الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات
امتحان بكالوريا تجريبي التعليم الثانوي
الشعبة: علوم تجريبية

دورة: 2025

ثانوية عراب عبد القادر

اختبار في مادة: الرياضيات

المدة: 03 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 9 كريات منها : ثلاثة حمراء تحمل الأرقام 1 , 0 , -1 وأربعة بيضاء تحمل الأرقام 1 , 1 , 0 , -1 وكريتين خضراء تحمل الارقام 0 , -1 نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات من الكيس .

1) أحسب إحتمال الحوادث التالية :
A :" سحب ثلاث كرات من نفس اللون ".
B :" سحب ثلاث كرات مجموعهم منعدم " .
C :" سحب ثلاث كرات جداؤهم عدد سالب ".

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب العدد الأصغر من بين الأعداد المسحوبة .

أ) أعط قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X .

ب) أحسب الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X .

ج) أحسب $P(e^X - 1 \leq 0)$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1) نعتبر العددين المركبين $z_1 = 3 + 2i$ و $z_2 = 1 - 2i$.

أ) تحقق أن : $z_1 + \overline{z_2} = 4(1 + i)$.

ب) أكتب العدد المركب $z_1 + \overline{z_2}$ على الشكل المثلثي ثم على الشكل الأسي.

ج) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $(z_1 + \overline{z_2})^n$ حقيقيا .

2) في المستوي المنسوب لمعلم متعامد و متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A , B , C و D التي لواحقها على الترتيب $z_A = 3 + 2i$, $z_B = -3$, $z_C = 1 - 2i$ و $z_D = -1 - 6i$

أ) عين طويلة و عمدة العدد المركب $\dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

ب) G مرجح الجملة $\{(A; 1), (B; -1), (D; 1)\}$.
عين z_G لاحقة النقطة G ثم بين أن $ABDG$ مربع .

3) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} \| = 4\sqrt{5}$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرفة بحدها الأول $u_0 = \frac{3}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n - 1}$.

1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $1 < u_n < 2$.

2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n{}^2 + 3u_n - 2}{\sqrt{u_n - 1} + u_n - 1}$.

3) استنتج إتجاه تغير المتتالية (u_n) .

4) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة بـ $v_n = \ln(u_n - 1)$.

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ،يطلب تعيين حدها الأول .

ب- اكتب عبارة (v_n) بدلالة n ثم استنتج عبارة (u_n) بدلالة n .

ج- أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

5) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $P_n = (u_0 - 1) \times (u_1 - 1) \times (u_2 - 1) \times \ldots \times (u_n - 1)$.

- احسب بدلالة n الجداء P_n .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I الدالة العددية g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 + (x^2 + x)e^{-2x}$

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2) ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

3) استنتج أنه اجل كل عدد حقيقي x فإن $g(x) > 0$

II الدالة العددية f على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x - \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{e^x}\right)^2$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$ ،محدّدا وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

3) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4) بين أن (C_f) يقبل مماسين معامل توجيه كل منهما هو 1 ،ثم عين معادلة لكل منهما .

5) بين أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيين إحداثياتهما.

6) بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $0.43 < \alpha < 0.44$

7) أنشئ كلا من (Δ) و (C_f) .

III ليكن λ عدد حقيقي موجب تماما.

1) عين الأعداد الحقيقية a، b و c حتى تكون الدالة $x \longmapsto (ax^2 + bx + c)e^{-2x}$ دالة أصلية للدالة $x \longmapsto (x+1)^2 e^{-2x}$ على $\mathbb{R}$

2) أ- احسب بدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها:

$x = 0$ ، $x = \lambda$ و $y = x$

ب- احسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعلم أن فصائل الدم للإنسان أربعة هي : O , A , B , AB تتوزع مجموعة من عشرة أشخاص حسب فصيلتهم الدموية كمايلي:
أربعة أشخاص من فصيلة O وثلاثة من فصيلة A وشخصان من فصيلة B و شخص واحد من فصيلة AB نختار عشوائيا شخصين من هذه المجموعة :

1) أحسب إحتمال كل من الأحداث :
C :" الشخصان المختاران لهما نفس الفصيلة الدموية ".
D :" الشخصان المختاران من فصيلتين دمويتين مختلفتين " .
E :" فصيلة أحد الشخصين المختارين هي A فقط " .

2) نرفق الفصيلة O بالعدد 4 الذي يمثل عدد الفصائل التي يمكن أن تتلقى من الفصيلة O وهكذا نرفق الفصيلة A بالعدد 2 والفصيلة B بالعدد 2 والفصيلة AB بالعدد 1 .
ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل اختيار لشخصين بمجموع الرقمين المرفقين بفصيلتهما .

أ) حدد قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X .

ب) أحسب الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

لكل سؤال جواب واحد صحيح عينه مع التبرير:

1) مساحة الحيز المحصور بين منحنى الدالة الأسية والمستقيمات $y = -1$ ، $x = 1$ و $x = 0$ تساوي :
أ) $S = e$ u.a ب) $S = \ln 2$ u.a ج) $S = \frac{e}{2}$ u.a

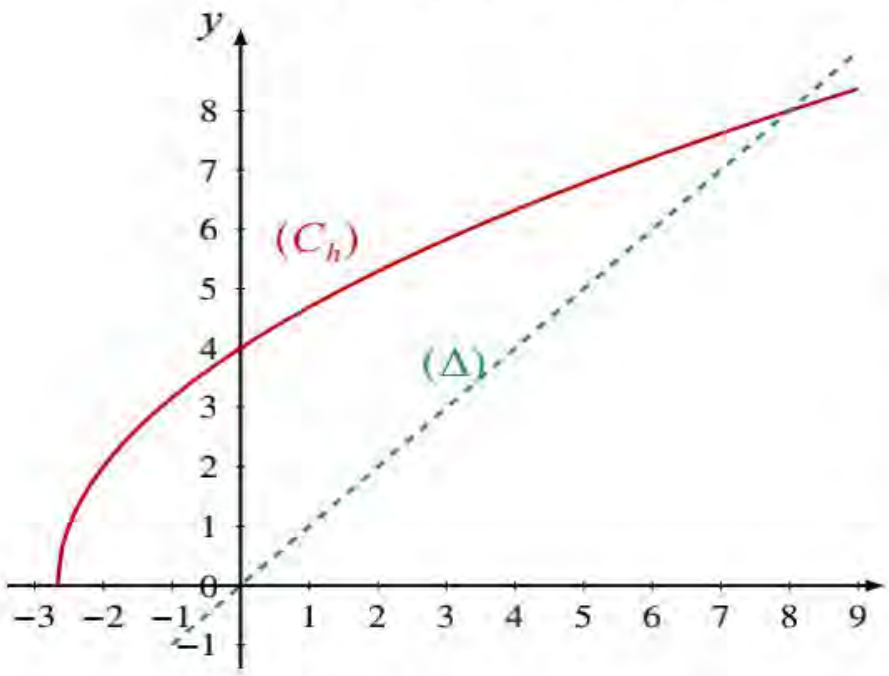
2) كيس غير شفاف يحتوي على 3 كريات سوداء وكريتين لونهما أبيض وكرة واحدة لونها أخضر نسحب عشوائيا مع الإرجاع 3 كريات من هذا الكيس ، احتمال سحب 3 كرات من نفس اللون هو :
أ) $\frac{1}{9}$ ب) $\frac{1}{8}$ ج) $\frac{1}{6}$

3) المتتالية العددية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب $u_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{2}{x}(1+\ln x)\,dx$
نضع : $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{36}$ قيمة S هي :
أ) 2022 ب) 1443 ج) 1444

4) المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2$
ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب . $v_n = u_n - \alpha$
قيمة α حتى تكون (v_n) هندسية هي:
أ) $\frac{3}{4}$ ب) -4 ج) 8

التمرين الثالث: (5 0 نقاط)

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حيث : $\ln v_2 - \ln v_3 = \ln 2$ و $\ln \sqrt[3]{v_6} + \ln v_2 = 0$.



1) عين أساس المتتالية (v_n) وحدها الأول v_0 ثم أكتب v_n بدلالة n و أدرس تقاربها .

2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{6u_n + 16}$.

لتكن الدالة h المعرفة على المجال $\left]\frac{-8}{3}; +\infty\right[$ كما يلي: $h(x) = \sqrt{6x+16}$ و (C_h) تمثيلها البياني و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (أنظر الشكل التالي) .

أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 . ثم ضع تخمينا حول إتجاه تغير (u_n) وتقاربها .

3) برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n < 8$ ثم أستنتج إتجاه تغير (u_n) وتقاربها .

4) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < 8 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(8 - u_n)$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < 8 - u_n \leq v_n$. ثم إستنتج نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين الرابع: (7 0 نقاط)

I الدالة العددية g معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = -x^3 + 1 - 2\ln x$

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} g(x)$

2) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

3) أحسب $g(1)$ ثم استنتج اشارة $g(x)$

II الدالة العددية f معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = -x + 2 + \frac{\ln x}{x^2}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث $||\vec{i}|| = ||\vec{i}|| = 2cm$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$

2) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$ فإن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

3) بين أن المستقيم (Δ) ذو معادلته $y = -x + 2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) ، ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

4) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) ، يطلب تعيين معادلة له .

5) ارسم كلا من المستقيمين (Δ) ، (T) ثم ارسم المنحنى (C_f) . (نأخذ $f(0.6) \approx 0$ و $f(2.2) \approx 0$)

6) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x) = m$.

7) ليكن α عدد حقيقي حيث: $\alpha > 1$

أ- باستعمال التكامل بالتجزئة احسب مايلي : $\int_1^{\alpha} \frac{\ln x}{x^2} dx$.

ب- استنتج $A(\alpha)$ مساحة الحيز المحصور بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = 1$ و $x = \alpha$.

ج- احسب $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} A(\alpha)$

انتهى الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

1- حساب احتمال الحوادث

$P(A)=\dfrac{C_3^3+C_4^3}{C_9^3}$ 0,5

$P(B)=1-\dfrac{C_6^3}{C_9^3}$ 0,75

$P(C)=\dfrac{C_3^3+C_2^2C_3^1}{C_9^3}$ 0,75

2- تعيين قانون الاحتمال

$X=x_i$	-1	0	1
$P(X=x_i)$	$\frac{64}{84}$	$\frac{19}{84}$	$\frac{1}{84}$

0,5 0,5 0,5

3- الأمل الرياضياتي

$E(x)=-1\times\frac{64}{84}+0\times\frac{19}{84}+1\times\frac{1}{84}=-0.75$ 0,5

الموضوع الأوّل :

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1. التحقق: $Z_1+\bar{Z}_2=4+4i=4(1+i)$ 0,25

2. لدينا: $\theta=\frac{\pi}{4}+2K\pi$ و $r=4\sqrt{2}$ ومنه

الشكل المثلثي:

$Z_1+\bar{Z}_2=4\sqrt{2}(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right))$ 0,5

الشكل الأسي:

$Z_1+\bar{Z}_2=4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ **0,25**

3. لدينا $(Z_1+\bar{Z}_2)^n=(4\sqrt{2})^n e^{in\frac{\pi}{4}}$

ومنه حتى يكون هذا العدد حقيقيا يجب أن يكون

0;5

$n\frac{\pi}{4}=K\pi \quad /K\epsilon Z$ أي $n=4K$.

4. لدينا $\frac{Z_A-Z_C}{Z_B-Z_C}=\frac{2+4i}{-4+2i}=-i$ ومنه $\begin{cases} r=1 \\ \arg\left(\frac{Z_A-Z_C}{Z_B-Z_C}\right)=-\frac{\pi}{2}+2K\pi \end{cases}$

نستنتج أن المثلث ABC قائم. **01**

5. لاحقة G: $Z_G=5-4i$ **0,25**

التبيين:

- لدينا $\frac{Z_B-Z_A}{Z_B-Z_G}=\frac{-6-2i}{-8+4i}=\frac{1}{2}(1+i)$ ومنه $\arg\left(\frac{Z_B-Z_A}{Z_B-Z_G}\right)=\frac{\pi}{2}+2K\pi$

اذن المستقيمان (BG) و (AB) متعامدان.

- ولدينا $\frac{Z_B-Z_A}{Z_D-Z_G}=\frac{-6-2i}{-6-2i}=1$ ومنه $\begin{cases} r=1 \\ \arg\left(\frac{Z_A-Z_C}{Z_B-Z_C}\right)=2K\pi \end{cases}$

اذن المستقيمان (DG) و(AB) متوازيان و $AB=DG$

- مما سبق نجد أن الرباعي ABDG هو متوازي أضلاع به زاوية قائمة وضلعان متتاليان متقايسان فهو مربع. **0,75**

3) (Γ) مجموعة النقط M من المستو

0,5 **دائرة مركزها G و نصف قطرها** $r=4\sqrt{5}$

ملاحظة تقبل أي اجابة صحيحة في أي تمرين

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرفة بحدها الأول $u_0 = \frac{3}{2}$

و من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n - 1}$.

1) نثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $1 < u_n < 2$:

من أجل $n = 0$ لدينا $1 < u_0 = \frac{3}{2} < 2$ إذن الخاصية محققة

من فرضية التراجع لدينا $1 < u_n < 2$

$1 - 1 < u_n - 1 < 2 - 1$

$0 < \sqrt{u_n - 1} < 1$

0.75

$1 < u_{n+1} < 2$

و عليه ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $1 < u_n < 2$

2) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 3u_n - 2}{\sqrt{u_n - 1} + u_n - 1}$$

لدينا

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \sqrt{u_n - 1} - u_n =$$

$$\frac{(\sqrt{u_n - 1} - (u_n - 1)) \times (\sqrt{u_n - 1} + (u_n - 1))}{\sqrt{u_n - 1} + u_n - 1}$$

$$= \frac{(\sqrt{u_n - 1})^2 - (u_n - 1)^2}{\sqrt{u_n - 1} + u_n - 1} = \frac{u_n - 1 - (u_n^2 - 2u_n + 1)}{\sqrt{u_n - 1} + u_n - 1}$$

0.75

$$= \frac{-u_n^2 + 3u_n - 2}{\sqrt{u_n - 1} + u_n - 1}$$

3) استنتج إتجاه تغير المتتالية (u_n):

لدينا $\sqrt{u_n - 1} \succ 0$ و $u_n > 1$ ومنه 0.25

$0 < u_n - 1$

ومنه $\sqrt{u_n - 1} + u_n - 1 \succ 0$

ومنه إشارة الفرق من إشارة البسط ولدينا

0.75

u_n	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$u_{n+1} - u_n$		$-$	0	$+$	0	$-$	

ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

4) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة بـ $v_n = \ln(u_n - 1)$.

أ- نبين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

$$Vn + 1 = \ln(u_{n+1} - 1) = \ln(1 + \sqrt{u_n - 1} - 1)$$

$$= \ln(\sqrt{u_n - 1}) = \ln(u_n - 1)^{\frac{1}{2}}$$

0.5

$$= \frac{1}{2}\ln(u_n - 1) = \frac{1}{2}V_n$$

نحسب حدها الأول :

0.25

$$V_0 = \ln(u_0 - 1) = \ln(\tfrac{3}{2} - 1) = \ln(\tfrac{1}{2}) = -\ln 2$$

أ- كتابة عبارة (v_n) بدلالة n : عبارة الحد العام لـ (V_n) تعطى كمايلي

$$V_n = V_0 \times q^n = -\ln 2 \times (\tfrac{1}{2})^n$$

و عليه لدينا حسب ماسبق $V_n = \ln(u_n - 1)$

ب- إستنتاج عبارة (u_n) بدلالة n :

$e^{V_n} = u_n - 1$ إذن $u_n = e^{V_n} + 1$ و بالتالي

0.5

$$u_n = e^{-\ln 2 \times (\frac{1}{2})^n} + 1$$

ج- حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$:

لدينا $-1 < \frac{1}{2} < 1$

و بالتالي $\lim\limits_{n \to +\infty} (\frac{1}{2})^n = 0$ 0.5

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} e^{-\ln 2 \times (\frac{1}{2})^n} + 1$$

و منه $= 1 + 1 = 2$

5) حساب الجداء P_n :

$$P_n = (u_0 - 1) \times (u_1 - 1) \times (u_2 - 1) \times \ldots \times (u_n - 1).$$

$$= e^{V_0} \times e^{V_1} \times e^{V_2} \times \ldots\ldots \times e^{V_n}$$

0.75

$$= e^{v_0\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}\right)}$$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I 1/ حساب النهايات

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ 0.25

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$ 0.25

2/ دراسةتغيرات دالة g

g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا

$g'(x) = (2x+1)e^{-2x} - 2e^{-2x}(x^2+x)$

$g'(x) = e^{-2x}(2x+1-2x^2-2x)$ 0.25

$= e^{-2x}(-2x^2+1)$

إشارة المشتقة

لدينا $e^{-2x} \succ 0$ و منه اشارة $g'(x)$ من إشارة $(-2x^2+1)$ 0.25

x	$-\infty$		$\frac{-1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$-2x^2+1$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

g متناقصةعلى المجال $\left]-\infty, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right[$ و على المجال $\left]\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$

g متزايدة على المجال $\left]\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$

جدول تغيرات الدالة g 0.25

x	$-\infty$		$\frac{-1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$g\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$	↗	$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	↘	1

3/ استنتاج أن $g(x) \succ 0$ 0.25

من جدول التغيرات $g(x) \geqslant g\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \succ 0$ إذن $g(x) \succ 0$

II $f(x) = x - \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{e^x}\right)^2$

1/ النهايات $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ 0.25

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ 0.25

2/ نبين أن المستقيم $(\Delta): y = x$ مستقيم مقارب مائل ل (c_f) بجوار $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{e^x}\right)^2\right]$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)^2\right] = 0$ 0.5

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}\right) = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^x}\right) = 0$

الوضع النسبي ل (c_f) و (Δ)

$f(x) - x = -\frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{e^x}\right)^2$

$= -\frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{e^x}\right)^2$

لدينا $\frac{x+1}{e^x} = 0$ $\quad x = -1$ و $e^x \neq 0$ 0.5

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)-x$		$-$	0	$-$	
الوضع النسبي ل (c_f) و (Δ)		(c_f) تحت (Δ)	(c_f) يقطع (Δ) في $(-1;-1)$	(c_f) تحت (Δ)	

2/ نبين أن $f'(x) = g(x)$

f قابلة للاشتقاق ولدينا

$f'(x) = 1 - \frac{1}{2}\left[\frac{e^x - e^x(x+1)}{(e^x)^2} \times 2\left(\frac{x+1}{e^x}\right)\right]$ 0.5

$f'(x) = 1 - \frac{-xe^x(x+1)}{(e^x)^3} = 1 + (x^2+x)e^{-2x}$

$= g(x)$

/ استنتاج تغيرات دالة f

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ 0.25

f متزايدةتماما على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

0.25

4/ نبين أن (c_f) يقبل مماسين معامل توجيه كل منهما 1

$f'(x_0) = 1$

$1 + (x_0^2 + x_0)e^{-2x_0} = 1$

$(x_0^2 + x_0)e^{-2x_0} = 0$

$(x_0^2 + x_0) = x_0(x_0+1) = 0$ و $e^{-2x_0} \neq 0$

إذن $x_0 = 0$ او $x_0 = -1$ 0.5

معادلةالمماسين :

$(T_1): y = f'(-1)(x-(-1)) + f(-1)$

$(T_1): y = x$ 0.25

$(T_2): y = f'(0)(x-(0)) + f(0)$

$(T_2): y = x - \frac{1}{2}$ 0.25

5/ نبين أن (c_f) يقبل نقطتي إنعطاف

$f''(x) = g'(x)$ 0.5

x	$-\infty$		$\frac{-1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

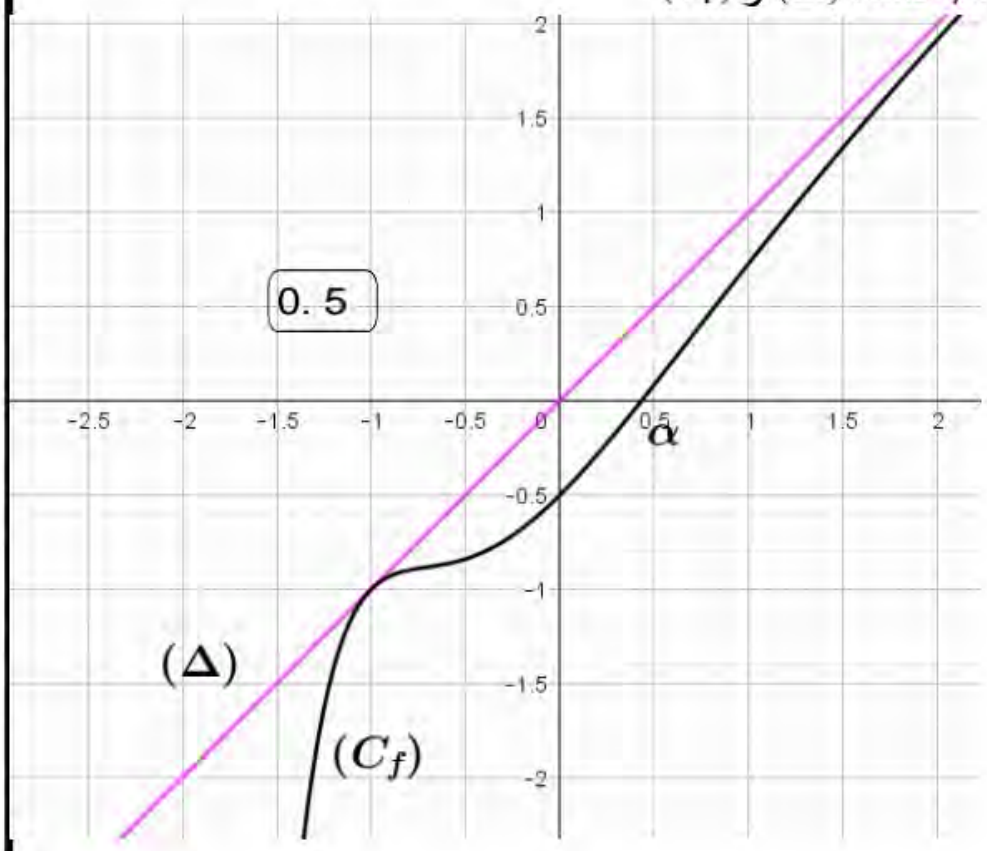
نقطتي الإنعطاف هما $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}; f\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\right)$ و $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$

6/ نبين أن (c_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة α

يكفي أن نبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة 0.25

7/ انشاء (Δ) و (c_f)



0. 5

III

1/ تعيين الاعداد الحقيقية a و b و c حتى تكون الدالة

$x \to (ax^2 + bx + c)\, e^{-2x}$

دالة اصلية للدالة $x \to (x+1)^2 e^{-2x}$

$((ax^2 + bx + c)\, e^{-2x})'$

$= (2ax + b)\, e^{-2x} - 2e^{-2x}(ax^2 + bx + c)$

$= e^{-2x}(-2ax^2 + (2a - 2b)x - 2c + b)$

ولدينا $(x+1)^2 e^{-2x} = (x^2 + 2x + 1)\, e^{-2x}$

بالمطابقة نجد

$$\begin{cases} -2a = 1 \\ 2a - 2b = 2 \\ -2c + b = 1 \end{cases} \Longleftarrow \begin{cases} a = \frac{-1}{2} \\ b = \frac{-3}{2} \\ c = \frac{-5}{4} \end{cases}$$ 0.25

2 / حساب المساحة $A(\lambda)$ بدلالة λ

$$A(\lambda) = \int_0^{\lambda} x - f(x)\,dx = \int_0^{\lambda} \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{e^x}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\lambda} (x+1)^2 e^{-2x}\,dx$$

$$A(\lambda) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{-1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{4}\right)e^{-2x}\right]_0^{\lambda}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{-1}{2}\lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda - \frac{5}{4}\right)e^{-2\lambda} + \frac{5}{4}\right]$$ 0.25

حساب $\lim_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$ /

$$\lim_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = \frac{5}{8}$$ 0.25

انتهى الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

1. حساب الاحتمالات:

- $P(C) = \frac{C_4^2+C_3^2+C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{10}{45}$
- $P(E) = \frac{C_3^1 C_7^1}{C_{10}^2} = \frac{21}{45}$
- $P(D) = \frac{C_4^1 C_7^1+C_3^1 C_3^1+C_2^1 C_1^1}{C_{10}^2} = \frac{35}{45}$

2. قيم المتغير العشوائي: $X = \{3، 4، 5، 6، 8\}$

x_i	3	4	5	6	8
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{45}$	$\frac{10}{45}$	$\frac{4}{45}$	$\frac{20}{45}$	$\frac{6}{45}$

3. قانون الاحتمال:

- $P(X=3) = \frac{C_1^1 C_5^1}{C_{10}^2} = \frac{5}{45}$
- $P(X=4) = \frac{C_5^2}{C_{10}^2} = \frac{10}{45}$
- $P(X=5) = \frac{C_4^1 C_1^1}{C_{10}^2} = \frac{4}{45}$
- $P(X=6) = \frac{C_4^1 C_3^1+C_4^1 C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{20}{45}$
- $P(X=8) = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{8}{45}$

4. حساب الأمل الرياضي : $E(X) = \frac{243}{45}$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

لكل سؤال جواب واحد صحيح عينه مع التبرير:

1) مساحة الحيز المحصور
بين منحنى الدالة الأسية والمستقيمات
$y = -1$ ، $x = 1$ و $x = 0$ تساوي :

أ) $S = e$ u.a (0.5)

الموضوع الثّاني :

التبرير : بما أن منحنى الدالة الأسية فوق المستقيم ذو المعادلة $y = -1$ فإن

(0.5) $S = \int_0^1 e^x - (-1)\ dx = [e^x + x]_0^1$

$= e + 1 - e^0 + 0 = e$ u.a

2) كيس غير شفاف يحتوي على 3 كريات سوداء وكريتين لونهما أبيض و كرة واحدة لونها أخضر نسحب عشوائيا مع الإرجاع 3 كريات من هذا الكيس (0.5)

ج) احتمال سحب 3 كرات من نفس اللون هو: $\frac{1}{6}$

التبرير : (0.5) $p(A) = \frac{3^3+2^3+1^3}{6^3} = \frac{36}{216} = \frac{1}{6}$

3) المتتالية العددية U_n المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب : $U_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{2}{x}(1+\ln x)\ dx$ (0.5)

ب) 1443 قيمة $S = U_0 + U_1 + \ldots + U_{36}$ هي :
التبرير :

$S = U_0 + U_1 + \ldots + U_{36} =$ (0.5)

$\int_{e^0}^{e^1} \frac{2}{x}(1+\ln x)\ dx + \int_{e^1}^{e^2} \frac{2}{x}(1+\ln x)\ dx + \ldots + \int_{e^{36}}^{e^{37}} \frac{2}{x}(1+\ln x)\ dx$

ومنه حسب علاقة شال :

$S = \int_{e^0}^{e^{37}} \frac{2}{x}(1+\ln x)\ dx = \left[2\ln(x) + 2\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_{e^0}^{e^{37}} =$

$2\ln(e^{37}) + (\ln e^{37})^2 - (2\ln(e^0) + (\ln e^0)^2) =$

$2(37) + (37)^2 - 0 = 1443$

4) المتتالية العددية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $U_0 = 2$

ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{3}{4}U_n + 2$

ونعتبر المتتالية العددية V_n

المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب . $V_n = U_n - \alpha$

ج) 8 قيمة α حتى تكون V_n هندسية هي: (0.5)

التبرير : لدينا

$$V_{n+1} = U_{n+1} - \alpha = \frac{3}{4}U_n + 2 - \alpha$$

ولدينا من جهة أخرى $U_n = V_n + \alpha$

بتعويضها في العبارة السابقة نجد : (0.5)

$V_{n+1} = \frac{3}{4}(v_n + \alpha) + 2 - \alpha = \frac{3}{4}(v_n) + \frac{3}{4}\alpha + 2 - \alpha =$

$$\frac{3}{4}(v_n) - \frac{1}{4}\alpha + 2$$

حتى تكون V_n هندسية معناه :

ومنه : $-\frac{1}{4}\alpha + 2 = 0$ $\alpha = (-2)(-4) = 8$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1. **ايجاد الاساس و الحد الأول:**

لدينا $\ln(v^2) - \ln(v^3) = \ln(2)$

أي $\ln\left(\frac{v^2}{v^3}\right) = \ln(2)$

ومنه $\frac{v^2}{v^3} = 2$ اذن $q = \frac{1}{2}$

ولدينا $\ln(\sqrt[3]{v_6}) + \ln(v_2) = 0$

أي $\ln(\sqrt[3]{v_6} \times v_2) = 0$ $\sqrt[3]{v_6} \times v_2 = 1$

و منه $\sqrt[3]{(v_0\, q^6)} \times v_0\, q^2 = 1$

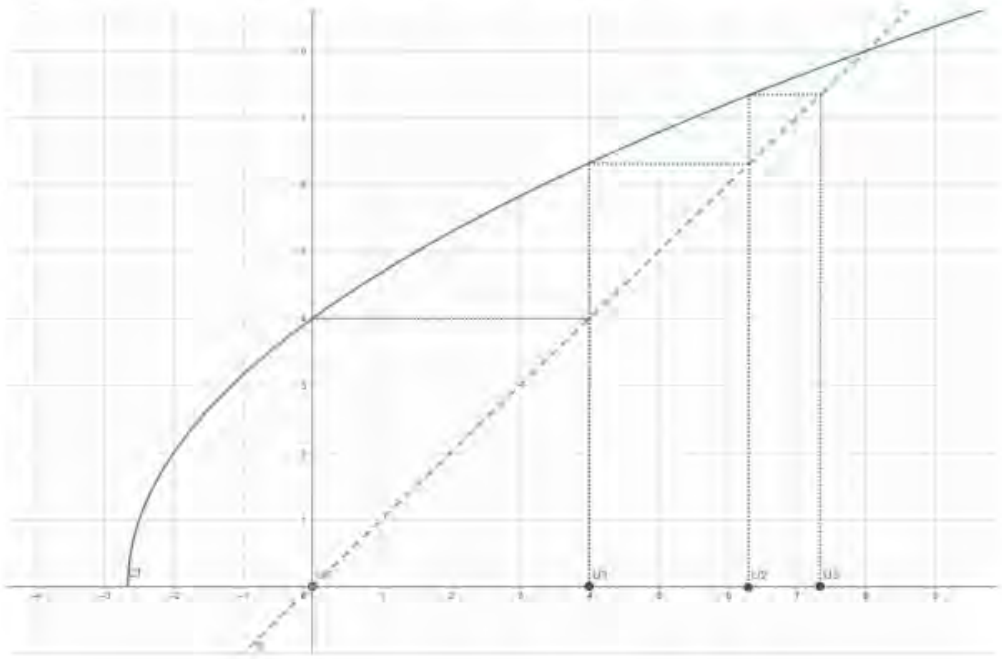
ومنه $(V_0)^{\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 1$ اي $(V_0)^{\frac{3}{4}} = 16$

اذن $v_0 = 8$

عبارة الحد العام : $V_n = 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$

التقارب: بما أن $-1 < q < 1$ فان المتتالية (V_n) متقاربة و $\lim_{\infty} V_n = 0$.

2. نخمن أن المتتالية (U_n) متزايدة ومتقاربة نحو 8.



3-البرهان بالتراجع أن $0 \leq_n < 8$:

من أجل $n = 0$ نجد $0 \leq U_0 = 0 < 8$ ومنه الخاصية محققة .

نفرض صحة الخاصية من أجل n ونبرهن صحتها من أجل n+1 أي نبرهن صحة $0 \leq_{n+1} < 8$

لدينا $0 \leq U_n < 8$

ومنه $0 \leq 6U_n < 48$

أي $0 \leq 16 \leq 6U_n + 16 < 64$

اذن $0 \leq U_{n+1} = \sqrt{6U_n + 16} < 8$

ومنه الخاصية محققة من أجل n+1 ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فان الخاصية $0 \leq U_n < 8$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

اتجاه التغير : لدينا

$$U_{n+1} - U_n = \frac{{U_{n+1}}^2 - {U_n}^2}{U_{n+1} + U_n} = \frac{6U_n + 16 - {U_n}^2}{U_{n+1} + U_n}$$

من أجل $0 \leq U_n < 8$ نجد $6U_n + 16 - {U_n}^2 > 0$ ومنه $U_{n+1} - U_n > 0$ (يمكن الاستعانة بالمميز لتعيين الاشارة) اذن المتتالية (U_n) متزايدة تماما وهي محدودة فهي متقاربة.

3. **التبيين:**

الطرف الأيسر: لدينا مما سبق $0 \leq U_{n+1} < 8$

ومنه $0 < 8 - U_{n+1}$

الطرف الأيمن: نريد اثبات أن: $8 - \sqrt{6U_n + 16} \leq \frac{1}{2}(8 - U_n)$ أي:

$4 + \frac{1}{2}U_n \leq \sqrt{6U_n + 16}$ بما أن الطرفين موجبين يمكن مقارنة مربعيهما أي يكفي اثبات أن

$$16 + 4U_n + \frac{1}{4}{U_n}^2 \leq 6U_n + 16$$

أي يكفي اثبات أن $\frac{1}{4}{U_n}^2 - 2U_n \leq 0$

من أجل $0 \leq U_n < 8$ نجد $\frac{1}{4}U_n(U_n - 8) \leq 0$ اي $\frac{1}{4}{U_n}^2 - 2U_n \leq 0$ وهو المطلوب .

ب) التبيين : لدينا مما سبق

$$\text{n متراجحة} \begin{cases} 8 - U_n \leq \frac{1}{2}(8 - U_{n-1}) \\ 8 - U_{n-1} \leq \frac{1}{2}(8 - U_{n-2}) \\ \vdots \quad \leq \quad \vdots \\ 8 - U_2 \leq \frac{1}{2}(8 - U_{n-1}) \\ 8 - U_1 \leq \frac{1}{2}(8 - U_0) \end{cases}$$

بالضرب طرفا لطرف نجد $8 - U_n \leq (8).\left(\frac{1}{2}\right)^n = V_n$ وهو المطلوب.

- لدينا $\lim_{\infty}(8 - U_n) \leq \lim_{\infty} V_n = 0$

ومنه $\lim_{\infty} U_n = 8$

التمرين الرابع: (7 0 نقاط)

I 1/ حساب النهايات

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty \text{ ومنه } \begin{cases} \lim_{x\to+\infty} -x^3 = -\infty \\ \lim_{x\to+\infty} -2\ln x = -\infty \end{cases}$$ 0.25

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} g(x) = +\infty \text{ ومنه } \begin{cases} \lim_{x\xrightarrow{>}0} -x^3+1 = 1 \\ \lim_{x\xrightarrow{>}0} -2\ln x = +\infty \end{cases}$$ 0.25

المشتقة : الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$

$$g'(x) = -3x^2 - \frac{2}{x} < 0 :$$ 0.25

ومنه g متناقصة تماما على $]0;+\infty[$:

جدول التغيرات :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	−	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

0.25

3) $g(1) = -1^3+1-2\ln 1 = 0$ 0.25

والدالة g متناقصة تماما ومنه اشارة $g(x)$

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	+	0	−	

0.25

الجزء الثاني :

f الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$

ب : $f(x) = -x+2+\frac{\ln x}{x^2}$

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ ومنه $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} -x+2 = -\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \end{cases}$ 0.25

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x) = -\infty \text{ ومنه } \begin{cases} \lim_{x\xrightarrow{>}0} -x+2 = 2 \\ \lim_{x\xrightarrow{>}0} \frac{\ln x}{x^2} = -\infty \end{cases}$$ 0.25

0.25 $x = 0$ معادلة مستقيم المقارب ل (C_f) عمودي.

2) أ) من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا :

$$f'(x) = -1+\frac{\frac{1}{x}x^2-2x(\ln x)}{x^4} = -1+\frac{x-2x(\ln x)}{x^4}.$$

0.5 $$= -1+\frac{1-2(\ln x)}{x^3} = \frac{-x^3+1-2\ln x}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$$

ب) اشارة المشتقة من اشارة $g(x)$ لأن $x^3 > 0$ على المجال $]0;+\infty[$ ومنه :

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;1]$ 0.25

الدالة f متناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$ 0.25

جدول التغيرات . 0.25

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	−	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$

3) أ) تبيان أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x+2$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - y = \lim_{x\to+\infty} x+2+\frac{\ln x}{x^2}+(-x+2)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$$ 0.25

و منه المستقيم ذو المعادلة $y = -x+2$

مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

ب) دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .

$f(x)-y = \frac{\ln x}{x^2}$ اشارة الفرق من أشارة $\ln x$ ومنه

0.5

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-y$	‖	−	0	+	
الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ)	‖	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) فوق (Δ)	

4) تبيان أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ)

أي لهما نفس معامل التوجيه : لتكن x_0 فاصلة نقطة

التماس ومنه $f'(x_0) = -1$ ومنه $\frac{-x_0^3+1-2\ln x_0}{x_0^3} = -1$

ومنه $-x_0^3+1-2\ln x = -x_0^3$ ومنه $2\ln x_0 = 1$ ومنه $x_0 = e^{\frac{1}{2}}$.

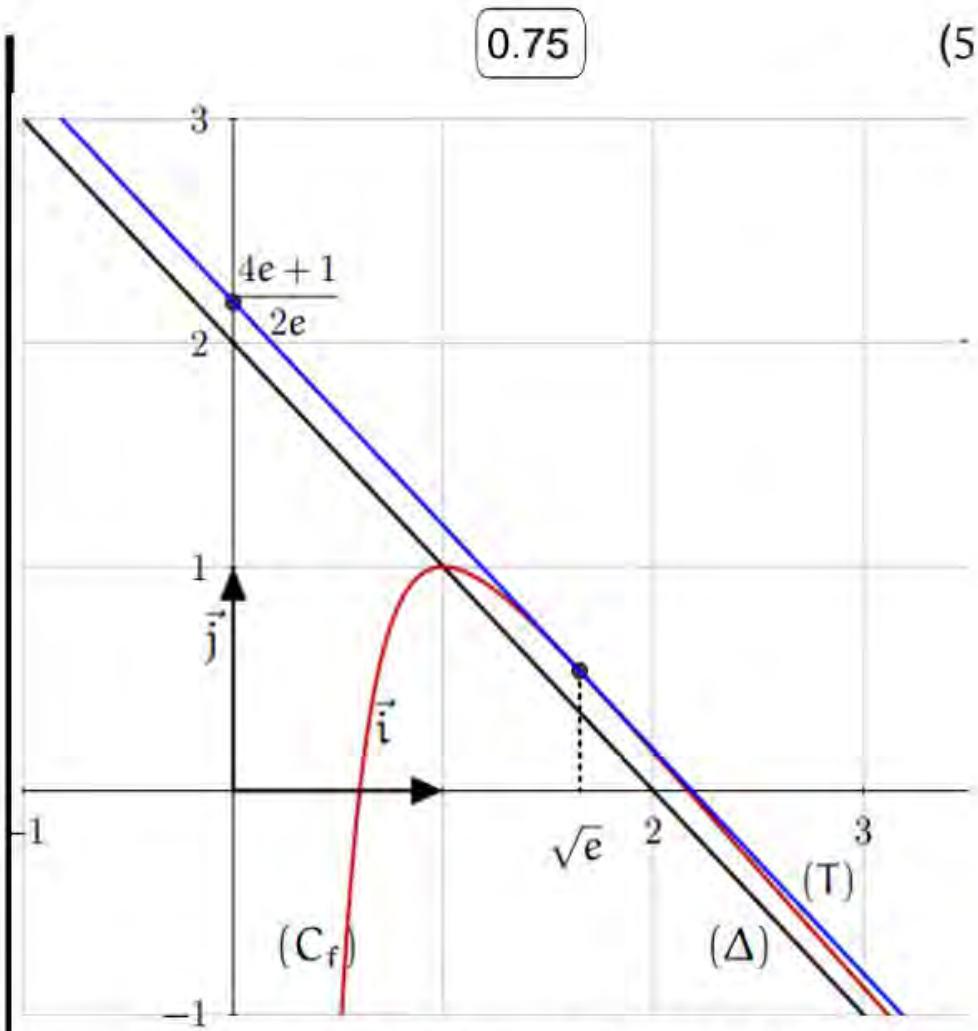
معادلة المماس عند $x_0 = e^{\frac{1}{2}}$ هي : 0.25

$$y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

$$y = -1(x-e^{\frac{1}{2}})+f(e^{\frac{1}{2}})$$

$$y = -x+\frac{4e+1}{2e}$$ 0.5

(5 0.75



6) المناقشة البيانية : حلول المعادلة $f(x) = m$ بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f)مع المستقيم ذو المعادلة $y = m$ (مناقشة أفقية)

من أجل $m < 1$ المعادلة تقبل حلين مختلفين

0. 25

من أجل $m = 1$ المعادلة تقبل حل واحد

من أجل $m > 1$ المعادلة لا تقبل حلولا

7) $\int_1^{\alpha} \frac{\ln x}{x^2} dt$

باستعمال التكامل بالتجزئة و بفرض

$$\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x^2} & u(x) = \frac{-1}{x} \\ v(x) = \ln x & v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$ 0. 25

$$\int_1^{\alpha} \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[(\ln x)(\frac{-1}{x})\right]_1^{\alpha} - \int_1^{\alpha} \frac{-1}{x^2} dx$$

$$= \frac{-\ln\alpha}{\alpha} - \left[\frac{1}{x}\right]_1^{\alpha} = \frac{-\ln\alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} + 1$$ 0. 25

8) أ) مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات :

$y = -x + 2$ ، $x = 1$ و $x = \alpha$.

لدينا من أجل x من المجال : $[1; \alpha]$ (C_f) فوق Δ ومنه :

$$A(\alpha) = \int_1^{\alpha} f(x) + x - 2dx \| \vec{i} \| \| \vec{j} \| cm^2$$

$$A(\alpha) = \int_1^{\alpha} \frac{\ln x}{x^2} dx \ 2 \times 2cm^2$$ 0. 25

$$A(\alpha) = 4(\frac{-\ln\alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} + 1)cm^2$$

ج) $\lim_{\alpha \to +\infty} A(\alpha) = \lim_{\alpha \to +\infty} 4(\frac{-\ln\alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} + 1) = 4$

0. 25

لأن $\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{-\ln\alpha}{\alpha} = 0$ و $\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{1}{\alpha} = 0$.

انتهى الموضوع الثاني

الموضوع والحل

نهاية المشوار

بالتوفيق في امتحان بكالوريا 2025

وفي الحياة بصفة عامة