

ثانوية بن زايد سعيد ابن هاشمي — العوانة
ثانوية راشدي محمد — سيدي معروف
ثانوي مدوري محمد بن مسعود — بن ياجيس

امتحان بكالوريا تجريبي للتعليم الثانوي
الشعبة: علوم تجريبية
دورة: ماي 2025

المدة: 03 سا و 30 د

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي كيس غير شفاف على عشر كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس موزعة: خمس كريات بيضاء مرقمة بـ -1 ، 0 ، 1 ، 2 و 3 ؛ ثلاث كريات خضراء مرقمة بـ 3 ، 4 و 5 ؛ وكرتين حمراوين مرقمتين بـ -1 و 0 .
نسحب عشوائيا من الكيس أربع كريات في آن واحد. نعتبر الأحداث التالية:

A : «الكريات الأربع المسحوبة من نفس اللون».
 B : «الحصول على كريات جداء أرقامها عدد زوجي».
 C : «الحصول على كريات مجموع أرقامها عدد فردي».
 D : «الحصول على كريات جداء أرقامها سالب تماما».

1/ أحسب كلا من $P(A)$ ، $P(B)$ ، $P(C)$ و $P(D)$.

2/ أحسب $P_A(C)$. هل الحدثان A و C مستقلان؟ علّل.

3/ ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لأربع كريات عدد الأرقام السالبة تماما المسجلة عليها.

1/ عرّف قانون احتمال المتغير العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$.

ب/ أحسب $P(C_3^X = 3)$.

4/ أحسب احتمال الحدث C في حالة سحب لأربع كريات من الكيس على التوالي دون إرجاع.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس موجه $(O; \vec{u}; \vec{v})$. عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد مع التبرير في كل حالة:

1/ حلول المعادلة ذات المجهول المركب Z : $Z^2 = 1 - i4\sqrt{3}$ هي:

(أ) $S = \{2 + i\sqrt{3}; -2 - i\sqrt{3}\}$ (ب) $S = \{2 - i\sqrt{3}; -2 + i\sqrt{3}\}$ (ج) $S = \{2 + i\sqrt{3}; 2 - i\sqrt{3}\}$

2/ ليكن Z عددا مركبا حيث: $Z = -2i \left(\sin \frac{\pi}{7} - i \cos \frac{\pi}{7} \right)$. عمدة للعدد المركب Z هي:

(أ) $\frac{\pi}{7}$ (ب) $\frac{5\pi}{7}$ (ج) $-\frac{6\pi}{7}$

3/ الشكل الجبري للعدد المركب $Z = (1 + i\sqrt{3})^{2025}$ هو:

(أ) $-2^{2025}i$ (ب) $2^{2025}i$ (ج) -2^{2025}

4/ مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z التي تحقق: $|iZ - 2 + 3i| = |\bar{Z} + \sqrt{3} - i|$ هي المستقيم المحوري للقطعة $[AB]$ حيث:

(أ) $A(-3; -2)$ و $B(-\sqrt{3}; -1)$ (ب) $A(-2; 3)$ و $B(\sqrt{3}; -1)$ (ج) $A(2; 3)$ و $B(\sqrt{3}; 1)$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة بحدّها الأول $u_1 = \frac{1}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1} = \frac{n}{4(n+1)} u_n$

1/ هل المتتالية (u_n) حسابية؟ هندسية؟ علّل.

2/ ا/ برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n > 0$.

ب/ أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

3/ نعتبر (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $v_n = 2^n \times n \times u_n$

ا/ أثبت أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يُطلب تعيين حدّها الأول.

ب/ أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثمّ (u_n) بدلالة n ، ثمّ أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

4/ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم، نضع : $S_n = \frac{4}{3}v_1 + \frac{16}{9}v_2 + \frac{4^3}{3^3}v_3 + \dots + \frac{4^n}{3^n}v_n$ و $P_n = u_1 \times 2u_2 \times 3u_3 \times \dots \times nu_n$

— أحسب S_n ، ثمّ بين أنّ : $P_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2+n}$ (لاحظ : $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$)

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. في الشكل المقابل، (C_g) هو المنحنى الممثل للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (x^2 - 1)e^{-x} - 1$

(C_g) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث $-1.2 < \alpha < -1.1$.

1/ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ وفسّر هذه النتيجة ببيان.

2/ بقراءة بيانية، حدّد حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 1 - x - (x+1)^2 e^{-x}$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب للمعلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2/ بين أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$ ، ثمّ أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) .

3/ بين أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$ ، ثمّ استنتج إتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

4/ بين أنّ (C_f) يقبل مماسين معامل توجيههما -1 أحدهما (Δ) والآخر (T) يُطلب تعيين معادلة له.

5/ بين أنّ (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما 0 و β حيث $-1.8 < \beta < -1.7$.

6/ ا/ أنشئ (Δ) ، (T) و (C_f) في نفس المعلم. (نأخذ : $f(\alpha) \simeq 2.1$)

ب/ ناقش بياناً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x) = -x + m$

7/ ا/ عيّن العددين الحقيقيين a و b حتى تكون $K : x \mapsto (-x^2 + ax + b)e^{-x}$ دالة أصلية لـ $k : x \mapsto (x+1)^2 e^{-x}$ على $\mathbb{R}$.

ب/ أحسب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و (Δ) والمستقيمات التي معادلاتها : $x = 1$ و $x = -1$.

انتهى الموضوع الأول.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

V_1 ، V_2 و V_3 ثلاث صناديق متماثلة غير شفافة. يحتوي V_1 على ثلاث كريات سوداء وخمس كريات بيضاء. يحتوي V_2 على كرتين سوداوين وثلاث كريات بيضاء. ويحتوي V_3 على كرتين سوداوين وكرية بيضاء. جميع الكريات متماثلة ولا يمكن التفريق بينها باللمس. نسحب عشوائيا كرية واحدة من الصندوق V_1 ونميز حالتين:

• إذا كانت الكرية المسحوبة بيضاء نضعها في الصندوق V_2 ، ثم نسحب منه عشوائيا كرتين على التوالي دون إرجاع.

• إذا كانت الكرية المسحوبة سوداء نضعها في الصندوق V_3 ، ثم نسحب منه عشوائيا كرتين على التوالي بإرجاع.

نعتبر الأحداث التالية:

A : «الحصول على كرتين سوداوين». B : «الحصول على كرتين بيضاوين». C : «الحصول على كرتين من لونين مختلفين».

1/ أنقل ثم أتمم شجرة الاحتمالات المقابلة.

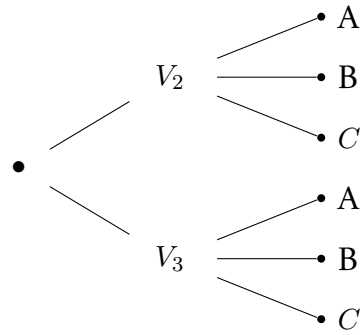
2/ أ/ أحسب كلا من $P(A)$ ، $P(B)$ و $P(C)$.

ب/ إذا علمت أنّ الكرتين المسحوبتين من لونين مختلفين، ما احتمال أن تكون الكرية المسحوبة من الصندوق V_1 سوداء.

3/ ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة.

— عيّن قانون إحتمال المتغير العشوائي X ، ثمّ أحسب أمله الرياضي $E(X)$.

4/ ليكن n عدد طبيعي غير معدوم. إذا كان n يمثل عدد الكريات البيضاء في الصندوق V_2 ، عيّن قيمة n حتى يكون: $P_{V_2}(B) = \frac{15}{28}$.



التمرين الثاني: (04 نقاط)

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول Z التالية: $(\bar{Z} - 2i)(Z^2 - 2\sqrt{3}Z + 4) = 0 \dots (E)$.

II. المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس موجه $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ، C و D التي لواحقتها على الترتيب:

$$Z_D = -\bar{Z}_A \text{ و } Z_C = -2i, Z_B = 2(\sqrt{3} - i), Z_A = \sqrt{3} + i$$

1/ أحسب $|Z_A|$ ، $|Z_C|$ و $|Z_D|$. ماذا تستنتج فيما يخص النقط A ، C و D ؟

2/ أ/ أكتب العدد $\frac{Z_A - Z_C}{Z_A - Z_B}$ على الشكل الأسّي، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC .

ب/ استنتج أنّ النقطة C صورة النقطة B بتحويل نقطي يُطلب تعيين عناصره المميزة.

ج/ بين أنّ: $Z_B + Z_D = Z_A + Z_C$ ، ثمّ حدّد بدقة طبيعة الرباعي $ABCD$.

3/ عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $\left(\frac{Z_B}{Z_A}\right)^n$ حقيقيا.

4/ أ/ تحقّق أنّ المبدأ O ينتمي لـ (Δ) مجموعة النقط $M(Z)$ من المستوي التي تحقق: $Z = Z_B + re^{i\frac{5\pi}{6}}$ حيث $r > 0$.

ب/ عيّن مجموعة النقط (Δ) .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

- لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة بحدّها الأول $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{4u_n + 3}{3u_n + 4}$
- 1/ ا/ برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$ (لاحظ أنّ : $u_{n+1} = \frac{4}{3} - \frac{7}{3(3u_n + 4)}$)
 ب/ أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثمّ استنتج تقاربها.
- 2/ ا/ بين أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 1 < \frac{1}{7}(u_n - 1)$
 ب/ استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n - 1 < 2\left(\frac{1}{7}\right)^n$ ، ثمّ أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- 3/ من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$
 — بين أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n < n + \frac{10}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{7}\right)^n$
- 4/ نعتبر (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$
 ا/ أثبت أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{7}$ ، ثمّ أكتب عبارة حدّها العام v_n بدلالة n .
 ب/ أحسب المجموع : $T = \frac{1}{u_0 + 1} + \frac{1}{u_1 + 1} + \dots + \frac{1}{u_{2025} + 1}$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. الجدول المقابل يمثّل تغيرات الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = 2(x\sqrt{x} - 1) + \ln x$

x	0	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

— أحسب $g(1)$ ، ثمّ عيّّن إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

II. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} - x + 1$
 (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ ا/ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثمّ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ وفّر هذه النتيجة هندسيا.

ب/ بين أنّ المنحنى (C_f) يقبل المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقاربا مائلا في جوار $+\infty$ ، ثمّ حدّد وضعيتهما النسبية.

2/ ا/ بين أنّه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x : $f'(x) = \frac{-g(x)}{2x\sqrt{x}}$

ب/ استنتج إتجاه تغير الدالة f ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

3/ أنشئ (Δ) و (C_f) .

4/ ليكن α من المجال $]0; 1[$ ، $S(\alpha)$ مساحة الحيز من المستوي المحدد بـ (C_f) و (Δ) والمستقيمين ذي المعادلتين : $x = 1$ و $x = \alpha$.

ا/ باستعمال المكاملة بالتجزئة، بين أنّ : $\int_1^x \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt = 2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x} + 4$

ب/ استنتج $S(\alpha)$ بدلالة α ، ثمّ أحسب $\lim_{\alpha \rightarrow 0} S(\alpha)$

5/ لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = f(e^x)$

— أدرس إتجاه تغير الدالة h دون تعيين عبارتها، ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

انتهى الموضوع الثاني.

الموضوع الأول

الإشارة					
B_1	B_0	$B_1 B_3$	$B_3 B_1$	$B_0 B_2$	5
V_1	V_3	$V_4 V_3$	$V_3 V_4$	V_4	3
R_1	R_0	R_1	R_0	R_0	2
3	2	5	6	4	

مسحب 4 كرات في آن واحد:
1- حساب احتمال الواحد:
 $P(A) = \frac{C_4^5}{210} = \frac{5}{210} = \frac{1}{42}$

B: على الأقل رقم زوجي
 $P(B) = 1 - \frac{C_4^6}{210} = \frac{195}{210} = \frac{13}{14}$
C: عدد الأرقام الفردية فردين

D: عدم سحب كرتة تحمل رقم 0 وعدد أرقام سالبة فردين
 $P(D) = \frac{C_3^1 C_3^3 + C_3^3 C_3^1}{210} = \frac{35}{210} = \frac{1}{6}$

2- حساب $P(C)$ والحكم في استقلالية A و C
 $P(A \cap C) = \frac{C_3^3 C_1^1}{210} = \frac{2}{210} = \frac{1}{105}$

$P_A(C) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{105}}{\frac{1}{42}} = \frac{2}{5}$

لدينا $P_A(C) \neq P(C)$ ومنه A و C غير مستقلين.
3- المتغير العشوائي وقانون احتمالات
موجب
موجب
موجب
 $X(2) = \{0, 1, 2, 3\}$

$X = x_i$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{C_4^0}{210} = \frac{1}{6}$	$\frac{C_3^1 C_3^3}{210} = \frac{1}{2}$	$\frac{C_3^2 C_3^2}{210} = \frac{3}{10}$	$\frac{C_3^3 C_3^1}{210} = \frac{1}{30}$

(ب) الأمل الرياضي: $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = \frac{12}{10} = 1,2$
(ج) احتمال الحادثة $C_3^3 = 3$ يمكن أن $X = 1$ أو $X = 3 - 1 = 2$ ومنه
 $P(C_3^3 = 3) = P(X=1) + P(X=2) = \frac{4}{5} = 0,8$

4- حساب $P(C)$ في حالة السحب مع التوال دون إرجاع
 $P(C) = \frac{4!}{3!1!} \left(\frac{A_6^1 A_4^3 + A_6^3 A_4^1}{A_{10}^4} \right) = \frac{2496}{5040} = \frac{52}{105}$

الجواب الثاني

1- الاختيار الصحيح هو ب - لأن:
 $2x^2 = 8$ $x^2 + y^2 = 7 \dots ①$
 $x^2 = 4$ ومنه $x = 2$ $x^2 - y^2 = 1 \dots ②$
 $x = -2$ أو $x = 2$ $2xy = -4 \dots ③$

بأنه $x = 2$ وتوضيحه في ③ نجد $xy = -4$ ومنه $y = -\sqrt{4}$
اذن: $z_1 = 2 - i\sqrt{3}$ و $z_2 = -2 - i\sqrt{3}$

2- الاختيار الصحيح هو ج - لأن:
 $z = -2(\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7})$ ومنه $z = -2i(\sin \frac{\pi}{7} - i \cos \frac{\pi}{7})$
وعليه $z = 2(\cos(\frac{\pi}{7} + \pi) + i \sin(\frac{\pi}{7} + \pi))$ ومنه
 $z = 2(\cos \frac{8\pi}{7} + i \sin \frac{8\pi}{7})$

معدة للعدد المركب z هي: $\frac{8\pi}{7} - 2\pi = \frac{-6\pi}{7}$
3- الاختيار الصحيح هو ج - لأن:

$(1+i\sqrt{3})^{2025} = (e^{i\frac{\pi}{3}})^{2025} = e^{i\frac{2025\pi}{3}} = e^{i675\pi} = e^{i\pi} = -1$
 $= e^{i6\pi} = e^{i\pi} = -1$

4- الاختيار الصحيح هو أ - لأن:
 $|z - 2 + 3i| = |\bar{z} + \sqrt{3} + i|$

$|i(z + 2i + 3)| = |\bar{z} + \sqrt{3} + i|$
 $|i(z + 2i + 3)| = |\bar{z} + \sqrt{3} + i|$
 $|i(z - (-3 - 2i))| = |\bar{z} + \sqrt{3} + i|$
 $|z - (-3 - 2i)| = |\bar{z} - (-\sqrt{3} - i)|$
ومنه $A(-3, -2)$ و $B(-\sqrt{3}, -1)$

الجواب الثالث

$u_1 = \frac{1}{4}$
 $u_{n+1} = \frac{n}{u(n+1)} u_n$
1- حل (u_n) حسابية هندسية
 $u_2 = \frac{1}{4 \times 2} u_1 = \frac{1}{32}$ $u_3 = \frac{2}{4 \times 3} u_2 = \frac{1}{192}$

لدينا: $u_1 + u_3 \neq 2u_2$ ومنه (u_n) ليست حسابية
و $u_1 \times u_3 \neq u_2^2$ ومنه (u_n) ليست هندسية

ج (أ) البرهان بالتراجع أن: $u_n > 0$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$
نسمي $P(n)$ الخاصية من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n > 0$
من أجل $n = 1$: $u_1 = \frac{1}{4} > 0$ متحقق

نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل n ونبرهن أنها صحيحة من أجل $n+1$
من الفرض $u_n > 0$ وعليه $u_{n+1} > 0$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة وعليه $P(n)$ صحيحة

(ب) اتجاه التغير
 $u_{n+1} - u_n = \frac{n}{u(n+1)} u_n - u_n = u_n \left(\frac{n - u(n+1)}{u(n+1)} \right)$
 $= u_n \times \frac{-3n - 4}{u(n+1)}$

لأن $u_n > 0$ فإن $u_{n+1} - u_n < 0$ لأن $-3n - 4 < 0$
وعليه (u_n) متناقصة متساوية

استنتاج التقارب وحساب النهاية
 (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل وفي متنازعة
 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$ $u_{n+1} = \frac{n}{u(n+1)} u_n$ $l = l \times \frac{n}{u(n+1)}$
 $l \times \frac{-3n - 4}{u(n+1)} = 0$ $l = 0$ يكفي

(3) $v_n = 2^n \times n \times u_n$
أ- إثبات أن (v_n) هندسية حسابية
 $v_{n+1} = 9 \cdot v_n$ حسابية

$v_{n+1} = 2^{n+1} \times (n+1) \times u_{n+1} = 2^{n+1} \times (n+1) \times \frac{n}{u(n+1)} u_n$
 $= \frac{2^{n+1} \times n \times u_n}{u(n+1)} = \frac{2}{u(n+1)} v_n$
ومنه (v_n) هندسية حسابية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول
 $v_1 = 2^1 \times 1 \times u_1 = \frac{1}{2}$

اتجاه التغير وحده التغيرات
 إشارة $f(x)$ من إشارة $g(x)$ وحده
 f متزايدة تماماً على $]-\infty; \alpha]$ وناقصة تماماً

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$		+	-
$g(x)$		-	+

4- بيان أن (f) قابل للتفاضل في $x=1$

$f'(x) = -1$ كافياً $(x^2-1)e^{-x} = 0$ كافياً
 $x=1$ كافياً، $x=-1$ كافياً

لدينا $y = f'(1)(x+1) + f(-1)$

$y = -x - 1 + 2$: (A)
 $y = -x + 1$

لدينا $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$y = -(x-1) = 4e^{-1}$

$y = -x + 1 - 4e^{-1}$: (B)

5- بيان أن (f) ينقطع في الفواصل في نقطة 0، و
 لدينا: $f(0) = 1 - 1 = 0$

لدينا f صغرة و متزايدة تماماً على $]-\infty; \alpha]$ فهي
 كذلك على $[-1, 3]$ ولدينا:

$f(-1, 3) = -1, 07$ و $f(-1, 7) = 0, 02$ و $f(-1, 7) < 0$ و $f(-1, 3) > 0$

ومن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المتعادلة

$f(x) = 0$ قابل حل وحيد α حيث $-1, 7 < \alpha < -1, 3$

6- إنشاء

(ب) المناقشة البينائية:

$m = 1$ يوجد حل وحيد $m = 1 - 4e^{-1}$ يوجد حلان

$m < 1 - 4e^{-1}$ يوجد ثلاث حلول

$m < 1 - 4e^{-1}$ يوجد حل وحيد

$m > 1$ لا توجد حلول

الجواب الرابع

$g(x) = (x^2-1)e^{-x} - 1$ (I)

1- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} - 1 = -1$
 y حادثة لمستقيم مقارب أفقي عند $y = -1$

2- قراءة بيانية تحديد إشارة $f(x)$
 (Cg) فوق الفواصل $]-\infty; \alpha]$ و تحت $[\alpha; +\infty[$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$		+	-

$f(x) = 1 - x - (x+1)^2 e^{-x}$ II

1- حساب النهايات
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x - x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - e^{-x} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

2- بيان أن (A) مقارب لـ (B)
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x+1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-(x+1)^2 e^{-x}]$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [-x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - e^{-x}] = 0$

على $y = -x+1$ حادثة لمستقيم مقارب مائل لـ (B) عند $+\infty$

(ب) دراسة الوضعية

$f(x) - y = -(x+1)^2 e^{-x}$ و $e^{-x} \neq 0$ و $x+1=0$ كافياً $x=-1$ وحده

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x) - y$		-	+
الوضع النسبي	(B) تحت (A)	(A) نقطة التقاطع (B) فوق (A)	(B) تحت (A)

3- بيان أن: $f(x) = g(x)$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا:

$f'(x) = -1 - [2(x+1)e^{-x} - e^{-x}(x+1)^2]$

$= -1 - e^{-x}(x+1)(2-x-1)$

$= -1 - e^{-x}(x+1)(-x)$

$= -1 + e^{-x}(x+1)^2 = g(x)$

عبارة u_n و v_n و l_n و q_n و p_n و s_n و t_n

$u_n = v_n \times q^{n-1} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

ولدينا $u_n = \frac{v_n}{2^n \times n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{2^n \times n}$ و $v_n = 2^n \times n \times u_n$

$= \frac{1}{4^n \times n}$

و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4^n \times n} = 0$

حساب s_n و بيان أن $p_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$s_n = \frac{4}{3} v_1 + \frac{16}{9} v_2 + \dots + \frac{4^n}{3^n} v_n$

$\frac{4^n}{3^n} \times v_n = \frac{4^n}{3^n} \times \frac{1}{2^n} = \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$s_n = \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$s_n = \frac{2}{3} \left[\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} \right] = 2 \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \right]$

$p_n = u_1 \times 2u_2 \times 3u_3 \times \dots \times nu_n$

$n \times u_n = n \times \frac{v_n}{n \times 2^n} = \frac{v_n}{2^n}$

$T_n = \frac{v_1}{2} \times \frac{v_2}{2^2} \times \dots \times \frac{v_n}{2^n}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2^2} \times \dots \times \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{2^n}$

$= \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \dots \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$= \left(\frac{1}{4}\right)^{1+2+\dots+n} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

$= \left[\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{n^2+n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2+n}$

(7) تعيين a و b حيث $x \mapsto (-x^2 + ax + b)e^{-x}$ دالة أحادية

$$(-2x + a)e^{-x} - e^{-x}(-x^2 + ax + b)$$

$$= e^{-x}(-2x + a + x^2 - ax - b)$$

$$= e^{-x}(x^2 - (a+2)x + a-b)$$

المطابقة إذ $a = -4$ و $-(a+2) = 2$

$b = -5$ و $a - b = 1$

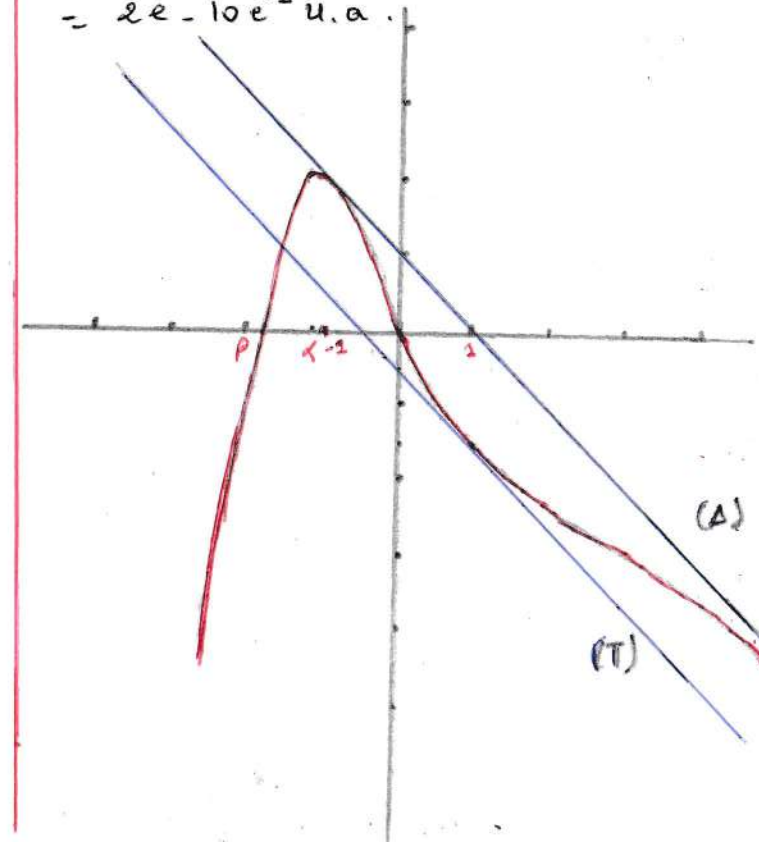
حساب المساحة المحددة بـ (φ) و (ψ) و $x = -1$ و $x = 1$: (φ) و (ψ) و (Δ) و (T)

$$S = \int_{-1}^1 [(-x+1) - f(x)] dx$$

$$= \int_{-1}^1 (x+1)e^{-x} dx = \left[(-x^2 - 4x - 5)e^{-x} \right]_{-1}^1$$

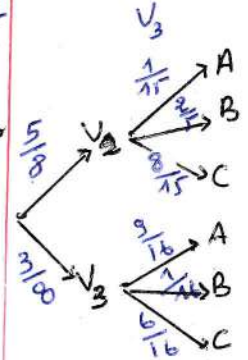
$$= (-10e^{-1}) - (-2e)$$

$$= 2e - 10e^{-1} \text{ u.a.}$$



الموضوع II الجواب الأول

2N 1B + N	2N 3B + B	3N 5B
--------------	--------------	-------



1- شجرة الاحتمالات

$$P_{V2}(A) = \frac{A_2^2}{A_6^2} = \frac{2^2}{30^2} = \frac{1}{15}$$

$$P_{V2}(B) = \frac{A_4^2}{A_6^2} = \frac{12^2}{30^2} = \frac{2}{5}$$

$$P_{V3}(A) = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$$

$$P_{V3}(B) = \frac{1^2}{4^2} = \frac{1}{16}$$

2- حساب P(A), P(B), P(C)

$$P(A) = \frac{5}{8} \times \frac{1}{15} + \frac{3}{8} \times \frac{9}{16} = \frac{97}{384}$$

$$P(B) = \frac{5}{8} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{16} = \frac{35}{128}$$

$$P(C) = \frac{5}{8} \times \frac{8}{15} + \frac{3}{8} \times \frac{6}{16} = \frac{91}{192}$$

3- حساب P(V3)

$$P(V3) = \frac{P(C \cap V3)}{P(C)} = \frac{\frac{3}{8} \times \frac{6}{16}}{\frac{91}{192}} = \frac{27}{91}$$

3- المتغير العشوائي

$$X(2) = \{0, 1, 2\}$$

BB → 2
BN → 1

X = xi	0	1	2
P(X=xi)	P(X=0) = P(A) = $\frac{97}{384}$	P(X=1) = P(C) = $\frac{91}{192}$	P(X=2) = P(B) = $\frac{35}{128}$

الأول رياضي

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P_i = \frac{49}{48} \approx 1,02$$

4- إيجاد n حيث

$$P_{V2}(B) = \frac{A_{n+1}^2}{A_{n+3}^2} = \frac{15}{28}$$

$$(n+1)(n+2) = 15n$$

$$n^2 + 3n + 2 = 15n$$

$$n^2 - 12n + 2 = 0$$

و منه

$$28n^2 + 28n = 15n^2 + 75n + 90$$

$$13n^2 - 47n - 90 = 0$$

بعد $\Delta = 689$ و منه

$$n_2 = \frac{47+83}{26} = 5$$

و منه $n=5$

الجواب الثاني

I- حل المعادلة:

$$(\bar{z} - 2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$$

$$z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$$

أو $\bar{z} - 2i = 0$

و منه $\bar{z} = 2i$ أو $z = -2i$

$$\Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 4 = -4 = (2i)^2$$

$$z_1 = \frac{2\sqrt{3} + 2i}{2} = \sqrt{3} + i$$

$$z_2 = \bar{z}_1 = \sqrt{3} - i$$

II حساب $|z_A|, |z_C|, |z_D|$

$$|z_A| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$|z_C| = |-2i| = 2$$

$$|z_D| = |-2\bar{z}_A| = 2$$

و منه النقطة A تنتمي الى نفس الدائرة المتمركزة في O نصف قطرها = 2

في كتابة $\frac{z_A - z_C}{z_A - z_B}$ على الشكل الاسي

$$\frac{z_A - z_C}{z_A - z_B} = \frac{\sqrt{3} + i + 2i}{\sqrt{3} + i - 2\sqrt{3} + 2i} = \frac{\sqrt{3} + 3i}{-\sqrt{3} + 3i} \times \frac{-\sqrt{3} - 3i}{-\sqrt{3} - 3i}$$

$$= \frac{-3 - 3\sqrt{3}i - 3\sqrt{3}i + 9}{3 + 9} = \frac{6 - 6\sqrt{3}i}{12}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

شبه المثلث ABC

لدينا $\arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_A - z_B}\right) = -\frac{\pi}{3}$ و منه المثلث ABC متقايس الاضلاع

استنتاج القوس القطري

لدينا $\frac{z_A - z_C}{z_A - z_B} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ أي

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

و منه $z_C - z_A = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A)$

وعليه C صورة B بالدوران الذي مركزه A و زاوية $-\frac{\pi}{3}$

2- بيان أن $z_B + z_D = z_A + z_C$

$$z_B + z_D = 2\sqrt{3} - 2i - \sqrt{3} + i = \sqrt{3} - i$$

$$z_A + z_C = \sqrt{3} + i - 2i = \sqrt{3} - i$$

و منه $z_B + z_D = z_A + z_C$

شبهة الرباعي ABCD

لدينا $\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}$ وعليه الرباعي ABCD متوازي أضلاع، لدينا هذا السؤال 2- و منه الرباعي معين.

4- تعيين قيم $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n$ حقيقيا

$$\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n = \left(\frac{4e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}}\right)^n = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$$

يكافئ $\frac{n\pi}{6} = \pi K$ و منه $n = 3K$ حيث K عدد صحيح طبيعي

5- مصورة النقط

التحقق أن O ينتمي (Δ)

$$z_O - z_B = -z_B = -4e^{i\frac{\pi}{6}}$$

و منه $0 \in (\Delta)$

$$z - z_B = re^{i\frac{5\pi}{6}}$$

و منه $\arg(z - z_B) = \arg(re^{i\frac{5\pi}{6}})$

و منه (Δ) هي نصف المستقيم [BO) ساعدا النقطه B

الجواب الثالث

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n + 3}{3u_n + 4} \end{cases}$$

حساب T_n (ب)
 $\frac{1}{u_n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ ومنه $u_n = 1 - \frac{2}{u_n+1}$ لدينا

$$T = \frac{1}{u_0+1} + \dots + \frac{1}{u_n+1}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{7}} \right)^{2026} \right] + \frac{1}{2} (2026)$$

$$= -\frac{7}{24} \left(1 - \left(\frac{1}{7} \right)^{2026} \right) + 1013$$

الجواب الرابع $g(x) = 2(\sqrt{x}-1) + \ln x$

I حساب $g(x)$ وتحديد إشارة $g(x)$

x	0	1	+	+	+
g(x)	-	0	+	+	+

$g(1) = 0$ وعليه

II $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} - x + 1$

1- حساب النهايات $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} - x + 1 = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} - x + 1 = -\infty$

منه $x=0$ حادثة مستقيم مقارب لـ (f)

2- بيان أن (f) مقارب لـ (f) بـ $+\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x+1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln t}{t} = 0$

منه (f) مستقيم مقارب لـ (f) عند $+\infty$

ب الوضوح البياني

$\sqrt{x} > 0$ وعليه إشارة $f(x)$ من إشارة $\ln x$

x	0	1	+	+	+
$f(x) - (-x+1)$	-	0	+	+	+
الوضع البياني	(f)	(f)	(f)	(f)	(f)

3- بيان أن $f(x) = \frac{g(x)}{2x\sqrt{x}} - 1$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x$

$$= \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} - 1 = \frac{-2x\sqrt{x} + 2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} = \frac{-g(x)}{2x\sqrt{x}}$$

لدينا: $0 < u_n - 1 < \frac{1}{7} (u_{n-1} - 1)$

بعض المبرهنات
 طرف لطف
 حد

$0 < u_n - 1 < \left(\frac{1}{7}\right)^n (u_0 - 1)$

$0 < u_n - 1 < \left(\frac{1}{7}\right)^n \times 2$

3- بيان أن: $S_n < n + \frac{10}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{7}\right)^n$

لدينا: $u_n < \left(\frac{1}{7}\right)^n \times 2 + 1$ ومنه

$u_0 < 2 \left(\frac{1}{7}\right)^0 + 1$

$u_1 < 2 \left(\frac{1}{7}\right)^1 + 1$

بجمع طرف لطرف
 نجد:

$u_n < 2 \left(\frac{1}{7}\right)^n + 1$

$S_n < 2 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{7}} \right) + n + 1$

$S_n < 2 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}}{\frac{6}{7}} \right) + n + 1$

$S_n < \frac{7}{3} - \frac{7}{3} \times \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1} + n + 1$

$S_n < \frac{10}{3} + n - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{7}\right)^n$

$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

$v_{n+1} = \frac{1}{7} v_n$ هذا سلسلته حسابية

$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{4u_n + 3}{3u_n + 4} - 1}{\frac{4u_n + 3}{3u_n + 4} + 1} = \frac{u_n - 1}{7u_n + 7} = \frac{1}{7} v_n$

منه (v_n) هذا سلسلته حسابية $\frac{1}{7}$ حد ثابت

$v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \frac{1}{2}$

حد ثابت العام: $v_n = v_0 \times q^n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{7}\right)^n$

1- البرهان بالتراجع أن $u_n > 1$

من أجل $n=0$: $u_0 = 3 > 1$ مبرهن

نفرض أن $u_n > 1$ ومنه $3u_n > 3$ وعليه

$3u_n + 4 > 7$ ومنه $\frac{1}{3u_n + 4} < \frac{1}{7}$

منه $\frac{4}{3} - \frac{7}{3(3u_n + 4)} > 1$ ومنه $\frac{-\frac{7}{3}}{3u_n + 4} > -\frac{1}{3}$

منه $u_{n+1} > 1$ وعليه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $u_n > 1$

ب اتجاه التغير

$u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n + 3}{3u_n + 4} - u_n = \frac{-3u_n^2 + 3}{3u_n + 4}$

$= \frac{3(1 - u_n)(1 + u_n)}{3u_n + 4}$

لدينا $u_n > 1$ ومنه

$1 - u_n < 0$ $1 + u_n > 0$ $3u_n + 4 > 0$ ومنه

وعليه $u_{n+1} - u_n < 0$

وعليه (u_n) متناقصة تماماً على $\mathbb{N}$

التقارب: (u_n) متناقصه ومكبرة من الأسفل
 فهي متقاربة

2- بيان أن: $u_{n+1} - 1 < \frac{1}{7} (u_n - 1)$

$u_{n+1} - 1 = \frac{4u_n + 3}{3u_n + 4} - 1 = \frac{4u_n + 3 - 3u_n - 4}{3u_n + 4}$

$= \frac{1}{3u_n + 4} (u_n - 1)$

لدينا $u_n > 1$ ومنه $3u_n + 4 > 7$ وعليه

$\frac{1}{3u_n + 4} < \frac{1}{7}$ وعليه

$\frac{(u_n - 1)}{3u_n + 4} < \frac{1}{7} (u_n - 1)$ ومنه

$u_{n+1} - 1 < \frac{1}{7} (u_n - 1)$

ب بيان أن: $u_n - 1 < 2 \left(\frac{1}{7}\right)^n$

و فيه f متزايدة كما ما على $[-\infty, 0]$ ، متناقصة
كما ما على المجال $[0, +\infty]$

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{n \rightarrow 0} f(n) = -\infty \\ \lim_{n \rightarrow -\infty} h(n) = -\infty \end{cases} \quad \text{و عليه} \quad \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = -\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} h(n) = -\infty \end{cases}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(n)$		+	-
$h(n)$		0	

تابع 3 و 2 و 1
 $\lim_n u_n$

لدينا: $0 < u_n - 1 < 2\left(\frac{1}{7}\right)^n$

و
 $\lim_n 0 < \lim_n (u_n - 1) < \lim_n 2\left(\frac{1}{7}\right)^n$

$0 < \lim (u_n - 1) < 0$

و $\lim_n (u_n - 1) = 0$

$\lim_n u_n = 1$

(15) التكامل بالتجزئة

$$\int_1^x \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt$$

$u(n) = \ln t$ $u(x) = \frac{1}{x}$
 $v'(n) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ $v(n) = 2\sqrt{t}$

$$\int_1^x \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt = \left[2\sqrt{t} \ln t \right]_1^x - \int_1^x \frac{2}{\sqrt{t}} dt$$

$$= \left[2\sqrt{t} \ln t - 4\sqrt{t} \right]_1^x$$

$$= 2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x} + 4.$$

(ب) استنتاج $S(x)$
 $u = x, x = 1, (D), (Q)$
 $S(x) = \int_1^x [(-x+1) - f(n)] dx$
 $= -\int_1^x \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \left[2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x} + 4 \right]_1^x$
 $= 2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x} + 4.$

$\lim_{x \rightarrow 0} S(x)$
 بوضع $x = t^2$ و $\sqrt{x} = t$
 $\lim_{x \rightarrow 0} S(x) = \lim_{t \rightarrow 0} 4t \ln t - 4t + 4 = 4.$

$h(n) = f(e^x)$
 $h'(n) = e^x f'(e^x).$
 $e^x \leq 1$ يكافئ $f'(e^x) \geq 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x		+	+
$f'(e^x)$		+	-
$h'(n)$		+	-

(ب) اتجاه التغير وحاصل التغيرات
 $0 < x < 1$ ، عليه إشارة $f'(n)$ من إشارة $-f(n)$
 و فيه f متزايدة كما ما على $[0, 1]$ ، متناقصة كما ما على $[1, +\infty]$

x	0	1	$+\infty$
$f(n)$		+	-
$P(n)$		0	

4- الإثبات

