالية (u_n) معرفة بحددها الأول $u_1 = e^2$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1} = e^{-\frac{1}{2}} \sqrt{u_n}$

(1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n > \frac{1}{e}$.

ب- برهن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

ج- إستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو عدد l يطلب حسابه .

(2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي : $v_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln(u_n)$.

أ- أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب حساب حددها الأول v_1 .

ب- عبر عن v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n ، جد مرة أخرى $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(3) من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ نضع : $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ و $P_n = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$.

● احسب S_n بدلالة n ، ثم استنتج P_n بدلالة n .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

تحتوي علبة على أربع كريات خضراء مرقمة بـ : 1 ، 2 ، 2 ، 2 و ثلاث كريات حمراء مرقمة بـ : 1 ، 2 ، 2 كل الكريات متماثلة و لا يمكن التمييز بينها عند اللمس .

(I) نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كريات من العلبة ، نعتبر الحدثين A و B حيث :

A : " الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون " B : " توجد في السحب كرية واحدة حمراء على الأقل " .

● احسب $P(A)$ و بين أن : $P(B) = \frac{31}{35}$.

(II) الآن نقوم بسحب كريات من العلبة الواحدة تلو الأخرى بدون إرجاع و نتوقف عن السحب عند الحصول

على كرية تحمل الرقم 2 لأول مرة .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد السحبات التي قمنا بها في هذه التجربة

(1) برّر لماذا قيم المتغير العشوائي X هي : 1 ، 2 و 3 .

(2) بين أن : $P(X=2) = \frac{5}{21}$ ، ثم عين قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X .

(3) استنتج إحتمال الحدث D : " الحصول على الأقل على كرية واحدة تحمل الرقم 1 " .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 = -2 - 2\sqrt{3}i$ (يمكنك وضع : $z = x + iy$) .

(II) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. نعتبر النقط A ، B و C لواحقتها على الترتيب :

$$z_A = -1 + i\sqrt{3} , z_B = \overline{z_A} \text{ و } z_C = 2$$

(1) اكتب z_A على الشكل الأسّي .

(2) نعتبر النقطة D ذات اللاحقة z_D حيث : $z_D = z_A \times \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

أ- تحقق أن : $z_D = 2\sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right]$ ، ثم اكتب z_D على الشكل الجبري .

ب- استنتج القيمة المضبوطة لكل من : $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

(3) أ- بين أن : $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

ب- بين أن (C) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $z = 2e^{i\theta}$ مع $(\theta \in \mathbb{R})$ هي الدائرة المحيطة

بالمثلث ABC .

التمرين الرابع : (07 نقاط)

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x + (x-1)e^{-x}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم

المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، وحدة الطول هي : $2cm$.

(1) بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ، ثم احسب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(2) أ- بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ب- ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

(3) الشكل المقابل يمثل جدول التغيرات للدالة f' الدالة المشتقة للدالة f :

أ- بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة الإنعطاف I يطلب تعيين إحداثيها .

ب- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f'(x) > 0$.

(4) شكل جدول التغيرات للدالة f .

(5) تحقق أن : $f(0) \times f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ ، ثم استنتج أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α

يطلب تعيين حصره له .

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f'(x)$	$+\infty$	$1 - \frac{1}{e^3}$	1

(6) أنشئ المستقيم (Δ) و مثل المنحنى (C_f) .

(7) نعتبر العدد $A(\lambda)$ حيث : $A(\lambda) = 4 \int_1^\lambda [f(x) - x] dx$ مع λ عدد حقيقي أكبر تماما من 1 .

♦ أعط تفسيرا هندسيا للعدد $A(\lambda)$ ، ثم احسبه بدلالة λ و ذلك باستعمال المكاملة بالتجزئة .

(8) لتكن الدالة $x \mapsto -xe^{-x}$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto (x-1)e^{-x}$ على $\mathbb{R}$:

- نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n = \int_n^{n+1} (x-1)e^{-x} dx$ و ليكن : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

♦ عبر عن S_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Boudehedy

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي صندوق على 10 كريات متماثلة ، منها 7 كريات بيضاء و البقية حمراء ، لدينا زهرتا نرد غير مزيفتين الأولى مكعبة الشكل وجوها تحمل الأرقام من 1 إلى 6 ، أما الثانية رباعية الوجوه تحمل الأرقام من 1 إلى 4 .
(I) نسحب عشوائيا كرية من الصندوق ، إذا كانت بيضاء نرمي الزهرة المكعبة مرة واحدة و إذا كانت حمراء نرمي الزهرة الرباعية مرة واحدة .

● نعتبر الحدثين : A " ظهور الرقم 1 " ، C " ظهور رقم زوجي " .

(1) بين أن : $P(A) = \frac{23}{120}$ ، ثم احسب $P(C)$. (يمكنك الإستعانة بشجرة الاحتمالات)

(2) علما أنه ظهر في الرمي الرقم 1 ، ما هو احتمال أن نكون سحبنا كرية بيضاء ؟ .

(II) الآن ننزع من الصندوق الكريات البيضاء و نضع مكانها n كرية سوداء حيث : $(n \geq 2)$ ، ثم نقوم بسحب كريتين على التوالي و بدون إرجاع .

(1) احسب P_n احتمال سحب كريتين من لونين مختلفين .

(2) بين أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = 0$ ، ثم اعط تفسيرا لهذه النتيجة .

التمرين الثاني: (05 نقاط)

المتتالية (u_n) معرفة بحددها الأول $u_1 = \frac{2}{3}$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1} = \left(\frac{2n+2}{3n}\right)u_n$.

(1) احسب كلا من : u_2 و u_3 ، ثم تحقق أن المتتالية (u_n) ليست حسابية و لا هندسية .

(2) نعرف من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ المتتالية (v_n) كما يلي : $v_n = \frac{u_n}{n}$.

أ- برهن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ يطلب حساب حدها الأول v_1 .

ب- عبر عن v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

ج- تحقق أن : $\ln u_n = n \left[\frac{\ln n}{n} + \ln \left(\frac{2}{3} \right) \right]$ ، ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

(3) نضع : $S_n = \frac{2}{u_1} + \frac{2^3}{u_2} + \frac{3 \times 2^3}{u_3} + \dots + \frac{n \times 2^n}{u_n}$.

● بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $S_n = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 3)$.

التمرين الثالث : (04 نقاط)

كل لكل سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة ، عينه مع التعليل :

(1) في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $2z^2 - 5\bar{z} = -3$:

(أ) تقبل حلين حقيقيين (ب) تقبل حلين حقيقيين و حلين مركبين مترافقين (ج) لا تقبل حلول .

(2) العدد المركب $z = \frac{2e^{\frac{1446\pi}{12}}}{1+i\sqrt{3}}$ يساوي :

(أ) $\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$ (ب) $\frac{1}{2}(\sqrt{3}-i)$ (ج) $\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)$.

(3) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $|z-1+i| = |(1-i)z|$ هي :

(أ) محور قطعة المستقيم $[OA]$ حيث : $z_A = 1-i$ (ب) المستقيم ذا المعادلة : $y = \sqrt{2}x$

(ج) دائرة مركزها O و نصف قطرها 2 .

(4) z عدد مركب حيث : $z = \left(i \cos \frac{2\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{5}\right)^5$ ، الشكل الأسّي لـ z هو :

(أ) $e^{\frac{i\pi}{4}}$ (ب) $e^{\frac{i\pi}{2}}$ (ج) $e^{-\frac{i\pi}{2}}$.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

الدالة f معرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = x \ln x - \frac{1}{2}(\ln x)^2$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب

إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ، ثم احسب : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و فسر النتيجة بيانيا .

(2) أ- بين أنه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ فإن : $f'(x) = 1 + \frac{(x-1)\ln x}{x}$.

ب- أثبت أنه من أجل كل $x > 0$: $(x-1)\ln x \geq 0$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

(3) بين أن المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1 له معادلة من الشكل : $y = x - 1$.

(4) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = f(x) - x + 1$ و جدول تغيراتها التالي :

x	0	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

أ- احسب : $g(1)$ ، ثم استنتج وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T) .

ب- ماذا يمكن القول عن النقطة A من المنحنى (C_f) ذات الفاصلة 1 ؟ .

ج- بين أن المعادلة $g(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $3,3 < \alpha < 3,4$.

(5) باستعمال السؤال السابق برهن أن (C_f) يقطع المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ في النقطة ذات الفاصلة α .

(6) أنشئ كلا من : (T) ، (Δ) و مثل (C_f) .

(7) الدالة h معرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $h(x) = \ln x \left(x - \frac{\ln x}{2}\right)$ و (C_h) تمثيلها البياني .

◆ اشرح كيف يمكن انشاء (C_h) انطلاقا من (C_f) (إنشاء (C_h) غير مطلوب) .

(8) A هي مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما $x = e$ و $x = 1$.

أ- باستعمال التكامل بالتجزئة ، بين أن : $\int_1^e x \ln x \, dx = \frac{e^2 + 1}{4}$.

ب- بين أن الدالة $x \mapsto x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto (\ln x)^2$ على $]0; +\infty[$

ثم استنتج أن : $A = \frac{e^2 - 2e + 5}{4} u.a$.

إنتهى الموضوع الثاني

السنة الدراسية : 2024 - 2025

وزارة الدفاع الوطني

أركان الجيش الوطني الشعبي

دائرة الإستعمال و التحضير

مديرية مدارس أشبال الأمة

إختبار الثلاثي الثالث

المستوى : ثالثة ثانوي الشعبة : علوم تجريبية

التصحيح النموذجي لإختبار مادة الرياضيات "الموضوع الأول"

م	عناصر الإجابة		العلامة
			مجزأة كاملة
	حل التمرين الأول: (5ن)		
	1- أ- نستعمل البرهان بالتراجع :		
	التحقق من أجل $n=1$: $u_1 > \frac{1}{e}$ (محقة)		0.75
	نفرض صحتها من أجل n كيفي أي : $u_n > \frac{1}{e}$		
	ونبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي : $u_{n+1} > \frac{1}{e}$.		
	لدينا : $u_n > e^{-1}$ أي : $\sqrt{u_n} > e^{-\frac{1}{2}}$ ومنه : $e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{u_n} > e^{-1}$ أي أن : $u_{n+1} > \frac{1}{e}$		
	وبالتالي من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n > \frac{1}{e}$.		
	ب- نجد : $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(e^{-1} - u_n)}{e^{\frac{1}{2}}\sqrt{u_n} + u_n} < 0$ ومنه فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.		0.5
	ج- المتتالية (u_n) متقاربة ، لأنها متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل .		0.25
	أي تقبل نهاية l تحقق : $l = e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{l}$ أي : $l^2 = e^{-1}l$ ومنه : $l = e^{-1}$.		0.25
	2- أ- لدينا : $v_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\sqrt{u_n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\ln e^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\ln u_n\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\ln u_n$		0.5
	ومنه : $v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln u_n\right)$ أي : $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ ، إذن (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و $v_1 = \frac{3}{2}$.		0.25
	ب- نجد : $v_n = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.		0.5
	لدينا : $u_n = e^{2v_{n-1}}$ إذن : $u_n = e^{3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1}$.		0.5
	لدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^{-1}$ ، لأن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.		0.5
	4- أ- لدينا : $S_n = \frac{3}{2} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} \right) = 3 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right)$		0.5

بـ لدينا : $P_n = e^{2v_1-1} \times e^{2v_2-1} \times \dots \times e^{2v_n-1}$ أي : $P_n = e^{(2v_1-1)+(2v_2-1)+\dots+(2v_n-1)}$
ومنه : $P_n = e^{2S_n-n}$

حل التمرين الثاني (4 ن)

الجزء الأول :

0.75

$$P(A) = \frac{C_4^3 + C_3^3}{C_7^3} = \frac{1}{7}$$

0.75

$$P(B) = 1 - \frac{C_4^3}{C_7^3} = \frac{31}{35}$$

الجزء الثاني :

(1) تبرير قيم المتغير العشوائي .

0.5

$$(2) \text{ لدينا : } P(X=2) = \frac{A_2^1 \times A_5^1}{A_7^2} = \frac{10}{42} = \frac{5}{21}$$

0.5

0.5

0.5

$$\text{ نجد : } P(X=3) = \frac{A_2^2 \times A_5^1}{A_7^3} = \frac{10}{210} = \frac{1}{21} , \quad P(X=1) = \frac{5}{7}$$

0.5

$$(3) \text{ لدينا : } P(D) = P(X=2) + P(X=3) = \frac{6}{21}$$

حل التمرين الثالث : (4 ن)

I أي البحث عن الجذرين التربيعيين للعدد $-2-2\sqrt{3}i$ نجد : $z_1 = 1-i\sqrt{3}$ و $z_2 = -1+\sqrt{3}i$
II

01

$$(1) \text{ نجد : } z_A = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

0.5

$$(2) \text{ أـ لدينا : } z_D = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \times \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ أي : } z_D = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} \text{ ومنه : } z_D = 2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

0.5

$$\text{ إذن نجد : } z_D = 2\sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right]$$

$$\text{ ـ لدينا : } z_D = z_A \times \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ أي : } z_D = (-1+i\sqrt{3})\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = (-1+i\sqrt{3})(1-i)$$

0.5

$$\text{ ومنه : } z_D = (\sqrt{3}-1) + (\sqrt{3}+1)i$$

0.5

$$\text{ بـ نجد : } \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \text{ و } \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

0.5

$$(3) \text{ أـ لدينا : } \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ ومنه : } \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{-3-i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}} = \frac{6+6\sqrt{3}i}{12} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\text{ ـ لدينا : } \arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow (\overline{CA}, \overline{CB}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ و } \left| \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \right| = 1 \Rightarrow AC = BC$$

0.25

وهذا ما يدل أن المثلث ABC متقايس الأضلاع .

$$\text{ بـ لدينا من جهة : } z = 2e^{i\theta} \text{ تكافئ } z - z_O = 2e^{i\theta} \text{ ومنه : } |z - z_O| = 2 \text{ أي : } OM = 2$$

إذن : (C) هي الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 2 .

0.25

ومن جهة أخرى لدينا : $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 2$ أي أن النقط A ، B و C تنتمي إلى الدائرة التي

0.25

مركزها O ونصف قطرها 2 وبالتالي فإن (C) هي الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

حل التمرين الرابع : (7 ن)

0.25

0.25

1) لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} = +\infty$.

0.5

لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \frac{x-1}{e^x} = -\infty$

2) أ- لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} = 0$

ومنه المستقيم (Δ) مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

01

ب- أي ندرس إشارة $(x-1)e^{-x}$ أي ندرس إشارة $x-1$ وبالتالي المناقشة تكون كما يلي :

- المنحنى (C_f) يقع تحت (Δ) في المجال $]-\infty; 1[$.

- المنحنى (C_f) يقع فوق (Δ) في المجال $]1; +\infty[$.

- المنحنى (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1,1)$.

0.5

3) أ- نلاحظ أن f'' تنعدم وتغير من إشارتها إذن : المنحنى (C_f) يقبل نقطة الإنعطاف I

حيث : $I(3, f(3))$ ومنه : $I(3, 3+2e^{-3})$

0.5

ب- نلاحظ أن أصغر قيمة تبلغها الدالة f' هي $0,95 \approx \left(1 - \frac{1}{e^3}\right)$ ومنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$

فإن : $f'(x) > 0$

4) الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

0.25

0.25

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

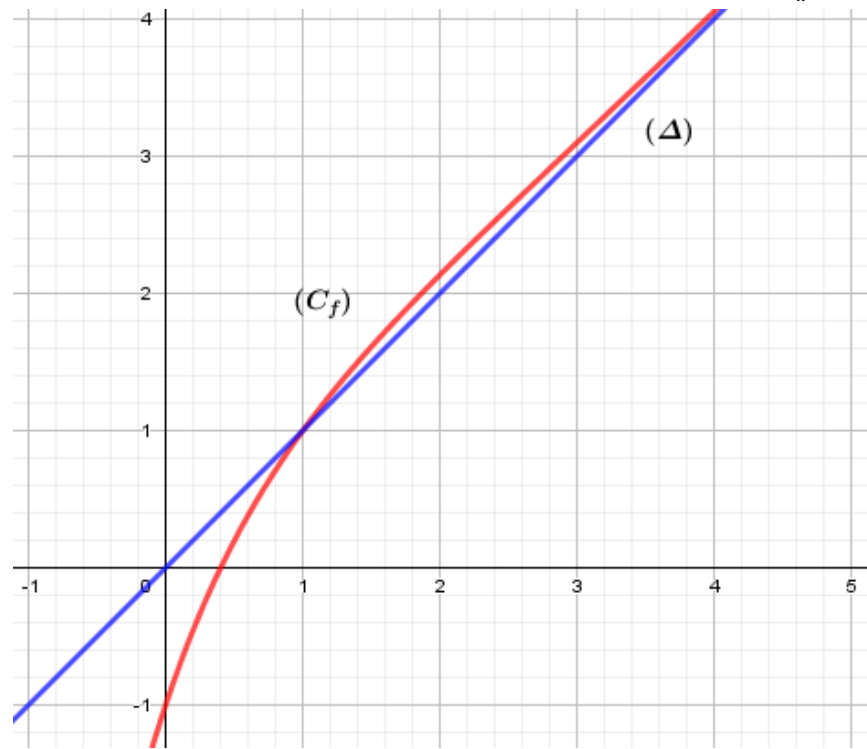
0.25

5) لدينا : $\begin{cases} f(0) = -1 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0,2 \end{cases}$ ومنه : $f(0) \times f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

- الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ ولدينا : $f(0) \times f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

0.5

ومنه فإن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث : $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.



0.75

7) $A(\lambda)$ هي المساحة بـ cm^2 للحيز المستوي المحدد بـ (C_f) ، (Δ) والمستقيمين : $x=1$ و $x=\lambda$

01

$$\begin{cases} u(x) = x-1 ; u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^{-x} ; v(x) = -e^{-x} \end{cases} \text{ - باستعمال التكامل بالتجزئة نضع :}$$

$$\text{ومنه : } A(\lambda) = 4 \int_1^\lambda (x-1) e^{-x} dx = 4 \left[-(x-1) e^{-x} \right]_1^\lambda + 4 \int_1^\lambda e^{-x} dx$$

$$\text{أي : } A(\lambda) = -4(\lambda-1)e^{-\lambda} + 4 \left[-e^{-x} \right]_1^\lambda = 4 \left[-(\lambda-1)e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + e^{-1} \right]$$

$$\text{ومنه نجد : } \boxed{A(\lambda) = 4(-\lambda e^{-\lambda} + e^{-1}) cm^2}$$

0.5

8) لدينا : $S_n = \int_1^2 (x-1) e^{-x} dx + \int_2^3 (x-1) e^{-x} dx + \dots + \int_n^{n+1} (x-1) e^{-x} dx$ باستعمال شال نجد :

$$S_n = \int_1^{n+1} (x-1) e^{-x} dx \text{ ومنه : } S_n = \left[-x e^{-x} \right]_1^{n+1} \text{ أي : } \boxed{S_n = -(n+1)e^{-(n+1)} + e^{-1}}$$

0.5

$$\text{لدينا : } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{t \rightarrow -\infty} (te^t + e^{-1}) \text{ وذلك بوضع : } t = -(n+1) \text{ أي : } \begin{cases} n \rightarrow +\infty \\ t \rightarrow -\infty \end{cases}$$

$$\text{ومنه نجد : } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = e^{-1}} \text{ لأن : } \lim_{t \rightarrow -\infty} te^t = 0$$

التصحيح النموذجي لإختبار مادة الرياضيات " الموضوع الثاني "

م	عناصر الإجابة	
	مجزأة	كاملة
		حل التمرين الأول : (4 ن) I يمكن الاستعانة بشجرة الإحتمالات . (1) نجد : $P(A) = \left(\frac{7}{10} \times \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{3}{10} \times \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{60} + \frac{3}{40}$ و منه $P(A) = \frac{23}{120}$ هو المطلوب . - نجد : $P(C) = \left(\frac{7}{10} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{10} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{20} + \frac{3}{20}$ و منه : $P(C) = \frac{1}{2}$. (2) نسمي الحدث B " الكرية المسحوبة بيضاء " ، أي نحسب الإحتمال الشرطي : $P_A(B)$. و منه : $P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{7}{60}}{\frac{23}{120}} = \frac{14}{23}$ أي نجد : $P_A(B) = \frac{14}{23}$. II الكيس به (n+3) كرية . (1) لدينا : $P_n = \frac{2(A_3^1 \times A_n^1)}{A_{n+3}^2} = \frac{6n}{(n+3)(n+2)}$. (2) نجد : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6}{n} = 0$. التفسير : كلما كان عدد الكريات السوداء كبيرا بالقدر الكافي فإن حدث سحب كرتين من لونين مختلفين يؤول إلى الحدث المستحيل .
		حل التمرين الثاني (5 ن) (1) نجد : $u_2 = \frac{8}{9}$ و $u_3 = \frac{8}{9}$. لدينا : $2u_2 \neq u_1 + u_3$ و $u_2^2 \neq u_1 \times u_3$ أي أن المتتالية (u_n) ليست حسابية و لا هندسية . (2) لدينا : $v_n = \frac{u_n}{n}$. أ - لدينا : $v_{n+1} = \frac{\left(\frac{2n+4}{3n+3}\right)u_n}{n+1} = \frac{(2n+2)u_n}{(n+1)3n} = \frac{2(n+1)u_n}{3n(n+1)} = \frac{2}{3} \times \frac{u_n}{n}$ أي : و منه : $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$. و منه : (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ و حدها الأول $v_1 = \frac{2}{3}$. ب - نجد : $v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

0.75

لدينا : $v_n = \frac{u_n}{n}$ و منه : $u_n = n.v_n$ و بالتالي : $u_n = n\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

0.25

ج - لدينا : $u_n = n\left(\frac{2}{3}\right)^n$ أي : $\ln u_n = \ln \left[n\left(\frac{2}{3}\right)^n \right]$ و منه : $\ln u_n = \ln n + n \ln \left(\frac{2}{3}\right)$

0.75

و بالتالي : $\ln u_n = n \left[\frac{\ln n}{n} + \ln \left(\frac{2}{3}\right) \right]$ هو المطلوب .

0.25

0.75

لدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left[\frac{\ln n}{n} + \ln \left(\frac{2}{3}\right) \right] = -\infty$ ، لأن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ و $\ln \left(\frac{2}{3}\right) < 0$.

0.25

0.75

إذن : بما أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = -\infty$ فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

0.25

0.75

(3) لدينا : $\frac{n \times 2^n}{u_n} = 3^n$ و منه : $S_n = 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n$ (مجموع متتالية هندسية) .

0.25

0.25

إذن : $S_n = 3 \times \frac{3^n - 1}{3 - 1}$ و بالتالي : $S_n = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 3)$ هو المطلوب .

0.25

حل التمرين الثالث: (4 ن)

(1) الإجابة الصحيحة هي (ب)
التعليل :

0.5

(2) الإجابة الصحيحة هي (أ)
التعليل :

(3) الإجابة الصحيحة هي (أ) .
التعليل :

0.5

(4) الإجابة الصحيحة هي (ب)
التعليل :

حل التمرين الرابع: (7 ن)

(1) حساب النهايات :

0.25

. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x \left(1 - \frac{1}{2} \times \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$

0.25

. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ ، لأن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

التفسير البياني : المستقيم $x=0$ مقارب لـ (C_f) .

(2) أ - الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ولدينا : $f'(x) = \ln x + 1 - \frac{\ln x}{x} = 1 + \frac{x \ln x - \ln x}{x}$

0.5

و منه : $f'(x) = 1 + \frac{(x-1)\ln x}{x}$ هو المطلوب .

0.25

0.25

ب - نلخص الإشارة في الجدول التالي :

0.5

0.25

0.5

0.25

x	0	1	$+\infty$
$x-1$	-	0	+
$\ln x$	-	0	+
$(x-1)\ln x$	+	0	+

- بما أنه من أجل كل $x > 0$: $f'(x) > 0$ فإن الدالة f متزايدة تماما على $]0; +\infty[$.
 - جدول التغيرات للدالة f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

0.75

- (3) لدينا : $(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$ أي : $\begin{cases} f'(1) = 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$ و منه نجد : $(T): y = x-1$.
 (4) أ - لدينا : $g(1) = f(1) = 0$ و منه إشارة $g(x)$ تكون كما يلي :

x	0	$1+\infty$	
$g(x)$	-	0	+

0.25

0.25

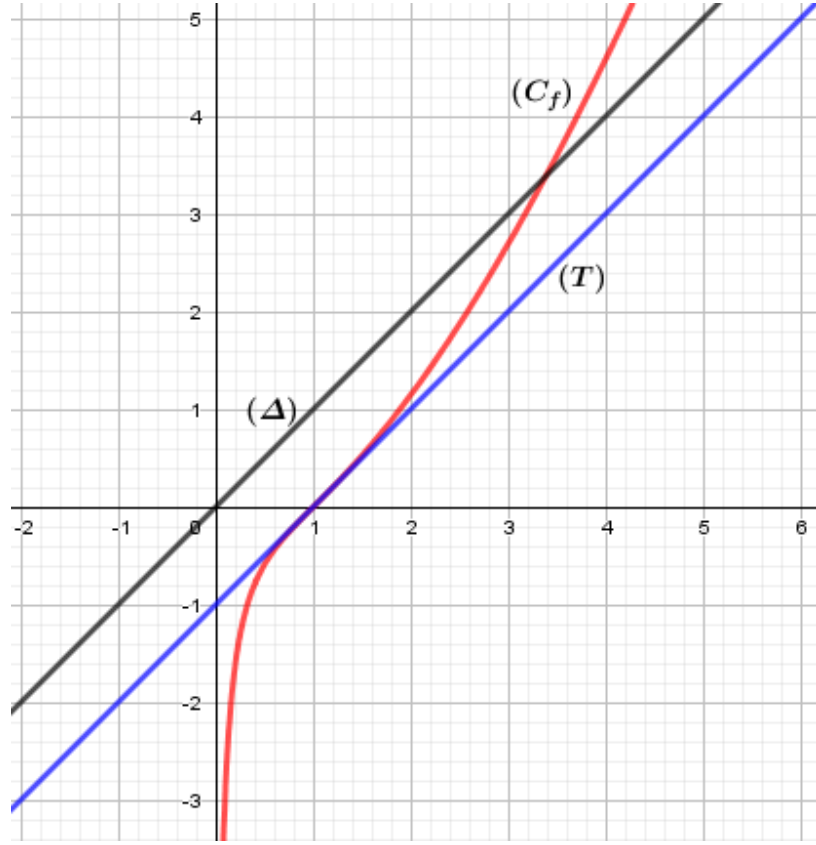
0.5

- إذن نستنتج أن وضعية (C_f) بالنسبة لـ (T) تكون حسب إشارة $g(x)$ أي أن :
 - (C_f) يقع تحت (T) في المجال $]0,1[$.
 - (C_f) يقع فوق (T) في المجال $]1; +\infty[$.
 - (T) يخترق (C_f) في النقطة $A(1,0)$.
 ب - نلاحظ أن المنحنى (C_f) يغير من وضعيته بالنسبة للمماس في النقطة A و منه هذه الأخيرة هي نقطة الإنعطاف للمنحنى (C_f) .
 ج - الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على $[3.3, 3.4]$ و $\begin{cases} g(3.3) \approx 0,92 \\ g(3.4) \approx 1,01 \end{cases}$ أي أن :
 $g(3.3) < 1 < g(3.4)$ و منه فإن المعادلة $g(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]3.3, 3.4[$.
 (5) لدينا : $g(x) = f(x) - x + 1$ أي : $g(x) - 1 = f(x) - x$ و منه فإن المعادلة $g(x) - 1 = 0$ تكافئ $f(x) - x = 0$ أي المعادلة $g(x) = 1$ تكافئ $f(x) = x$ لكن حسب ما سبق نعلم أن المعادلة $g(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا α و منه فإن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α .
 إذن فإن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم (Δ) في النقطة ذات الفاصلة α .

0.25

0.25

(6) الإنشاء و التمثيل :



(7) لدينا : $h(x) = \left| \ln x \right| \left(x - \frac{\ln x}{2} \right)$.

و منه :
$$\begin{cases} h(x) = -f(x) & ; x \in]0,1] \\ h(x) = f(x) & ; x \in [1; +\infty[\end{cases}$$

إذن : (C_h) ينطبق على (C_f) لما $x \in [1; +\infty[$ و (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل لما $x \in]0,1]$.

(8) أ - باستعمال التكامل بالتجزئة نضع :
$$\begin{cases} u(x) = \ln x ; u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = x ; v(x) = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$$
 و منه :

$$\int_1^e x \ln x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{1}{2} x \right) dx = \frac{1}{2} e^2 - \left[\frac{1}{4} x^2 \right]_1^e = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4}$$

و منه نجد :
$$\int_1^e x \ln x dx = \frac{e^2 + 1}{4}$$
 .

ب - باستعمال تعريف الدالة الأصلية نبين أن الدالة $x \mapsto x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto (\ln x)^2$ على $]0; +\infty[$.

لدينا :
$$A = \int_1^e f(x) dx = \int_1^e x \ln x dx - \frac{1}{2} \int_1^e (\ln x)^2 dx = \frac{e^2 + 1}{4} - \frac{1}{2} \left[x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x \right]_1^e$$

و منه :
$$A = \frac{e^2 - 2e + 5}{4} \text{ u.a}$$
 .