إختبار بكالوريا تجريبي 2025

شعبة : رياضيات

الموضوع الأول

التمرين الأول(4ن):

يحتوي كيس على ثلاث كرات تحمل الرقم 1 و ثلاث كرات تحمل الرقم 2 و كرة تحمل الرقم 3 .
(الكرات متماثلة لا نفرق بينها باللمس)

I) نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من هذا الكيس .

1) أحسب إحتمال الأحداث التالية :

A : " الحصول على كرتين تحملان نفس الرقم " .

B : " الحصول على كرتين تحملان عددين جداؤهما زوجي " .

2) نعتبر X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب العدد $\cos\left(\frac{\pi}{\alpha\beta}\right)$ ، بحيث : α و β يمثلان الرقمين الظاهرين على الكرتين المسحوبتين .

أ ـ عين قيم المتغير العشوائي X ، ثم عرف قانون إحتماله .

بـ ـ أحسب الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X .

II) n عدد طبيعي حيث $n \geq 2$. نسحب من الكيس n كرة على التوالي مع الإرجاع .

أ ـ أحسب P_n إحتمال الحصول على كرة واحدة على الأقل تحمل الرقم 1 .

بـ ـ عين أصغر عدد طبيعي n ، بحيث : $P_n \geq 0.92025$.

التمرين الثاني(4.5ن):

الجزءان الأول و الثاني مستقلان .

I) نعتبر المتتالية العددية (a_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $a_0 = 17$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $a_{n+1} = 1 + (a_n - 1)^2$.

1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $a_n \equiv 7[10]$.

2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $PGCD(a_n ; a_{n+1}) = 1$.

3) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $a_n = 2^{2^{n+2}} + 1$.

4) استنتج رقم آحاد العدد $N = 2^{2^{2022}} + 2^{2^{2023}} + 2^{2^{2024}} + 2^{2^{2025}}$.

II) x عدد طبيعي .

1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $(1+x)^n \equiv (1+nx)\left[x^2\right]$.

2) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، 2025 يقسم $46^n + 1980n + 2024$.

التمرين الثالث(4.5ن):

I) 1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - (2\cos\theta)z + 1 = 0$ ... (E) . حيث θ عدد حقيقي غير معدوم.

2) من أجل $\theta = \frac{\pi}{6}$ ، نرمز إلى حلي المعادلة (E) بـ z_1 و z_2 . بين أن : $z_1^{2025} + z_2^{2025} = 0$.

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

A و B نقطتان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب : $z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ و $z_B = \overline{z_A}$.

1) أ ـ أكتب العدد المركب $\frac{z_A}{z_B}$ على الشكل الجبري ، ثم على الشكل الأسي.

بـ ـ إستنتج طبيعة المثلث OAB .

جـ ـ جد z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث OAB .

2) S التشابه المباشر الذي مركزه O ، نسبته 4 و زاويته $\frac{\pi}{4}$.

أ ـ جد الكتابة المركبة للتشابه S .

بـ ـ نسمي C صورة النقطة A بالتشابه S . بيّن أن لاحقة النقطة C هي : $z_C = (\sqrt{6}-\sqrt{2})+i(\sqrt{6}+\sqrt{2})$.

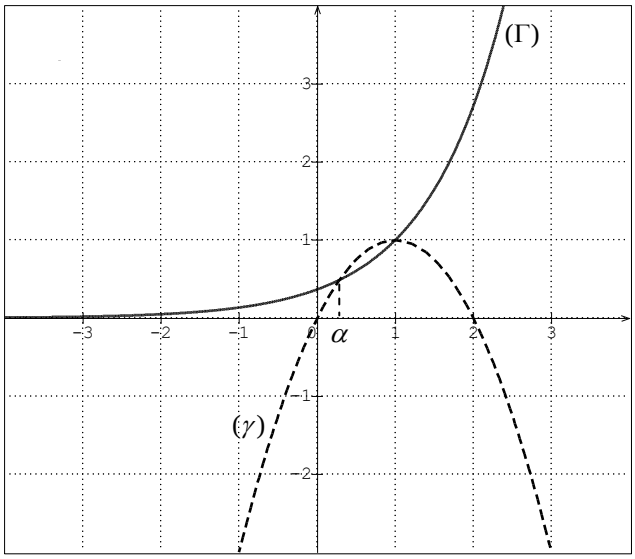
جـ ـ أكتب z_C على الشكل الأسي ، ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من : $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$.

3) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث : $3z.\bar{z}-\sqrt{3}(z+\bar{z})=0$.

تحقق أن $A\in(\Gamma)$ ، ثم عيّن طبيعة المجموعة (Γ) مع ذكر عناصرها المميزة .

التمرين الرابع(7ن):

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.



I) (Γ) و (γ) التمثيلان البيانيان للدالتين $x\mapsto e^{x-1}$ و $x\mapsto 2x-x^2$.

1) بقراءة بيانية حدد وضعية (Γ) بالنسبة إلى (γ) على $\mathbb{R}$.

2) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=x^2-2x+e^{x-1}$.

أحسب $g(1)$ ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

3) تحقق أن : $0.28<\alpha<0.29$.

II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x-x^2e^{1-x}$.

(C_f) تمثيلها البياني.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

2) بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$. ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) .

3) أ ـ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=e^{1-x}g(x)$.

بـ ـ استنتج إتجاه تغيّر الدالة f و شكل جدول تغيّراتها .

4) بيّن أن : $f(\alpha)=\alpha+1+\frac{2}{\alpha-2}$ ، ثم أعط حصرا لـ $f(\alpha)$.

5) أ ـ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $f'(x)=1$. ثم فسر بيانيا النتيجة المحصل عليها .

بـ ـ أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 2 .

6) أحسب $f(-1)$ ، ثم أنشئ كلا من (Δ) ، (T) و (C_f) . (نأخذ : $f(\alpha)\approx 0.3$)

7) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $x^2=e^{m-1+x}$.

III) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $I_n=\int_0^1 x^n e^{1-x}dx$.

1) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $I_{n+1}=(n+1)I_n-1$.

2) استنتج كلا من I_1 و I_2 . فسر I_2 بيانيا .

3) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $\frac{1}{n+1}\le I_n\le\frac{e}{n+1}$. ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول(4ن):

يمارس أحد الأشخاص الرياضة عادة . إذا مارس هذا الشخص الرياضة ، فإن إحتمال أن يمارسها في اليوم التالي $\frac{1}{2}$.

و إذا لم يمارس الرياضة فإن احتمال ألا يمارسها في اليوم التالي $\frac{1}{4}$.

في اليوم الأول ، نفترض أن احتمال ممارسة هذا الشخص للرياضة يساوي أربعة أضعاف إحتمال عدم ممارستها .

نعرّف الحدث S_n إحتمال أن يمارس الشخص الرياضة في اليوم n و نضع : $P(S_n)=P_n$.

1) أحسب P_1 .

2) بالاستعانة بشجرة الإحتمالات تحقق أن : $P_2=\frac{11}{20}$.

3) أثبت أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $P_{n+1}=\frac{1}{4}(3-P_n)$.

4) نعرف على $\mathbb{N}^*$ المتتالية (v_n) بـ : $v_n=P_n-\frac{3}{5}$.

أ ـ أثبت أن (v_n) متتالية هندسية ، يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول .

بـ ـ جد نهاية المتتالية (v_n) ، ثم استنتج نهاية المتتالية (P_n) .

التمرين الثاني(5ن):

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 5^n على 9 .

2) نضع ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n=1+5+5^2+....+5^n$.

أ ـ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $4S_n=5^{n+1}-1$.

بـ ـ عيّن باقي قسمة S_{2025} على 9 .

جـ ـ حدد قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $S_n\equiv 0[9]$.

3) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $5^n x-S_n y=9$ .... (E_n) .

أ ـ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، 5^n و S_n أوليان فيما بينهما .

بـ ـ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E_n) .

4) حدد الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية حيث : $\begin{cases}25x-31y=9\\PGCD(x;y)=3\end{cases}$.

5) يحتوي كيس على ست كرات مرقمة ببواقي قسمة 5^n على 9 .

نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من الكيس .

أ ـ أحسب إحتمال الحصول على كرتين مجموع رقميهما يساوي مجموع أرقام العدد 2025 .

بـ ـ ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب لكرتين عدد الأرقام الأولية المتبقية في الكيس .

عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضياتي .

التمرين الثالث(4ن):

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(\bar{z}-2-2i)(z^2-2\sqrt{2}z+8)=0$.

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

A ، B و C النقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب : $z_A=\sqrt{2}+i\sqrt{6}$ ، $z_B=-z_A$ و $z_C=2-2i$.

1) أ ـ أكتب الأعداد المركبة z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي .

بـ ـ استنتج أن النقط A ، B و C تنتمي إلى دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .

2) عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $\left(\frac{z_A\times z_C}{8}\right)^n=1$.

3) نعتبر الدوران R الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{4}$.

أ- عيّن z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران R .

ب- أكتب العدد المركب $\frac{z_B - z_D}{z_A - z_D}$ على الشكل الجبري ، ثم على الشكل الأسي.

جـ- إستنتج طبيعة المثلث ADB .

د - عيّن z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ADB .

4) لتكن M نقطة كيفية من المستوي لاحقتها z حيث M تختلف عن A و تختلف عن C .

عيّن (E) مجموعة النقط M التي يكون من أجلها $\frac{z_A - z}{z_C - z}$ عددا حقيقيا سالبا تماما.

التمرين الرابع(7ن):

n عدد طبيعي أكبر أو يساوي 2 .

f_n الدالة العددية المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f_n(0) = 0$ و من أجل كل $x > 0$ ، $f_n(x) = x - x^n \ln x$.

(C_n) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بيّن أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = -\infty$.

2) أ- أثبت أن الدالة f_n قابلة للإشتقاق عند 0 من اليمين .

ب- بيّن أنه من أجل كل $x \in]0;+\infty[$ ، $f_n'(x) = 1 - x^{n-1} - nx^{n-1}\ln x$.

جـ- بيّن أن الدالة f_n متزايدة على المجال $[0;1]$ و متناقصة على المجال $[1;+\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيّراتها .

3) أ- حل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة : $f_n'(x) = 1$. ثم فسر النتيجة بيانيا .

ب- أكتب معادلة لـ (T_n) مماس المنحنى (C_n) الموازي للمستقيم المنصف الأول .

4) أ- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ لدينا : من أجل كل $x \in]0;+\infty[$ ، $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$.

ب- استنتج الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1}) .

5) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha_n \in]1;2[$ حيث : $f_n(\alpha_n) = 0$.

6) أنشئ بدقة كلا من (C_2) و (C_3) على المجال $[0;2]$.(نأخذ : $\alpha_2 \approx 1.77$ و $\alpha_3 \approx 1.53$)

7) أ- بيّن أن الدالة $x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1}$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto x^n \ln x$ على المجال $]0;+\infty[$.

ب- λ عدد حقيقي حيث : $0 < \lambda < 1$ ، نضع : $S(\lambda) = \int_{\lambda}^{1} [f_2(x) - f_3(x)]dx$.

أحسب $S(\lambda)$ بدلالة λ ، ثم أحسب $\lim\limits_{\lambda \to 0^>} S(\lambda)$ و فسر النتيجة هندسيا .

“ The only way to learn mathematics is to do mathematics ”

حل مقترح للموضوع الأول

حل مقترح للموضوع الأول:

يحتوي كيس على ثلاث كرات تحمل الرقم 1 و ثلاث كرات تحمل الرقم 2 و كرة تحمل الرقم 3 .

I) نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من هذا الكيس .

عدد الإمكانيات : $C_7^2 = 21$.

1) حساب إحتمالات الأحداث :

$$P(A) = \frac{C_3^2 + C_3^2}{21} == \frac{6}{21} \quad ، \quad P(B) = \frac{C_3^1 \times C_4^1 + C_3^2}{21} = \frac{18}{21}$$

2) نعتبر X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب العدد $\cos\left(\frac{\pi}{\alpha\beta}\right)$ ، بحيث : α و β يمثلان الرقمين الظاهرين على الكرتين المسحوبتين .

أ ـ قيم المتغيّر العشوائي X هي : $\left\{-1;0;\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

$$P(X=-1) = \frac{C_3^2}{21} == \frac{1}{21} \quad ، \quad P(X=0) = \frac{C_3^1 \times C_3^1}{21} = \frac{9}{21} \quad ، \quad P\left(X=\frac{1}{2}\right) = \frac{C_3^1 \times C_1^1}{21} = \frac{3}{21}$$

$$P\left(X=\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{C_3^2}{21} = \frac{3}{21} \quad ، \quad P\left(X=\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{C_1^1 \times C_3^1}{21} = \frac{3}{21} \; .$$

قانون الإحتمال :

X_i	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$P(X=X_i)$	$\frac{3}{21}$	$\frac{9}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{3}{21}$

بـ ـ حساب الأمل الرياضياتي للمتغيّر العشوائي X .

$$E(X) = -1\times\frac{3}{21} + 0\times\frac{9}{21} + \frac{1}{2}\times\frac{3}{21} + \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{3}{21} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{3}{21} = \frac{-3+3\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{42}$$

II) n عدد طبيعي حيث $n \geq 2$. نسحب من الكيس n كرة على التوالي مع الإرجاع .

أ ـ حساب P_n إحتمال الحصول على كرة واحدة على الأقل تحمل الرقم 1 .

$$P_n = 1 - \overline{P_n} = 1 - \frac{4^n}{7^n} = 1 - \left(\frac{4}{7}\right)^n$$

بـ ـ تعيين أصغر عدد طبيعي n ، بحيث : $P_n \geq 0.92025$.

$$P_n \geq 0.92025 \text{ يكافئ } 1-\left(\frac{4}{7}\right)^n \geq 0.92025 \text{ يكافئ } -\left(\frac{4}{7}\right)^n \geq -0.07975 \text{ يكافئ } \left(\frac{4}{7}\right)^n \leq 0.07975$$

$$\text{يكافئ } n\ln\left(\frac{4}{7}\right) \leq \ln(0.07975) \text{ يكافئ } n \geq \frac{\ln(0.07975)}{\ln\left(\frac{4}{7}\right)} \text{ أي : } n \geq 4.52 \; .$$

و منه أصغر عدد طبيعي n بحيث $P_n \geq 0.92025$ هو : 5 .

حل مقترح للموضوع الثاني:

الجزءان الأول و الثاني مستقلان .

I) نعتبر المتتالية العددية (a_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $a_0=17$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $a_{n+1}=1+(a_n-1)^2$.

1) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $a_n\equiv 7[10]$.

لنبرهن بالتراجع أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $a_n\equiv 7[10]$.

نسمي $P(n)$ الخاصية " $P(n):a_n\equiv 7[10]$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $a_0=17$ و منه $a_0\equiv 7[10]$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة .

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $a_n\equiv 7[10]$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $a_{n+1}\equiv 7[10]$.

لدينا حسب الفرض $a_n\equiv 7[10]$ و منه $a_n-1\equiv 6[10]$ و منه $(a_n-1)^2\equiv 6^2[10]$ و منه $(a_n-1)^2\equiv 6[10]$

و منه $(a_n-1)^2+1\equiv 7[10]$ أي $a_{n+1}\equiv 7[10]$. و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $a_n\equiv 7[10]$.

2) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $PGCD(a_n;a_{n+1})=1$.

لدينا : من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $a_{n+1}=1+(a_n-1)^2=a_n^2-2a_n+2$.

نضع : $d=PGCD(a_n;a_{n+1})$.

لدينا : $\begin{cases}d\mid a_n\\ d\mid a_{n+1}\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}d\mid a_{n+1}\\ d\mid (a_n^2-2a_n)\end{cases}$ أي $d\mid\left[a_{n+1}-(a_n^2-2a_n)\right]$ أي $d\mid 2$ ومنه $d\in\{1;2\}$.

لكن : من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $a_n\equiv 7[10]$ و بالتالي $d=1$.

إذن : من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $PGCD(a_n;a_{n+1})=1$.

3) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $a_n=2^{2^{n+2}}+1$.

لنبرهن بالتراجع أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $a_n=2^{2^{n+2}}+1$.

نسمي $P(n)$ الخاصية " $P(n):a_n=2^{2^{n+2}}+1$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $a_0=17=2^{2^2}+1=2^4+1=16+1=17$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة .

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $a_n=2^{2^{n+2}}+1$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $a_{n+1}=2^{2^{n+3}}+1$.

لدينا حسب الفرض $a_n=2^{2^{n+2}}+1$ ومنه $a_n-1=2^{2^{n+2}}$ و منه $(a_n-1)^2=\left[2^{2^{n+2}}\right]^2=2^{2\times 2^{n+2}}=2^{2^{n+1+2}}=2^{2^{n+3}}$

و منه $(a_n-1)^2+1=2^{2^{n+3}}+1$ أي $a_{n+1}=2^{2^{n+3}}+1$. و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $a_n=2^{2^{n+2}}+1$.

4) استنتاج رقم آحاد العدد $N=2^{2^{2022}}+2^{2^{2023}}+2^{2^{2024}}+2^{2^{2025}}$.

لدينا : من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $a_n\equiv 7[10]$ ومنه $a_n-1\equiv 6[10]$ ولدينا : $N=a_{2020}-1+a_{2021}-1+a_{2022}-1+a_{2023}-1$

و منه $N\equiv 24[10]$ أي $N\equiv 4[10]$ و بالتالي رقم آحاد العدد N هو 4 .

II) x عدد طبيعي .

1) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $(1+x)^n\equiv(1+nx)\left[x^2\right]$.

طريقة ① : لنبرهن بالتراجع أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $(1+x)^n\equiv(1+nx)\left[x^2\right]$.

نسمي $P(n)$ الخاصية " $P(n):(1+x)^n\equiv(1+nx)\left[x^2\right]$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $(1+x)^0=1\equiv 1\left[x^2\right]$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة .

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $(1+x)^n\equiv(1+nx)\left[x^2\right]$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $(1+x)^{n+1}\equiv(1+(n+1)x)\left[x^2\right]$.

لدينا حسب الفرض $(1+x)^n\equiv(1+nx)\left[x^2\right]$ و منه $(1+x)(1+x)^n\equiv(1+x)(1+nx)\left[x^2\right]$

و منه $(1+x)^{n+1}\equiv(1+(n+1)x+nx^2)\left[x^2\right]\equiv(1+(n+1)x)\left[x^2\right]$ و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $(1+x)^n\equiv(1+nx)\left[x^2\right]$.

طريقة ② : يمكن استخدام دستور ثنائي الحد .

لدينا : $(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^k(1)^{n-k}=C_n^0x^0(1)^n+C_n^1x^1(1)^{n-1}+\sum_{k=2}^{n}C_n^kx^k(1)^{n-k}=1+nx+x^2\sum_{k=2}^{n}C_n^kx^{k-2}(1)^{n-k}$.

و منه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $(1+x)^n\equiv(1+nx)\left[x^2\right]$.

2) استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، 2025 يقسم $46^n+1980n+2024$.

لدينا : حسب الجواب السابق و بوضع $x=45$ ، نجد : من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $(1+45)^n\equiv(1+45n)\left[45^2\right]$

أي $46^n\equiv(1+45n)[2025]$ و منه $46^n+1980n+2024\equiv(2025+2025n)[2025]$

و بالتالي : $46^n+1980n+2024\equiv 0[2025]$.

إذن : من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، 2025 يقسم $46^n+1980n+2024$.

حل مقترح للموضوع الثالث:

I) 1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-(2\cos\theta)z+1=0$ ... (E) . حيث θ عدد حقيقي غير معدوم.

لدينا : $\Delta=4\cos^2\theta-4=-4\sin^2\theta=(2i\sin\theta)^2$ و منه للمعادلة حلين مركبين هما :

$z_1=\dfrac{2\cos\theta+2i\sin\theta}{2}=\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}$ و $z_2=\dfrac{2\cos\theta-2i\sin\theta}{2}=\cos\theta-i\sin\theta=e^{-i\theta}$.

2) من أجل $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ ، نرمز إلى حلي المعادلة (E) بـ z_1 و z_2 . تبيان أن : $z_1^{2025}+z_2^{2025}=0$.

لدينا : $z_1^{2025}+z_2^{2025}=e^{i\frac{2025\pi}{6}}+e^{-i\frac{2025\pi}{6}}=2\cos\left(\dfrac{2025\pi}{6}\right)=2\cos\left(169\times 2\pi-\dfrac{3\pi}{6}\right)=2\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=0$.

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

A و B نقطتان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب : $z_A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ و $z_B=\overline{z_A}$.

1) أ- كتابة العدد المركب $\dfrac{z_A}{z_B}$ على الشكل الجبري ، ثم على الشكل الأسي.

لدينا : $\dfrac{z_A}{z_B}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)^2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}=e^{i\frac{\pi}{3}}$.

بـ- إستنتاج طبيعة المثلث OAB .

لدينا : $\dfrac{z_A}{z_B}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ و منه $\begin{cases}\left|\dfrac{z_A}{z_B}\right|=1\\ \arg\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases}$ أي $\begin{cases}OB=OA\\ (\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA})=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases}$ و بالتالي المثلث OAB متقايس الأضلاع .

جـ- إيجاد z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث OAB .

لدينا : $z_G=\dfrac{z_O+z_A+z_B}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

2) S التشابه المباشر الذي مركزه O، نسبته 4 و زاويته $\frac{\pi}{4}$.

أ- الكتابة المركبة للتشابه S.

لدينا : $z' = 4e^{i\frac{\pi}{4}}z$.

بـ- نسمي C صورة النقطة A بالتشابه S. تبيان أن لاحقة النقطة C هي : $z_C = (\sqrt{6}-\sqrt{2})+i(\sqrt{6}+\sqrt{2})$.

لدينا : $z_C = 4e^{i\frac{\pi}{4}}z_A = (2\sqrt{2}+2i\sqrt{2})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = \sqrt{6}+i\sqrt{2}+i\sqrt{6}-\sqrt{2} = (\sqrt{6}-\sqrt{2})+i(\sqrt{6}+\sqrt{2})$.

جـ- كتابة z_C على الشكل الأسي :

لدينا : $z_C = 4e^{i\frac{\pi}{4}}z_A = 4e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{\pi}{6}} = 4e^{i\frac{5\pi}{12}}$.

استنتاج القيمة المضبوطة لكل من : $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$.

لدينا : $z_C = 4e^{i\frac{\pi}{12}} = 4\cos\frac{5\pi}{12}+4i\sin\frac{5\pi}{12}$ و منه بالمطابقة مع الشكل الجبري نجد : $\begin{cases}\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{cases}$.

3) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث : $3z.\bar{z}-\sqrt{3}(z+\bar{z}) = 0$.

التحقق أن $A \in (\Gamma)$:

لدينا : $3z_A.\overline{z_A}-\sqrt{3}(z_A+\overline{z_A}) = 3-\sqrt{3}\times\sqrt{3} = 0$ و منه $A \in (\Gamma)$.

تعيين طبيعة المجموعة (Γ) مع ذكر عناصرها المميزة .

طريقة : من أجل $z = x+iy$

$3z.\bar{z}-\sqrt{3}(z+\bar{z}) = 0$ تكافئ $3(x^2+y^2)-2\sqrt{3}x = 0$ تكافئ $x^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}x+y^2 = 0$

تكافئ $\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+y^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$ ومنه (Γ) هي الدائرة التي مركزها $G\left(\frac{\sqrt{3}}{3};0\right)$ و نصف قطرها $\frac{\sqrt{3}}{3}$ و هي الدائرة المحيطة بالمثلث OAB.

حل مقترح للموضوع الرابع:

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

I) (Γ) و (γ) التمثيلان البيانيان للدالتين $x \mapsto e^{x-1}$ و $x \mapsto 2x-x^2$.

1) بقراءة بيانية تحديد وضعية (Γ) بالنسبة إلى (γ) على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
الوضع النسبي	(γ) فوق (Γ)		(γ) يقطع (Γ) في النقطة ذات الفاصلة α	(γ) تحت (Γ)	(γ) يقطع (Γ) في النقطة ذات الفاصلة 1	(γ) فوق (Γ)	

2) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = x^2-2x+e^{x-1}$.

حساب $g(1)$:

لدينا : $g(1) = 0$.

استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3) التحقق أن : $0.28 < \alpha < 0.29$.

لدينا : $\begin{cases} g(0.28) \approx 0.005 \\ g(0.29) \approx -0.004 \end{cases}$ أي $g(0.28) \times g(0.29) < 0$ ومنه $0.28 < \alpha < 0.29$.

II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x - x^2 e^{1-x}$.

1) حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

لدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[x - x^2 e^{1-x} \right] = \lim\limits_{x \to +\infty} (x) - \lim\limits_{x \to +\infty} \left[x^2 e^{-x} \times e \right] = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[x - x^2 e^{1-x} \right] = +\infty$.

2) تبيان أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

لدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - y \right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[-x^2 e^{-x} \times e \right] = 0$ ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

دراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) :

لدينا : من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، $f(x) - y = -x^2 e^{1-x}$ ومنه $f(x) - y \leq 0$ وبالتالي المنحنى (C_f) يقع أسفل المستقيم (Δ) .

3) أ ـ تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = e^{1-x} g(x)$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x) = 1 - 2xe^{1-x} + x^2 e^{1-x} = e^{1-x}(e^{x-1} - 2x + x^2) = e^{1-x} g(x)$.

بـ ـ استنتاج إتجاه تغير الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ وبالتالي الدالة f متناقصة على المجال $[\alpha ; 1]$ ومتزايدة على كل من المجالين $]1 ; +\infty[$ و $]-\infty ; \alpha]$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	0	↗	$+\infty$

4) تبيان أن : $f(\alpha) = \alpha + 1 + \dfrac{2}{\alpha - 2}$ ، ثم إعطاء حصر لـ $f(\alpha)$.

لدينا : $g(\alpha) = 0$ ومنه $e^{\alpha - 1} = 2\alpha - \alpha^2$ أي $e^{1-\alpha} = \dfrac{1}{2\alpha - \alpha^2}$ وبالتالي :

$$f(\alpha) = \alpha - \alpha^2 e^{1-\alpha} = \alpha - \alpha^2 \left(\frac{1}{2\alpha - \alpha^2} \right) = \alpha + \frac{\alpha}{\alpha - 2} = \alpha + 1 + \frac{2}{\alpha - 2}$$

حصر $f(\alpha)$:

لدينا $0.28 < \alpha < 0.29$ ومنه $\begin{cases} 1.28 < \alpha + 1 < 1.29 \\ -1.72 < \alpha - 2 < -1.71 \\ \dfrac{1}{-1.71} < \dfrac{1}{\alpha - 2} < \dfrac{1}{-1.72} \end{cases}$ أي $1.28 - \dfrac{2}{1.71} < \alpha + 1 + \dfrac{2}{\alpha - 2} < 1.29 - \dfrac{2}{1.72}$

أي: $0.11 < f(\alpha) < 0.12$.

5) أ ـ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $f'(x) = 1$.

لدينا $f'(x) = 1$ تكافئ $1 - 2xe^{1-x} + x^2 e^{1-x} = 1$ تكافئ $xe^{1-x}(x-2) = 0$ تكافئ $\begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

تفسير النتيجة المحصل عليها بيانيا :

حلول المعادلة $f'(x) = 1$ ، بيانيا هي فواصل النقط من المنحنى (C_f) والتي يكون فيها المماس معامل توجيهه 1 وبما أنه للمعادلة $f'(x) = 1$ حلين فإن للمنحنى (C_f) مماسين في النقطتين اللتين فاصلتهما 0 و 2 على الترتيب معامل توجيههما 1 .

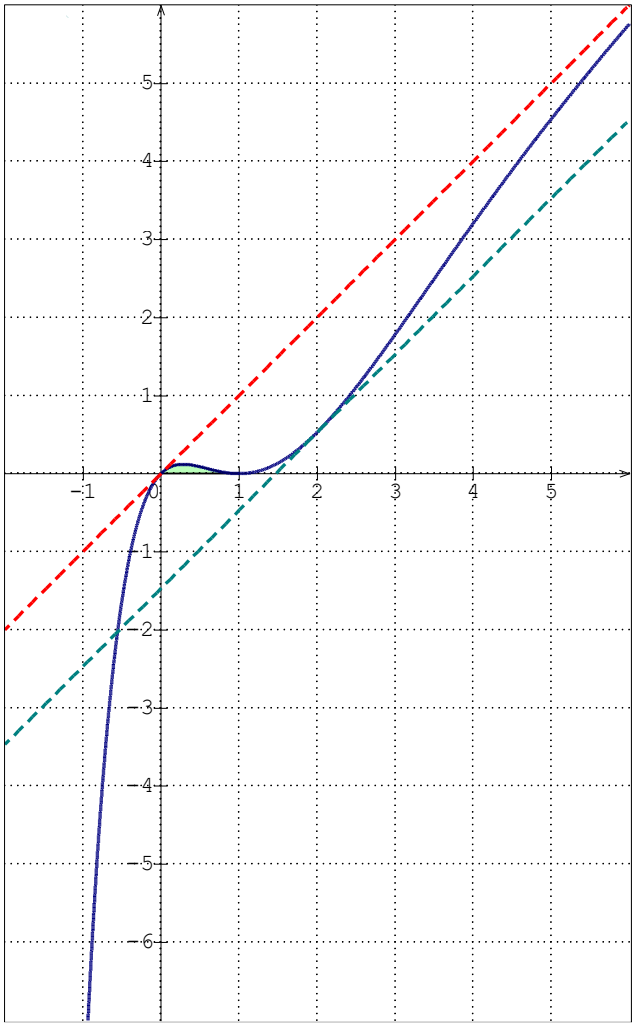
بـ ـ كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 2 .

لدينا : $(T) : y = f'(2)(x-2) + f(2)$ ومنه $(T) : y = x - 4e^{-1}$.

6) حساب $f(-1)$.

لدينا : $f(-1)=-1-e^2\approx -8.38$.

الرسم :



7) المناقشة البيانية :

لدينا : $e^{m-1+x}=x^2$ تكافئ $e^m=x^2e^{1-x}$ تكافئ $x-x^2e^{1-x}=x-e^m$ تكافئ $f(x)=x-e^m$.

حلول المعادلة $f(x)=x-e^m$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y=x-e^m$.

- من أجل $-e^m<-4e^{-1}$ أي $m>-1+\ln 4$ المعادلة تقبل حل واحد .
- من أجل $-e^m=-4e^{-1}$ أي $m=-1+\ln 4$ المعادلة تقبل حلين .
- من أجل $0<-e^m<-4e^{-1}$ أي $m<-1+\ln 4$ المعادلة تقبل ثلاث حلول .

III) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $I_n=\int_0^1 x^n e^{1-x}dx$.

1) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $I_{n+1}=(n+1)I_n-1$.

لدينا : من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ،

$$I_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}e^{1-x}dx=\left[-x^{n+1}e^{1-x}\right]_0^1-\int_0^1-(n+1)x^ne^{1-x}dx=-1+(n+1)\int_0^1 x^ne^{1-x}dx=(n+1)I_n-1$$

2) استنتاج كلا من I_1 و I_2 .

لدينا : $I_0=\int_0^1 e^{1-x}dx=\left[-e^{1-x}\right]_0^1=-1+e=e-1$ و $I_1=I_0-1=e-2$ و $I_2=2I_1-1=2e-5$.

تفسير I_2 بيانيا :

لدينا : $I_2=\int_0^1 x^2e^{1-x}dx=\int_0^1\left[x-f(x)\right]dx$ و منه I_2 هو المساحة (بوحدة المساحة) للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $y=x$ ، $x=0$ و $x=1$.

3) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $\frac{1}{n+1} \le I_n \le \frac{e}{n+1}$.

لدينا : من أجل كل $x \in [0;1]$ ، $e^x \le e \le 1$ ومنه $e^{-1} \le e^{-x} \le 1$ ومنه $1 \le e^{1-x} \le e$

ومنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $x^n \le x^n e^{1-x} \le x^n e$ ومنه $\int_0^1 x^n dx \le \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \le \int_0^1 x^n e dx$

ومنه $\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 \le I_n \le \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}e\right]_0^1$ أي $\frac{1}{n+1} \le I_n \le \frac{e}{n+1}$.

استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e}{n+1} = 0$ ومنه حسب مبرهنة الحصر في النهايات $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

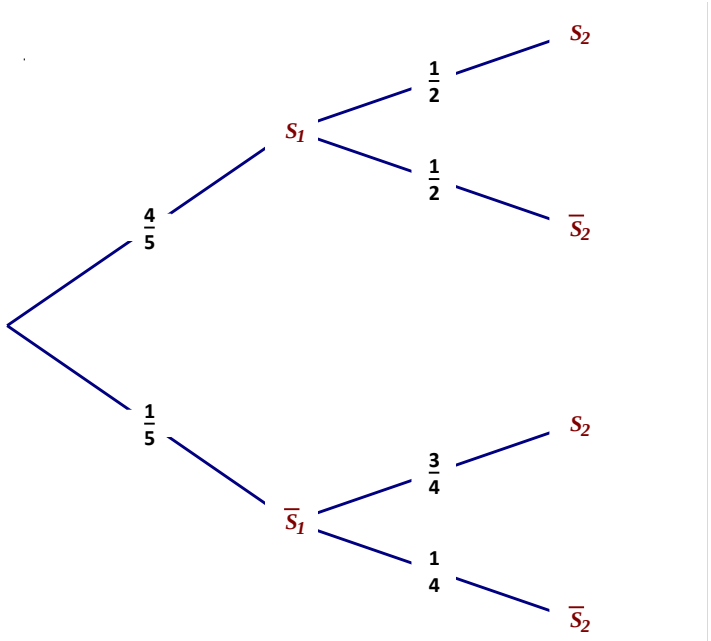
حل مقترح للموضوع الثاني

حل مقترح للموضوع الأول:

1) حساب P_1.

لدينا : $P_1 = \frac{4}{5}$.

2) شجرة الإحتمالات :



استنتاج أن : $P_2 = \frac{11}{20}$.

لدينا : $P_2 = P(S_2) = \frac{4}{5}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\times\frac{3}{4} = \frac{4}{10} + \frac{3}{20} = \frac{11}{20}$.

3) إثبات أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $P_{n+1} = \frac{1}{4}(3 - P_n)$.

لدينا : من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ،

$$P_{n+1} = P(S_{n+1}) = P(S_n \cap S_{n+1}) + P(\overline{S_n} \cap S_{n+1}) = P(S_n)\times P_{S_n}(S_{n+1}) + P(\overline{S_n})\times P_{\overline{S_n}}(S_{n+1})$$

$$= \frac{1}{2}P(S_n) + \frac{3}{4}P(\overline{S_n}) = \frac{1}{2}P(S_n) + \frac{3}{4}(1 - P(S_n)) = \frac{1}{4}(3 - P(S_n)) = \frac{1}{4}(3 - P_n)$$

4) نعرف على $\mathbb{N}^*$ المتتالية (v_n) بـ: $v_n = P_n - \frac{3}{5}$.

أ ـ إثبات أن (v_n) متتالية هندسية ، مع تعيين أساسها وحدها الأول :

لدينا : من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ،

$$v_{n+1} = P_{n+1} - \frac{3}{5} = \frac{1}{4}(3 - P_n) - \frac{3}{5} = \frac{3}{4} - \frac{3}{5} - \frac{1}{4}P_n = \frac{3}{20} - \frac{1}{4}P_n = -\frac{1}{4}\left(P_n - \frac{3}{5}\right) = -\frac{1}{4}v_n$$

و منه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = -\frac{1}{4}$ وحدها الأول $v_1 = P_1 - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$.

بـ ـ إيجاد نهاية المتتالية (v_n) :

لدينا : من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $v_n = v_1 \times q^{n-1} = \frac{1}{5}\times\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ و بالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{5}\times\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right] = 0$.

استنتاج نهاية المتتالية (P_n) .

لدينا : من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $v_n = P_n - \frac{3}{5}$ ومنه $P_n = v_n + \frac{3}{5}$ وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(v_n + \frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}$.

حل مقترح للموضوع الثاني:

1) دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 5^n على 9 .

لدينا: $5^0 \equiv 1[9]$ ، $5^1 \equiv 5[9]$ ، $5^2 \equiv 7[9]$ ، $5^3 \equiv 8[9]$ ، $5^4 \equiv 4[9]$ ، $5^5 \equiv 2[9]$ ، $5^6 \equiv 1[9]$ ومنه :

$n =$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	
$5^n \equiv$	1	5	7	8	4	2	$[9]$

2) نضع ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = 1+5+5^2+....+5^n$.

أ ـ تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $4S_n = 5^{n+1}-1$.

لدينا : من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $S_n = 1+5+5^2+....+5^n = \frac{5^{n+1}-1}{5-1} = \frac{5^{n+1}-1}{4}$ ومنه $4S_n = 5^{n+1}-1$.

بـ ـ تعيين باقي قسمة S_{2025} على 9 .

لدينا : $4S_{2025} = 5^{2026}-1$ و $5^{2026} = 5^{6(337)+4} \equiv 4[9]$ ومنه $4S_{2025} \equiv 3[9]$ أي $5^{2026}-1 \equiv 3[9]$ ومنه $4S_{2025} \equiv 12[9]$

ومنه $S_{2025} \equiv 3[9]$ (لأن 9 و 4 أوليان فيما بينهما) و بالتالي باقي قسمة S_{2025} على 9 هو 3 .

جـ ـ تحديد قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $S_n \equiv 0[9]$.

لدينا : $S_n \equiv 0[9]$ معناه $4S_n \equiv 0[9]$ أي $5^{n+1}-1 \equiv 0[9]$ أي $5^{n+1} \equiv 1[9]$ أي $n+1 = 6k$ أي $n = 6k-1$ مع $k \in \mathbb{N}^*$.

3) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $5^n x - S_n y = 9$ .... (E_n) .

أ ـ تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، 5^n و S_n أوليان فيما بينهما .

لدينا : من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $4S_n = 5^{n+1}-1$ ومنه $5\times 5^n - 4S_n = 1$ ومنه حسب مبرهنة بيزو ، 5^n و S_n أوليان فيما بينهما .

بـ ـ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E_n) .

لدينا : باستغلال الجواب السابق ، الثنائية $(45;36)$ حل خاص للمعادلة (E_n) ومنه $5^n x - S_n y = 5^n(45) - S_n(36)$

أي : $5^n(x-45) = S_n(y-36)$ وهذا يعني أن $5^n \mid S_n(y-36)$ ولدينا 5^n أولي مع S_n ومنه حسب مبرهنة غوص $5^n \mid (y-36)$.

أي : $y-36 = 5^n k$ إذن $y = 5^n k + 36$ مع $k \in \mathbb{Z}$ ، وبتعويض قيمة y في المعادلة نجد: $x = S_n k + 45$

ومنه حلول المعادلة (E_n) هي : $(x;y) = (S_n k + 45; 5^n k + 36)$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

4) تحديد الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية حيث : $\begin{cases} 25x - 31y = 9 \\ PGCD(x;y) = 3 \end{cases}$.

لدينا : حلول المعادلة $25x - 31y = 9$ .... (E_2) هي : $(x;y) = (31k+45; 25k+36)$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

ولدينا : $PGCD(x;y) = 3$ معناه $\begin{cases} x \equiv 3[9] \\ y \equiv 3[9] \end{cases}$ أي $\begin{cases} 31k+45 \equiv 3[9] \\ 25k+36 \equiv 3[9] \end{cases}$ أي $\begin{cases} 31k \equiv 3[9] \\ 25k \equiv 3[9] \end{cases}$ أي $\begin{cases} 4k \equiv 3[9] \\ 7k \equiv 3[9] \end{cases}$ أي $\begin{cases} 8k \equiv 6[9] \\ 7k \equiv 3[9] \end{cases}$

ومنه $k \equiv 3[9]$ أي $k = 9p+3$ و بالتالي : $(x;y) = (279p+138; 225p+111)$ مع $p \in \mathbb{N}$.

5) يحتوي كيس على ست كرات مرقمة ببواقي قسمة 5^n على 9 .

نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من الكيس .

عدد الإمكانيات : $C_6^2 = 15$.

أ ـ حساب إحتمال الحصول على كرتين مجموع رقميهما يساوي مجموع أرقام العدد 2025 .

معناه الحصول على كرتين مجموع رقميهما هو 9 معناه الحصول على : $(4;5)$ أو $(2;7)$ أو $(1;8)$.

لدينا : $\frac{C_1^1 \times C_1^1 + C_1^1 \times C_1^1 + C_1^1 \times C_1^1}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$.

بـ ـ ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب لكرتين عدد الأرقام الأولية المتبقية في الكيس .

القيم الممكنة لـ X هي : $\{1;2;3\}$.

لدينا : $P(X=1) = \frac{C_3^2}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ و $P(X=2) = \frac{C_3^1 \times C_3^1}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ و $P(X=3) = \frac{C_3^2}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$.

قانون الإحتمال :

X_i	1	2	3
$P(X=X_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

حساب الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X .

$$E(X)=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{5}=\frac{10}{5}=2$$

حل مقترح للموضوع الثالث:

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $\left(\bar{z}-2-2i\right)\left(z^2-2\sqrt{2}z+8\right)=0$.

لدينا : $\left(\bar{z}-2-2i\right)\left(z^2-2\sqrt{2}z+8\right)=0$ تكافئ أو $\begin{cases}\bar{z}-2-2i=0\\ z^2-2\sqrt{2}z+8=0\end{cases}$ تكافئ أو $\begin{cases}z=2-2i\\ z^2-2\sqrt{2}z+8=0\end{cases}$

لنحل المعادلة : $z^2-2\sqrt{2}z+8=0$.

لدينا : $\Delta=-24=\left(2i\sqrt{6}\right)^2$ و منه للمعادلة حلين مركبين هما :

$$z_1=\frac{2\sqrt{2}-2i\sqrt{6}}{2}=\sqrt{2}-i\sqrt{6} \quad \text{و} \quad z_2=\frac{2\sqrt{2}+2i\sqrt{6}}{2}=\sqrt{2}+i\sqrt{6} \ .$$

إذن مجموعة حلول المعادلة $\left(\bar{z}-2-2i\right)\left(z^2-2\sqrt{2}z+8\right)=0$ هي : $S=\left\{2-2i;\ \sqrt{2}-i\sqrt{6}\ ;\ \sqrt{2}+i\sqrt{6}\right\}$.

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

A ، B و C النقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب : $z_A=\sqrt{2}+i\sqrt{6}$ ، $z_B=-z_A$ و $z_C=2-2i$

1) أ- كتابة الأعداد المركبة z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي :

$$z_A=\sqrt{2}+i\sqrt{6}=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$z_B=-z_A=2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)}=2\sqrt{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}=2\sqrt{2}e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

$$z_C=2-2i=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

بـ- لدينا : $|z_A|=|z_B|=|z_C|=2\sqrt{2}$ و منه النقط A ، B و C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها $2\sqrt{2}$.

2) تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $\left(\frac{z_A\times z_C}{8}\right)^n=1$.

لدينا : $\left(\frac{z_A\times z_C}{8}\right)^n=e^{i\frac{n\pi}{12}}$ و منه $\left(\frac{z_A\times z_C}{8}\right)^n=1$ يكافئ $\arg\left(\frac{z_A\times z_C}{8}\right)^n=2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}$ أي : $\frac{n\pi}{12}=2k\pi$

و منه $n=24k\ /\ k\in\mathbb{N}$. و منه .

3) R الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{4}$.

أ- تعيين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران R :

لدينا : $z_D=e^{i\frac{\pi}{4}}z_C=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\times e^{i\frac{\pi}{4}}=2\sqrt{2}$.

بـ- كتابة العدد المركب $\frac{z_B-z_D}{z_A-z_D}$ على الشكل الجبري ، ثم على الشكل الأسي.

$$\frac{z_B-z_D}{z_A-z_D}=\frac{-\sqrt{2}-i\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+i\sqrt{6}-2\sqrt{2}}=\frac{-3\sqrt{2}-i\sqrt{6}}{-\sqrt{2}+i\sqrt{6}}=\frac{\left(-3\sqrt{2}-i\sqrt{6}\right)\left(-\sqrt{2}-i\sqrt{6}\right)}{8}=i\sqrt{3}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

جـ- إستنتاج طبيعة المثلث **ADB** .

لدينا : $\frac{z_B - z_D}{z_A - z_D} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ يكافئ $\begin{cases} \left|\frac{z_B - z_D}{z_A - z_D}\right| = \sqrt{3} \\ \arg\left(\frac{z_B - z_D}{z_A - z_D}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} DB = \sqrt{3}DA \\ \left(\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DB}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$.

و بالتالي المثلث **ADB** قائم في **D** .

د- تعيين z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث **ADB** :

لدينا : $z_G = \frac{z_A + z_B + z_D}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

4) لتكن **M** نقطة كيفية من المستوي لاحقتها **z** حيث **M** تختلف عن **A** و تختلف عن **C** .

تعيين (E) مجموعة النقط **M** التي يكون من أجلها $\frac{z_A - z}{z_C - z}$ عددا حقيقيا سالبا تماما :

$\frac{z_A - z}{z_C - z} \in \mathbb{R}^-$ معناه $\arg\left(\frac{z_A - z}{z_C - z}\right) = \pi + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$ أي : $\left(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}\right) = \pi + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$

و منه مجموعة النقط هي قطعة المستقيم المفتوحة $]AC[$.

حل مقترح للموضوع الرابع:

n عدد طبيعي أكبر أو يساوي 2 .

f_n الدالة العددية المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ : $f_n(0) = 0$ و من أجل كل $x > 0$ ، $f_n(x) = x - x^n \ln x$.

1) تبيان أن : $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = -\infty$.

لدينا : $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x - x^n \ln x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[x(1 - x^{n-1}\ln x)\right] = -\infty$.

2) أ- إثبات أن الدالة f_n قابلة للإشتقاق عند 0 من اليمين .

لدينا : $\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}}\left[1 - x^{n-1}\ln x\right] = 1$ و منه الدالة f_n قابلة للإشتقاق عند 0 من اليمين

و $(f_n')_d(0) = 1$.

بـ- تبيان أنه من أجل كل $x \in]0;+\infty[$ ، $f_n'(x) = 1 - x^{n-1} - nx^{n-1}\ln x$.

الدالة f_n قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و $x \in]0;+\infty[$ و $f_n'(x) = 1 - nx^{n-1}\ln x + \frac{1}{x}\times(-x^n) = 1 - x^{n-1} - nx^{n-1}\ln x$.

جـ- تبيان أن الدالة f_n متزايدة على المجال $]0;1]$ و متناقصة على المجال $[1;+\infty[$:

لدينا : من أجل كل $x \in]0;1]$ ، يكون $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ \ln x \le 0 \end{cases}$ و منه $\begin{cases} 0 \le x^{n-1} \le 1 \\ x^{n-1}\ln x \le 0 \end{cases}$ و منه $\begin{cases} 1 - x^{n-1} \ge 0 \\ -nx^{n-1}\ln x \ge 0 \end{cases}$ أي $f_n'(x) \ge 0$ و بالتالي

الدالة f_n متزايدة على المجال $]0;1]$.

و لدينا : من أجل كل $x \in [1;+\infty[$ ، يكون $\begin{cases} x \ge 1 \\ \ln x \ge 0 \end{cases}$ و منه $\begin{cases} x^{n-1} \ge 1 \\ x^{n-1}\ln x \ge 0 \end{cases}$ و منه $\begin{cases} 1 - x^{n-1} \le 0 \\ -nx^{n-1}\ln x \le 0 \end{cases}$ أي $f_n'(x) \le 0$

و بالتالي الدالة f_n متناقصة على المجال $[1;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f_n :

x	0		1		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	↗	1	↘	$-\infty$

3) أ ـ حل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة : $f_n'(x)=1$.

لدينا : $f_n'(x)=1$ تكافئ $1-x^{n-1}-nx^{n-1}\ln x=0$ تكافئ $x^{n-1}+nx^{n-1}\ln x=0$ تكافئ $x^{n-1}(1+n\ln x)=0$

تكافئ $1+n\ln x=0$ تكافئ $\ln x=-\frac{1}{n}$ تكافئ $x=e^{-\frac{1}{n}}$.

تفسير النتيجة بيانيا :

المنحنى (C_n) يقبل في النقطة ذات الفاصلة $x=e^{-\frac{1}{n}}$ مماسا موازيا للمستقيم المنصف الأول .

بـ ـ كتابة معادلة لـ (T_n) مماس المنحنى (C_n) الموازي للمستقيم المنصف الأول :

لدينا : $(T_n):y=x-e^{-\frac{1}{n}}+f(e^{-\frac{1}{n}})$ ومنه $(T_n):y=x+\frac{1}{ne}$.

4) أ ـ تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 2$ لدينا : من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $f_{n+1}(x)\leq f_n(x)$.

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 2$ ، و من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ،

$f_{n+1}(x)-f_n(x)=x-x^{n+1}\ln x-(x-x^n\ln x)=x^n(1-x)\ln x$

إشارة الفرق من إشارة $(1-x)\ln x$.

x	0		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
$\ln x$		$-$	0	$+$	
$f_{n+1}(x)-f_n(x)$		$-$	0	$-$	

إذن : من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 2$ لدينا : من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $f_{n+1}(x)\leq f_n(x)$.

بـ ـ استنتاج الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1}) .

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 2$ ، و من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $f_{n+1}(x)\leq f_n(x)$.

و منه المنحنى (C_{n+1}) يقع يقع أسفل المنحنى (C_n) . و (C_n) و (C_{n+1}) يتقاطعان في النقطة $A(1;1)$.

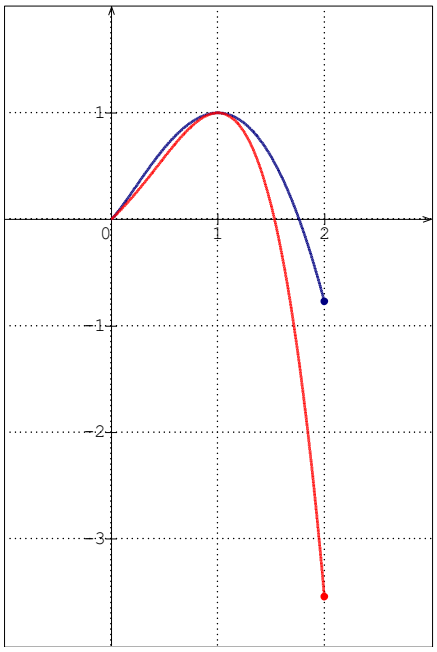
5) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 2$ يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha_n\in]1;2[$ حيث : $f_n(\alpha_n)=0$.

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 2$ ، و من أجل كل $x\in]1;+\infty[$ ، الدالة f_n متناقصة تماما و $]1;2[\subset]1;+\infty[$

و $\begin{cases}f_n(1)=1\\ f_n(2)=2-2^n\ln 2<0\end{cases}$ أي $f_n(1)\times f_n(2)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha_n\in]1;2[$

حيث : $f_n(\alpha_n)=0$.

6) الرسم :



7) أ ـ تبيان أن الدالة $x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1}$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto x^n \ln x$ على المجال $]0;+\infty[$.

الدالة $x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1}$ قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و

$$\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1}\right)' = x^n \ln x + \frac{1}{n+1}x^n - \frac{1}{n+1}x^n = x^n \ln x$$

و منه الدالة $x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1}$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto x^n \ln x$ على المجال $]0;+\infty[$.

بـ ـ λ عدد حقيقي حيث: $0<\lambda<1$ ، نضع: $S(\lambda)=\int_{\lambda}^{1}\left[f_2(x)-f_3(x)\right]dx$.

حساب $S(\lambda)$ بدلالة λ:

$$S(\lambda)=\int_{\lambda}^{1}\left[f_2(x)-f_3(x)\right]dx=\int_{\lambda}^{1}\left[x^3\ln x - x^2\ln x\right]dx=\left[\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{16}x^4-\frac{1}{3}x^3\ln x+\frac{1}{9}x^3\right]_{\lambda}^{1}$$

$$=\frac{1}{9}-\frac{1}{16}-\frac{1}{4}\lambda^4\ln\lambda+\frac{1}{16}\lambda^4+\frac{1}{3}\lambda^3\ln\lambda-\frac{1}{9}\lambda^3$$

حساب $\lim\limits_{\substack{\lambda\to 0\\ >}} S(\lambda)$:

لدينا: $\lim\limits_{\substack{\lambda\to 0\\ >}} S(\lambda)=\lim\limits_{\substack{\lambda\to 0\\ >}}\left[\frac{1}{9}-\frac{1}{16}-\frac{1}{4}\lambda^4\ln\lambda+\frac{1}{16}\lambda^4+\frac{1}{3}\lambda^3\ln\lambda-\frac{1}{9}\lambda^3\right]=\frac{1}{9}-\frac{1}{16}=\frac{7}{144}$.

تفسير النتيجة هندسيا:

العدد $\frac{7}{144}$ يمثل بالضبط المساحة (بوحدة المساحة) للحيّز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_2) و (C_3).

نشر يوم : 2025.05.15

لا أسمح بالنسخ و لا بالتعديل و لا استعمال هذا العمل لأغراض تجارية