بكالوريا تجريبية

الشعبة: رياضيات
المدة: 04 سا و30د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين

الموضوع الأول

يحتوي الموضوع الأول على صفحتين (الصفحة 1 من 5 والصفحة 2 من 5)

التمرين الأول 04.25 نقطة

كيس يحتوي على: خمس كريات حمراء تحمل الأعداد: 1، e، e، e^2 و e^2 وثلاث كريات سوداء تحمل الأعداد: e، e^2 و e^2 وثلاث كريات خضراء تحمل الأعداد 1، $\frac{1}{e}$ و $\frac{1}{e^2}$ (الكريات متماثلة ولا نفرق بينها باللمس)

نسحب بطريقة عشوائية من هذا الكيس كريتان في آن واحد

نعتبر الأحداث A ، B و C حيث:

◄ A: "سحب كريتان مختلفتان في اللون"

◄ B: "سحب كريتان لهما نفس العدد"

❶ أ/ احسب $P(A)$، $P(B)$ و $P(A \cup B)$

ب/ ما احتمال سحب كريتان مختلفتان في اللون علما أنّ لهما نفس العدد؟

❷ نسمي α و β العددين الظاهرين على الكرتين المسحوبتين،

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب العدد $\ln(\alpha\beta)$

أ/ عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

ب/ احسب احتمال الحادثة "$X^2 > 4$"

❸ نسحب الآن من هذا الكيس ثلاث كريات على التوالي بدون ارجاع بحيث نرتبها ترتيبا تصاعديا عند ظهورها

نعتبر الحدثان C ، D حيث:

◄ C: "سحب كرية واحدة فقط حمراء والكرة الأولى سوداء"

◄ D: "سحب ثلاث كريات تحمل أعداد تشكل حدودا متتابعة من متتالية هندسية"

- احسب $P(C)$ و $P(D)$

التمرين الثاني 04.25 نقطة

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_n = 2^n$، وليكن S_n المجموع المعرف بـ $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$

❶ اكتب S_n بدلالة n، ثم استنتج أنّ S_n و U_n أوليان فيما بينهما

❷ أ/ ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية لـ U_n على 7

ب/ نعتبر العدد A حيث $A = (U_{2024} + U_{1962} - S_{1445})^{1954} - 2 \times 6^{2022}$

- بيّن أن A يقبل مضاعف لـ 7

ج/ عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها S_{2n} مضاعفا لـ 7

❸ نعتبر المعادلة $(E): 4x - 7y = 3$ ذات المجهولين الصحيحين x و y

أ/ بيّن أن الثنائية $(S_2 - 1; S_1)$ حل لـ (E)، ثمّ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)

ب/ نضع $D = PGCD(x; y)$، عيّن القيم الممكنة لـ D

❹ ليكن P العدد الطبيعي الذي يكتب $\overline{1\alpha\alpha220}$ في النظام ذا الأساس 4، بحيث α عدد طبيعي

- جد قيمة α حتى يكون $(P - 1)$ مضاعفا لـ7، ثمّ اكتب P في النظام العشري

www.dzexams.com

التمرين الثالث 04.50 نقطة

I) نعتبر العدد المركب $L = 2 + \sqrt{3} + i$

❶ بيّن أن طويلة L هي $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$

❷ تحقق من أنّ: $L = 2\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] + 2i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

❸ أ/ بيّن أنّ: $1+\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta)$

ب/ بيّن أنّ $L = 4\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + 4i\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ (تذكر أنّ: $\sin(2\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta)$)

ج/ اكتب العدد المركب L على شكله الأسي

د/ بين أنّ: $L^6 = \left(8+4\sqrt{3}\right)^3 i$

II) نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$. النقطتين Ω و P اللتين لاحقتهما $\omega = \sqrt{3}$ و L على الترتيب. وليكن h التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته 2

❶ بيّن أنّ d لاحقة النقطة D صورة النقطة P بالتحاكي h هي $(4+\sqrt{3}) + 2i$

❷ حدد (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث: $|\overline{z} - 4 - \sqrt{3} + 2i| = |L|$

التمرين الرابع 07.00 نقطة

I) لتكن الدالة العددية f_α المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f_\alpha(x) = e^{2x} - 2\alpha e^x + 3$، حيث α وسيط حقيقي

وليكن (C_α) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

❶ احسب f'_α الدالة المشتقة للدالة f_α، ثمّ عيّن حسب قيم الوسيط الحقيقي α القيم الحدية للدالة f_α

❷ نسمي Ω_α النقطة الحدية لـ (C_α) في حالة وجودها

أ/ عيّن بدلالة α احداثيي النقطة Ω_α

ب/ عيّن مجموعة النقط Ω_α لما α يمسح $\mathbb{R}_+^*$

II) نعتبر الدالة f_1 حيث (C_1) تمثيلها البياني

❶ أ/ عيّن المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_1)

ب/ ادرس تغيرات الدالة f_1، ثمّ شكل جدول تغيراتها

❷ عيّن معادلة المماس (T) لـ (C_1) عند النقطة ذات الترتيبة 3

❸ ارسم كلا من (T) و (C_1)

❹ لتكن (Δ_m) عائلة المستقيمات المعرفة بـ: $y = mx + 3 - m\ln 2$، حيث m وسيط حقيقي

أ/ بيّن أنّ المستقيمات (Δ_m) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيين احداثييها

ب/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $e^x(e^x-2) = m(x-\ln 2)$

III) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = -e^{2x} + 2e^x + 3$ و (C') تمثيلها البياني

❶ اكتب $g(x)$ بدلالة $f_1(x)$، ثمّ بيّن أنّ (C') و (C_1) متناظران بالنسبة إلى المستقيم (D) الذي يطلب تعيين معادلته

❷ ارسم (C')

❸ بيّن أن $A = 1u.a$. حيث A هي مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_1) و(C') والمستقيمان ذو المعادلتان $x = 0$ و $x = \ln 2$

www.dzexams.com

الموضوع

يحتوي الموضوع الثاني على ثلاث صفحات (من الصفحة 3 من 5 إلى الصفحة 5 من 5)

التمرين الأول — 04.00 نقطة

❶ ادرس حسب قيم بواقي القسمة الاقليدية للعدد 4^n على 13

❷ نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $(E_n) = 286x - 247y = 4^n - 25$ حيث n عدد طبيعي

- عيّن قيم n التي من أجلها المعادلة (E_n) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$

❸ نضع: $n = 3$

أ/ بيّن أن (E_3) تكافئ المعادلة $(E'): 22x - 19y = 3$، ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E')

ب/ ما هي القيم الممكنة لـ $\text{PGCD}(x; y)$ حيث $(x; y)$ حلول المعادلة (E')

ج/ عيّن الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E') بحيث يكون $\text{PGCD}(x; y) = 3$

د/ عيّن الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E') التي تحقق $|2x - y| < 17$

التمرين الثاني — 04.00 نقطة

I) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$، α عدد مركب حيث:

$$\begin{cases} \alpha + \overline{\alpha} = 2\sqrt{2+\sqrt{2}} \\ \alpha\overline{\alpha} = 4 \\ \text{Im}(\alpha) > 0 \end{cases}$$

❶ أ/ اكتب العدد α على الشكل الجبري

ب/ اكتب العدد α^2 على الشكل الأسي

❷ أ/ بين أنّ $\alpha = 2e^{\frac{\pi}{8}i}$

ب/ استنتج القيمة المضبوطة لـ $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

II) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $L_n = \alpha^n$ ، و نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين L_1 و L_2 على الترتيب

❶ عيّن قيم n التي من أجلها العدد L_{4n} تخيلي صرف

❷ المتتالية العددية (U_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_n = \arg(L_n)$

أ/ بيّن أنّ (U_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول، ثم اكتب U_n بدلالة n

ب/ احسب بدلالة n عبارة S_n حيث: $S_n = \arg\left(\overline{L_0} \times \overline{L_1} \times \ldots \times \overline{L_n}\right)$

❸ أ/ عيّن (E_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق $z = L_1\left(L_2 - e^{i\theta}\right)$ حيث: $\theta \in \mathbb{R}$

ب/ عيّن (E_2) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق $\arg\left[\left(iz + \overline{iL_2}\right)^2\right] = \frac{3\pi}{4} + 4k\pi$ حيث: $k \in \mathbb{Z}$

التمرين الثالث — 04.50 نقطة

زهرة نرد ذو ستة أوجه مرقمة من 1 إلى 6، p_k هو احتمال الحصول على الرقم k حيث $(1 \leq k \leq 6)$

هذه الزهرة مغشوشة بحيث:

- الأعداد p_1 ، p_2 ، p_3 ، p_4 ، p_5 و p_6 تشكل بهذا الترتيب متتالية حسابية أساسها r
- والأعداد: p_1 ، p_2 و p_4 تشكل بهذا الترتيب متتالية هندسية أساسها q

❶ اثبت أنّ $p_k = \frac{k}{21}$ من أجل $1 \leq k \leq 6$

www.dzexams.com

❷ نرمي هذه الزهرة مرة واحدة، ونعتبر الحوادث التالية:

A: "العدد المحصل عليه زوجي"

B: "العدد المحصل عليه أكبر أو يساوي 3"

C: "العدد المحصل عليه 3 أو 4"

أ/ احسب احتمال كل من الحوادث A، B و C

ب/ احسب احتمال الحصول على عدد أكبر من أو يساوي 3، علما أنه زوجي

ج/ هل الحادثتان A و B مستقلتان؟

❸ نستعمل الآن هذه الزهرة لإجراء اللعبة التالية:

لدينا صندوق U_1 يحتوي على كرة حمراء و ثلاث كرات سوداء، وصندوق U_2 يحتوي على كريتين حمراوين وكرة سوداء واحدة، يأتي لاعب ويرمي الزهرة:

- إذا حصل على رقم زوجي يسحب عشوائيا كرة واحدة من الصندوق U_1
- إذا حصل على رقم فردي يسحب عشوائيا كرة واحدة من الصندوق U_2

اللاعب يعتبر رابحا إذا سحب كرة حمراء، ونسمي G الحادثة: "اللاعب رابح"

أ/ عيّن احتمال الحادثة $A \cap G$، ثم احتمال الحادثة G

ب/ علما أن اللاعب رابح، عيّن احتمال أن يكون حصل على عدد زوجي.

التمرين الرابع — 07.50 نقطة

n عدد طبيعي غير معدوم

I) h_n الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بـ: $h_n(x) = x^2 - n + n\ln x$

❶ أ/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} h_n(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} h_n(x)$

ب/ ادرس اتجاه تغير h_n ، ثمّ شكل جدول تغيراتها

❷ أ/ بيّن أنّ المعادلة $h_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n بحيث $1 \le \alpha_n < e$

ب/ استنتج إشارة $h_n(x)$ على $\mathbb{R}_+^*$

II) نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بـ: $f_n(x) = x - n - \dfrac{n\ln x}{x}$

و (C_n) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، (الوحدة $2cm$)

❶ احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f_n(x)$ وفسّر النتيجة هندسيا ، ثمّ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$

❷ أ/ بيّن أنّ المستقيم (Δ_n) ذو المعادلة $y = x - n$ مقارب مائل لـ (C_n)

ب/ ادرس وضعية (C_n) بالنسبة إلى (Δ_n)

❸ أ/ بيّن أنّه من أجل كل $x > 0$: $f_n'(x) = \dfrac{h_n(x)}{x^2}$

ب/ استنتج اتجاه تغير f_n، ثمّ شكل جدول تغيراتها

❹ تحقق أنّ $f_n(\alpha_n) = 2\alpha_n - n - \dfrac{n}{\alpha_n}$

❺ بيّن أنه يوجد مماس (T_n) للمنحنى (C_n) يوازي (Δ_n) ثمّ اكتب معادلة له

❻ أ/ تحقق أنّ $t = 1$ هو الحل الوحيد للمعادلة $1 - t = 2\ln t$

ب/ بيّن أنه يوجد مماس وحيد (D_n) للمنحنى (C_n) يشمل مبدأ المعلم، ثمّ اكتب معادلة له

www.dzexams.com

III) g الدالة العدية المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ كما يلي: $g(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$

❶ ادرس تغيرات الدالة g

❷ بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β بحيث $0.5 < \beta < 0.6$

❸ استنتج الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1})

❹ بيّن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$، $f_n(\beta) = \beta$، ماذا تستنتج؟

IV)

❶ ارسم (C_2) (نأخذ $1.2 < \alpha_2 < 1.3$ و $f(\alpha_2) \approx -1.1$)

❷ عيّن قيم الوسيط الحقيقي m التي من أجلها المعادلة $f_2(x) = mx$ حلين مختلفين

﴿بالتوفيق والنجاح لجموع التلاميذ الشرفاء﴾

www.dzexams.com

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربيـــــة الوطنيـــــة
امتحان: شهادة البكالوريا
دورة: جوان 2024
الشعبة: رياضيات
اختبار مادة: الرياضيات
يوم: 10 جوان 2024
امضاء المترشح (ة):

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات
اللقب: عوسيم
الاسم: الخليل
تاريخ ومكان الميلاد: 7-5-1996 الكاملة
رقم التسجيل:

اسم ولقب وتوقيع الحراس
1. ..... 2. ..... 3. .....

لا بد من ملأ أعلى هذه الوثيقة – ويمنع التوقيع في آخر ورقة الاختبار

اختبار مـــــادة: الرياضيات

الموضوع الأول

e^2 e 1 $\frac{1}{e}$ $\frac{1}{e^2}$
e^2 e 1
e^2 e
e^2

التمرين الأول

① أ- حساب $P(A)$ ، $P(B)$ ، $P(\overline{A})$ ، $P(A \cap B)$ و $P(A \cup B)$:

- $P(A) = 1 - \frac{C_5^2 + C_3^2 + C_3^2}{C_{11}^2} = \frac{39}{55}$
- $P(B) = \frac{C_4^2 + C_3^2 + C_2^2}{C_{11}^2} = \frac{10}{55} = \frac{2}{11}$

$P(A \cap B) = \frac{C_2^1 C_2^1 + C_2^1 C_1^1 + C_1^1 C_1^1}{C_{11}^2} = \frac{7}{55}$ لدينا :

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{42}{55}$ ومنه :

www.dzexams.com

ب/ حساب احتمال سحب كريتان مختلفتان في اللون علما أنهما تحملان نفس العدد :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{7}{55}}{\frac{10}{55}} = \frac{7}{10}$$

(2) أ/ قانون احتمال X :

$X(\Omega) = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$ لدينا :

حيث :

$$p(X=-3) = \frac{C_1^1 C_1^1}{C_{11}^2} = \frac{1}{55} \quad ; \left\{\frac{1}{e^2} \times \frac{1}{e} = e^{-3}\right\}$$

$$p(X=-2) = \frac{C_2^1 \cdot C_1^1}{C_{55}^2} = \frac{2}{55} \quad ; \left\{\frac{1}{e^2} \times 1 = e^{-2}\right\}$$

$$p(X=-1) = \frac{C_1^1 C_3^1 + C_1^1 C_2^1}{C_{55}^2} = \frac{5}{55} \quad ; \left\{\frac{1}{e^2} \times e = \frac{1}{e} \times 1 = e^{-1}\right\}$$

$$p(X=0) = \frac{C_2^2 + C_3^1 C_1^1 + C_4^1 C_1^1}{C_{55}^2} = \frac{8}{55} \quad ; \left\{1 \times 1 = \frac{1}{e^2} \times e^2 = \frac{1}{e} \times e = 1\right\}$$

$$p(X=1) = \frac{C_2^1 C_3^1 + C_4^1 C_1^1}{C_{55}^2} = \frac{10}{55} \quad ; \left\{1 \times e = e^2 \times \frac{1}{e} = e\right\}$$

$$p(X=2) = \frac{C_2^1 C_4^1 + C_3^2}{C_{55}^2} = \frac{11}{55} \quad ; \left\{1 \times e^2 = e \times e = e^2\right\}$$

www.dzexams.com

$$P(X=3)=\frac{C_4^1\cdot C_3^1}{C_{11}^2}=\frac{12}{55} \quad ; \{e^2\times e=e^3\}$$

$$P(X=4)=\frac{C_4^2}{C_{11}^2}=\frac{6}{55} \quad ; \{e^2\times e^2=e^4\}$$

= وحيلة

$X=x_i$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{55}$	$\frac{2}{55}$	$\frac{5}{55}$	$\frac{8}{55}$	$\frac{10}{55}$	$\frac{11}{55}$	$\frac{12}{55}$	$\frac{6}{55}$

ب/

$$P(X^2>4)=P(|X|>2)$$
$$=P(X<-2)+P(X>2)$$
$$=P(X=-3)+P(X=3)+P(X=4)$$
$$=\frac{19}{55}$$

③ حساب P(C) :

نميز 3 حالات :

e^2	e^2	e^2	e^2	e^2	e	e^2	e	e

$$P(C)=\frac{A_1^1A_2^1A_2^1+2A_1^1A_2^1A_2^1+2A_2^1A_1^1A_2^1}{A_{11}^3}=\frac{20}{990}=\frac{2}{99}$$

حساب P(D) :

نميز 4 حالات :

$$\left(\frac{1}{e^2},\frac{1}{e},1\right);\left(\frac{1}{e^2},1,e^2\right);\left(\frac{1}{e},1,e\right);(1,e,e^2);(e,e,e);(e^2,e^2,e^2)$$

$$P(D)=\frac{A_1^1A_1^1A_2^1+A_1^1A_2^1A_4^1+A_1^1A_2^1A_3^1+A_2^1A_3^1A_4^1+A_3^3+A_4^3}{A_{11}^3}=\frac{70}{990}=\frac{7}{99}$$

www.dzexams.com

التمرين الثاني

1) كتابة S_n بدلالة n:

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$، لدينا:

$$S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$$
$$= 2^0 + 2^1 + \dots + 2^n$$
$$= 2^0 \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1}$$
$$= 2^{n+1} - 1$$

2) استنتاج أن $U_n \wedge S_n = 1$:

لدينا: $S_n = 2^{n+1} - 1$

$$S_n = 2^n \times 2 - 1$$
$$2(2)^n - S_n = 1$$
$$2U_n - S_n = 1$$

توجد ثنائية $(u, v) = (2, -1)$ تحقق $uU_n + vS_n = 1$

ومنه حسب مبرهنة بيزو فإن $U_n \wedge S_n = 1$

3) أ- بواقي قسمة U_n على 7:

لدينا:

$$U_0 = 2^0 \equiv 1 [7]$$
$$U_1 = 2^1 \equiv 2 [7]$$
$$U_2 = 2^2 \equiv 4 [7]$$
$$U_3 = 2^3 \equiv 1 [7]$$

www.dzexams.com

ومنه بواقي قسمة u_n على 7 نلخصها في الجدول التالي :

$n=$	3α	$3\alpha+1$	$3\alpha+2$	$\alpha \in \mathbb{N}$
$u_n \equiv$	1	2	4	$[7]$

ب/ نتبين أن A مضاعف 7 :

$$A \equiv (u_{2024} + u_{1962} - S_{1445})^{1954} - 2(6)^{2022} \quad [7]$$

$$\equiv \left(2^{2024} + 2^{1962} - 2^{1445+1} + 1\right)^{1954} - 2(6)^{2022} \quad [7]$$

$$\equiv \left(2^{3\alpha+2} + 2^{3\alpha} - 2^{3\alpha} + 1\right)^{1954} - 2(-1)^{2022} \quad [7]$$

$$\equiv (4 + 1 - 1 + 1)^{1954} - 2 \quad [7]$$

$$\equiv 5^{1954} - 2 \quad [7]$$

$$\equiv (-2)^{1954} - 2 \quad [7]$$

$$\equiv 2^{1954} - 2 \quad [7]$$

$$\equiv 2^{3\alpha+1} - 2 \quad [7]$$

$$\equiv 2 - 2 \quad [7]$$

$$\equiv 0 \quad [7]$$

ومنه : $A \equiv 0 \quad [7]$

ج/ تعيين قيم n التي من أجلها S_{2n} مضاعف 7 :

لدينا : $S_{2n} \equiv 0 \quad [7]$

معناه : $2^{2n+1} - 1 \equiv 0 \quad [7]$

www.dzexams.com

$2^{2n+1} \equiv 1[7]$: ومنه

$2n+1 = 3\alpha$: ومنه حيث $\alpha \in \mathbb{N}^*$

$2n+1 \equiv 0[3]$: ومنه

$2n \equiv 2[3]$: ومنه

$n \equiv 1[3]$: ومنه ($3 \wedge 2 = 1$: لأن)

ومنه $n = 3k+1$ حيث $k \in \mathbb{N}$

③ أ/ تبيين أن $(S_2 - 1; S_1)$ حل لـ (E):

لدينا: $4(S_2 - 1) - 7S_1 = 4(2^{2+2} - 2 - 1) - 7(2^{1+1} - 1)$

$= 4(6) - 7(3)$

$= 3$

ومنه الثنائية $(S_2 - 1; S_1)$ حل لـ (E)

ب/ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E):

لدينا $\begin{cases} 4x - 7y = 3 \\ 4(6) - 7(3) = 3 \end{cases}$

بطرح المعادلتين طرفا لطرف نجد: $4(x-6) - 7(y-3) = 0$

ومنه: $4(x-6) = 7(y-3)$

ومنه: $4 \mid 7(y-3)$ ، $7 \mid 4(x-6)$

لأن: $4 \wedge 7 = 1$

فإنه (حسب خواص) لدينا: $4 \mid y-3$ ، $7 \mid x-6$

ومنه $\begin{cases} x-6 = 7k \\ y-3 = 4k \end{cases}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

www.dzexams.com

ومنه : $\begin{cases} x = 7k+6 \\ y = 4k+3 \end{cases}$

أذن حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حيث :

$(x,y) \in \{(7k+6 ; 3k+3) / k \in \mathbb{Z}\}$

④ نعيين القيم الممكنة لـ D :

لدينا : $D = x \wedge y$

ومنه : $D \mid y$ ، $D \mid x$

ومنه $D \mid 4x - 3y$

ومنه $D \mid 3$

اذن $D \in \{1, 3\}$

④ نعيين قيمة α :

لدينا : $P = \overline{1\alpha\alpha220}^4$

$= 0(4)^0 + 2(4)^1 + 2(4)^2 + \alpha(4)^3 + \alpha(4)^4 + 1(4)^5$

$\equiv 320\alpha + 1064$

لدينا $P - 1 \equiv 0 \ [7]$

معناه : $320\alpha + 1064 - 1 \equiv 0 [7]$

ومنه : $5\alpha + 6 \equiv 0 [7]$

ومنه : $5\alpha \equiv 1 [7]$

ومنه : $15\alpha \equiv 3 [7]$

ومنه $\alpha \equiv 3 [7]$

ومنه : $\alpha = 7k + 3$ حيث $k \in \mathbb{N}$

ولدينا : $0 \leq \alpha < 4$

ومنه : $\alpha = 3$

وعليه : $P = \overline{133220}^4 = 2024$

www.dzexams.com

التمرين الثالث

(I) ① تبيين أن: $|L| = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$

لدينا:

$$|L| = |2+\sqrt{3}+i|$$
$$= \sqrt{(2+\sqrt{3})^2 + (1)^2}$$
$$= \sqrt{4+3+4\sqrt{3}+1}$$
$$= \sqrt{8+4\sqrt{3}}$$
$$= \sqrt{4(2+2\sqrt{3})}$$
$$= 2\sqrt{2+2\sqrt{3}}$$

② الشكل المثلثي: $L = 2\left[1+\cos\frac{\pi}{6}\right] + 2i\sin\frac{\pi}{6}$

لدينا:

$$L = 2+\sqrt{3}+i$$
$$= 2\left[1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right] + 2i\,\frac{1}{2}$$
$$= 2\left[1+\cos\frac{\pi}{6}\right] + 2i\sin\frac{\pi}{6}$$

③ أ/ تبيين أن: $1+\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta$

لدينا:

$$\cos^2\theta = \left[\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right]^2$$
$$= \frac{e^{2\theta i}+e^{-2\theta i}+2}{4}$$
$$= \frac{e^{2\theta i}+e^{-2\theta i}}{4} + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{2\theta i}+e^{-2\theta i}}{2} + 1\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\cos(2\theta)+1\right]$$

ومنه: $\cos^2\theta = \frac{1}{2}[\cos 2\theta + 1]$

ومنه: $1+\cos 2\theta = 2\cos^2\theta$

www.dzexams.com

ب/ تبيين أن : $L = 4\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + 4i\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

$$L = 2\left[1 + \cos\frac{\pi}{6}\right] + 2i\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= 2\left[1 + \cos\left(2\cdot\frac{\pi}{12}\right)\right] + 2i\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{12}\right)$$

$$= 2\left[2\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)\right] + 2i\,2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$= 4\cos^2\frac{\pi}{12} + 4i\cos\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12}$$

ج/ كتابة L على الشكل الأسي :

$$L = 4\cos^2\frac{\pi}{12} + 4i\cos\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12}$$

$$= 4\cos\frac{\pi}{12}\left[\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right]$$

$$= 4\cos\frac{\pi}{12}\,e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$= 2\sqrt{2+\sqrt{3}}\,e^{i\frac{\pi}{12}}$$

1/ تبيين أن : $L^6 = (8+4\sqrt{3})^3 i$

لدينا :

$$L^6 = \left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\,e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^6$$

$$= \left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^6 e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2\right]^3 i$$

$$= \left[4(2+\sqrt{3})\right]^3 i$$

$$= (8+4\sqrt{3})^3 i$$

II ① لدينا : $h : z' - \omega = 2(z - \omega)$

ومنه : $d - \omega = 2(L - \omega)$

ومنه :

www.dzexams.com

$$d = 2(L - \omega) + \omega$$
$$= 2(2+\sqrt{3}+i-\sqrt{3}) + \sqrt{3}$$
$$= 2(2+i) + \sqrt{3}$$
$$= 4 + \sqrt{3} + 2i$$

② تحديد طبيعة (Γ) :

لدينا :
$$\frac{|\bar{z} - 4 - \sqrt{3} + 2i|}{|\bar{z} - 4 - \sqrt{3} + 2i|} = |L|$$
$$|z - 4 - \sqrt{3} - 2i| = |L|$$
$$|z - (4 + \sqrt{3} + 2i)| = |L|$$
$$|z - d| = |L|$$
$$DM = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

ومنه (Γ) هي الدائرة التي مركزها D ونصف قطرها $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$

التمرين الرابع

I) ① حساب f'_α :

لدينا f_α قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث :

$$f'_\alpha(x) = 2e^{2x} - 2\alpha e^x$$
$$= (e^x - \alpha)2e^x$$

* لتعيين اتجاه تغير f_α :

لدينا : $2e^x > 0$

ولدينا : $e^x - \alpha = 0$ معناه $e^x = \alpha$

* إذا : $\alpha \leq 0$ معناه : $x = \ln\alpha$ (وهذا مستحيل)

ومنه لا توجد أي قيمة حدية لـ f_α إذا $\alpha \leq 0$

* إذا : $\alpha > 0$ معناه $x = \ln\alpha$

إذن f_α تقبل قيمة حدية حين $x = \ln\alpha$.

www.dzexams.com

② أ/ تعيين أحداثيتي Ω_α :

لما $\alpha > 0$ لدينا :

$$f_\alpha(\ln\alpha) = e^{2\ln\alpha} - 2\alpha e^{\ln\alpha} + 3$$
$$= e^{\ln\alpha^2} - 2\alpha\alpha + 3$$
$$= \alpha^2 - 2\alpha^2 + 3 = 3 - \alpha^2$$

ومنه :

$$\Omega_\alpha(\ln\alpha ; 3-\alpha^2)$$

ب/ تعيين مجموعة النقط Ω_α لما $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$:

لدينا : $\Omega_\alpha(\ln\alpha ; 3-\alpha^2)$

لدينا : $\begin{cases} x = \ln\alpha \\ y = 3-\alpha^2 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} \alpha = e^x \\ y = 3-(e^x)^2 \end{cases}$

ومنه $y = 3 - e^{2x}$

إذن مجموعة النقط Ω_α لما $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

هي منحنى الدالة $x \mapsto 3 - e^{2x}$

II ① أ/ تعيين المستقيمات المقاربة لـ (C_1) :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(e^{2x} - 2e^x + 3)$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[e^x(e^x - 2) + 3\right] = +\infty$$

لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left((e^x)^2 - 2e^x + 3\right) = 3$

لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

www.dzexams.com

ومنه (C_1) يقبل مقارب معادلته $y=3$

ب/ تغيرات f_1:

لدينا: $f_1'(x)=(e^x-1)2e^x$

بما أن $2>0$

فإن (C_1) يقبل مماسا وحيدا عند $\Omega_1(\ln(1);3-1^2)$

أي عند: $\Omega_1(0;2)$

وعليه:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_1'(x)$	$-$	0	$+$

لدينا f_1 متزايدة تماما على $]0,+\infty[$

ومتناقصة تماما على $]-\infty,0[$

جدول تغيرات f_1:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_1'(x)$	$-$	0	$+$
$f_1(x)$	3 ↘	2	↗ $+\infty$

② معادلة المماس (T)

لدينا: $f_1(x)=3$

معناه $e^{2x}-2e^x+3=3$

ومنه: $e^x(e^x-2)=0$

ومنه: $e^x-2=0$ (لأن $e^x\neq 0$)

ومنه: $e^x=2$

ومنه $x=\ln 2$

ومنه (T) مماس لـ (C_1) في النقطة $A(\ln 2,3)$

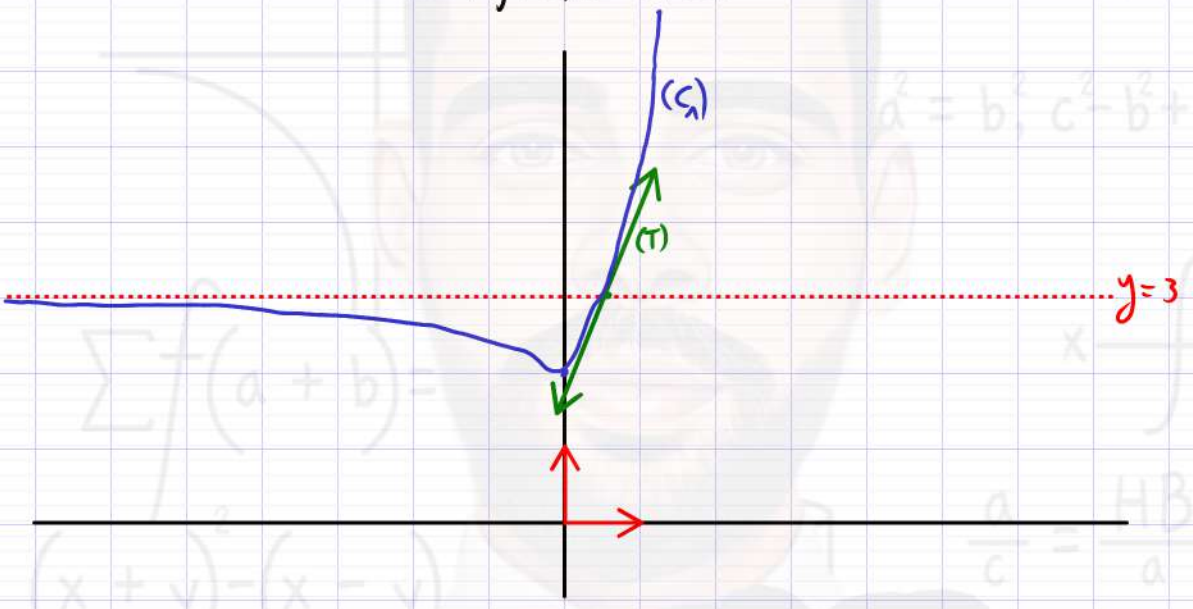
www.dzexams.com

اذن :

$$(T): y = f_1'(\ln 2)(x - \ln 2) + f_1(\ln 2)$$
$$= 4(x - \ln 2) + 3$$
$$= 4x - \ln 4 + 3$$

③ رسم (C_1) و (T)

لدينا : $\begin{cases} f(1) \approx 4{,}95 \\ f(2) \approx 42{,}82 \end{cases}$



④ p/ تبيين أن (Δ_m) تشمل نقطة ثابتة .

لدينا $(\Delta_m): y = mx + 3 - m\ln 2$

ومنه : $mx + 3 - m\ln 2 - y = 0$

ومنه : $(x - \ln 2)m + 3 - y = 0$

ومنه : $\begin{cases} x - \ln 2 = 0 \\ 3 - y = 0 \end{cases}$

ومنه : $\begin{cases} x = \ln 2 \\ y = 3 \end{cases}$

اذن جميع المستقيمات (Δ_m) تمر حول $A(\ln 2; 3)$

www.dzexams.com

ب/ المناقشة البيانية :

لدينا : $e^x(e^x-2)=m(x-\ln 2)$

ومنه : $e^{2x}-2e^x+3=mx-m\ln 2+3$

ومنه : $f_1(x)=y(\Delta_m)$ .... (E)

وعليه حلول (E) هي فواصل نقط تقاطع (C_1) مع المستقيمات (Δ_m)

وهي :

- لما $m\leq 0$: المعادلة (E) حل وحيد
- لما $0<m<4$: المعادلة (E) حلان
- لما $m=4$: المعادلة (E) حل وحيد (مضاعف)
- لما $m>4$: المعادلة (E) حلان.

III) ① كتابة $g(x)$ بدلالة $f_1(x)$:

من أجل كل $x\in\mathbb{R}$، لدينا :

$$g(x)=-e^{2x}+2e^x+3$$
$$=-(e^{2x}-2e^x+3)+6$$
$$=-f_1(x)+6$$

ومنه $g(x)=6-f_1(x)$

تذكير

(C_f) و (C_g) متناظران بالنسبة للمستقيم ذو المعادلة $y=a$ معناه : $f(x)+g(x)=2a$

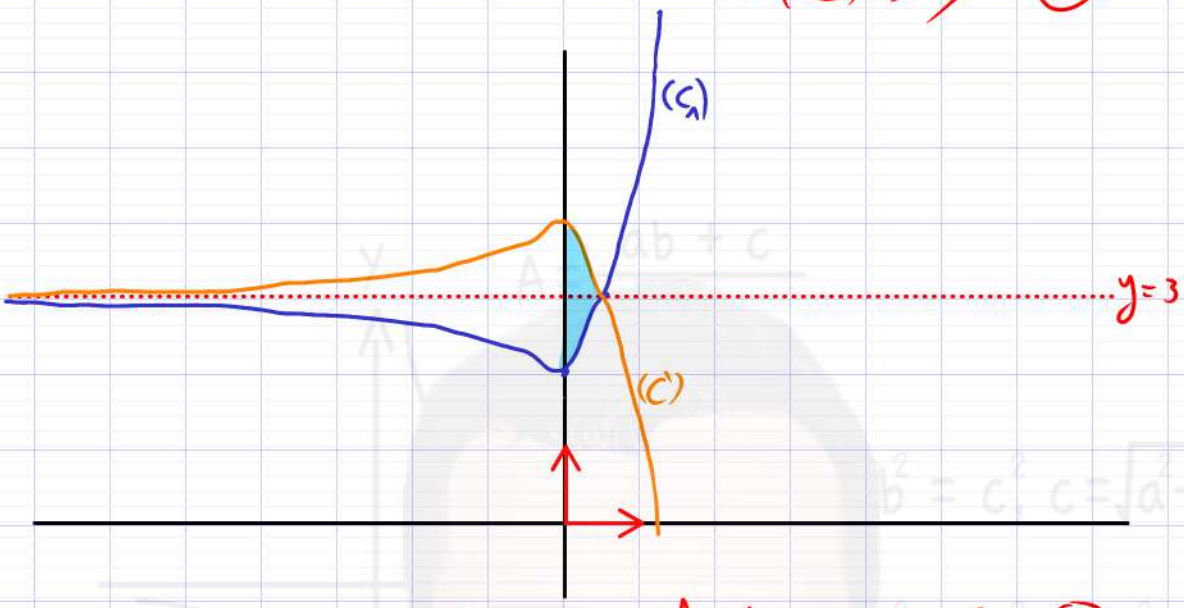
لدينا $g(x)=-f_1(x)+6$

ومنه : $g(x)+f_1(x)=2(3)$

ومنه (C_1) و (C') متناظران بالنسبة للمستقيم ذو المعادلة $y=3$

www.dzexams.com

② رسم $(\mathcal{C}')$:



③ تبيين أن $A=1$:

$$A=\int_0^{\ln 2}\left(g(x)-f_1(x)\right)dx$$

$$=\int_0^{\ln 2}\left(-e^{2x}+2e^{x}+3-e^{2x}+2e^{x}-3\right)dx$$

$$=\int_0^{\ln 2}\left(-2e^{2x}+4e^{x}\right)dx$$

$$=\left.-e^{2x}+4e^{x}\right|_0^{\ln 2}$$

$$=-e^{2\ln 2}+4e^{\ln 2}+e^{2(0)}-4e^{0}$$

$$=-4+8+1-4=\boxed{1\ u.a}$$

﴿بالتوفيق والنجاح لجموع التلاميذ الشرفاء﴾

www.dzexams.com

الموضوع الثاني

التمرين الأول

① دراسة بواقي قسمة 4^n على 13 :

لدينا :

$4^0 \equiv 1 [13]$

$4^1 \equiv 4 [13]$

$4^2 \equiv 3 [13]$

$4^3 \equiv 4^2 \times 4 [13] \equiv 12 [13]$

$4^4 \equiv 4^3 \times 4 [13] \equiv 9 [13]$

$4^5 \equiv 4^4 \times 4 [13] \equiv 10 [13]$

$4^6 \equiv 4^5 \times 4 [13] \equiv 1 [13]$

ومنه بواقي قسمة 4^n على 13 نلخصها في الجدول التالي

$n =$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	$k \in \mathbb{N}$
$4^n \equiv$	1	4	3	12	9	10	$[13]$

② تعيين قيم n حيث (E_n) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$:

لدينا :

$286 = 247(1) + 39$

$247 = 39(6) + 13$

$39 = 13(3) + 0$

ومنه $PGCD(286 ; 247) = 13$

المعادلة (E_n) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$

معناه $13 \mid 4^n - 25$

ومنه $4^n - 25 = 13k$; $k \in \mathbb{N}$

www.dzexams.com

$4^n - 25 \equiv 0 [13]$ ومنه،

$4^n \equiv 25 [13]$ ومنه،

$4^n \equiv 12 [13]$ ومنه،

$n = 6k + 3$ حيث $k \in \mathbb{N}$ ومنه،

(3)

1/ نتبين أن (E_3) تكافئ (E'):

لدينا: $(E_3): 286x - 247y = 39$

ومنه: $(E'): 22x - 19y = 3$

إذن $(E') \Leftrightarrow (E_3)$

- حل المعادلة (E'):

نلاحظ أن $(1,1)$ حل خاص لـ (E')

ومنه:

$$\begin{cases} 22x - 19y = 3 \\ 22(1) - 19(1) = 3 \end{cases}$$

بالطرح نجد: $22(x-1) = 19(y-1)$

ومنه: $22 \mid 19(y-1)$ و $19 \mid 22(x-1)$

بما أن $22 \wedge 19 = 1$

فإن (حسب غوص):

$22 \mid y-1$ و $19 \mid x-1$

ومنه: $y - 1 = 22k$ و $x - 1 = 19k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

ومنه: $y = 22k + 1$ و $x = 19k + 1$

إذن حلول (E') هي الثنائيات (x,y) من $\mathbb{Z}^2$ حيث:

$$(x,y) \in \{(19k+1 ; 22k+1)\}$$

www.dzexams.com

ب/ تعيين القيم الممكنة لـ $PGCD(n,y)$:

ليكن $d = n \wedge y$

لدينا - d/n و d/y

ومنه : $d/22n - 19y$

ومنه $d/3$

ومنه $d \in D_3$

ومنه - $d \in \{-3; -1; 1; 3\}$

ج/ تعيين الثنائيات (n,y) حلول (E) حيث $n \wedge y = 3$:

لدينا : $n \wedge y = 3$

ومنه : $\begin{cases} n \equiv 0 [3] \\ y \equiv 0 [3] \end{cases}$

ومنه : $\begin{cases} 19k+1 \equiv 0 [3] \\ 22k+1 \equiv 0 [3] \end{cases}$

ومنه $\begin{cases} k+1 \equiv 0 [3] \\ k+1 \equiv 0 [3] \end{cases}$

ومنه - $k+1 \equiv 0 [3]$

أي $k \equiv 2 [3]$

أي $k = 3k' + 2$ مع $k' \in \mathbb{Z}$

www.dzexams.com

لدينا $\begin{cases} x = 19k+1 \\ y = 22k+1 \end{cases}$

وعليه: $\begin{cases} x = 57k'+39 \\ y = 66k'+45 \end{cases}$ و $k' \in \mathbb{Z}$

د/ تعيين الثنائيات (x,y) حلول (E) حيث $|2x-y|<17$

لدينا: $|2x-y|<17$

معناه: $|2(19k+1)-(22k+1)|<17$

ومنه: $|16k+1|<17$

ومنه: $-17<16k+1<17$

ومنه: $-18<16k<16$

ومنه: $-1,1<k<1$

ومنه: $k \in \{-1;0\}$

أي:

$(x,y) \in \{(-18,-21);(1,1)\}$

التمرين الثاني

I) 1/ كتابة a على الشكل الجبري:

لدينا: $\begin{cases} \alpha+\overline{\alpha} = 2\sqrt{2+\sqrt{2}} \\ \alpha+\overline{\alpha} = 2Re(\alpha) \end{cases}$

وعليه: $2Re(\alpha) = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}$

ومنه: $Re(\alpha) = \sqrt{2+\sqrt{2}}$

www.dzexams.com

ولدينا:

$$\begin{cases} \alpha\bar{\alpha} = 4 \\ \alpha\bar{\alpha} = Re^2(\alpha) + Im^2(\alpha) \end{cases}$$

ومنه $Re^2(\alpha) + Im^2(\alpha) = 4$

ومنه $2+\sqrt{2} + Im^2(\alpha) = 4$

ومنه $Im^2(\alpha) = 2-\sqrt{2}$

ومنه $Im(\alpha) = \sqrt{2-\sqrt{2}}$ أو $Im(\alpha) = -\sqrt{2-\sqrt{2}}$

لكن $Im(\alpha) > 0$

إذن $Im(\alpha) = \sqrt{2-\sqrt{2}}$

ولدينا $\begin{cases} Re(\alpha) = \sqrt{2+\sqrt{2}} \\ Im(\alpha) = \sqrt{2-\sqrt{2}} \end{cases}$

إذن: $\alpha = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$

ب/ كتابة α^2 على الشكل الأسي:

ولدينا $\alpha = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$

ومنه

$$\alpha^2 = 2+\sqrt{2} - (2-\sqrt{2}) + 2i\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}$$

$$= 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{4-2}$$

$$= 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$$

$$= 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$= 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 4e^{i\frac{\pi}{4}}$$

www.dzexams.com

2) أ/ تبيان أن $\alpha = 2e^{i\frac{\pi}{8}}$

لدينا : $|\alpha^2| = 4$

ومنه : $|\alpha| = 2$

ولدينا : $\arg(\alpha^2) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

ومنه : $2\arg(\alpha) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$\arg(\alpha) = \frac{\pi}{8} + k\pi$

نضع : $k = 2k'$ $(k' \in \mathbb{Z})$ ومنه :

$\arg(\alpha) = \frac{\pi}{8} + 2k'\pi$ فإن

ونضع : $k = 2k' + 1$ $(k' \in \mathbb{Z})$ ومنه :

$\arg(\alpha) = \frac{\pi}{8} + \pi + 2k'\pi$ فإن

بما أن : $\begin{cases} Re(\alpha) > 0 \\ Im(\alpha) > 0 \end{cases}$

فإن : $\arg(\alpha) = \frac{\pi}{8} + 2k'\pi$

إذن : $\alpha = 2e^{i\frac{\pi}{8}}$

ب/ استنتاج القيمة المضبوطة لـ $\tan(\frac{\pi}{8})$:

لدينا : $\alpha = 2e^{i\frac{\pi}{8}}$

$= 2\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$

$= \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$

ومنه : $\begin{cases} 2\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{2+\sqrt{2}} \\ 2\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{2-\sqrt{2}} \end{cases}$

www.dzexams.com

$$\begin{cases} \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ \sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{8}} \end{cases}$$: إذن

وعليه :

$$\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

II) ① تعيين قيم n حيث L_{4n} حقيقي صرف.

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ لدينا : $L_{4n} \in \mathbb{C}-\mathbb{R}$

معناه $\arg(\alpha^{4n}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

ومنه $4n \cdot \arg(\alpha) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

أي $4n\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + k\pi$

أي $n = 2k+1$

② 1/ تعيين (H_n) حسابية :

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ لدينا :

$$\begin{aligned} H_{n+1} &= \arg(L_{n+1}) \\ &= \arg(\alpha^{n+2}) \\ &= \arg(\alpha^n \cdot \alpha) \\ &= \arg(\alpha^n) + \arg(\alpha) \\ &= \arg(L_n) + \frac{\pi}{8} \\ &= H_n + \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

www.dzexams.com

لذن (U_n) حسابية أساسها $r = \frac{\pi}{8}$ وحدها الأول U_0 حيث

$$U_0 = \overline{\arg} L_0$$
$$= \arg(L^0)$$
$$= \arg(1)$$
$$= 0$$

ب/ كتابة U_n بدلالة n:

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ لدينا:

$$U_n = U_0 + nr$$
$$= \frac{n\pi}{8}$$

ج/ حساب بدلالة n المجموع S_n:

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ لدينا:

$$S_n = \arg(\overline{L_0} \times \overline{L_1} \times \dots \times \overline{L_n})$$

$$= \arg(\overline{L_0 \times L_1 \times \dots \times L_n})$$

$$= -\arg(L_0 \times L_1 \times \dots \times L_n)$$

$$= -[\arg(L_0) + \arg(L_1) + \dots + \arg(L_n)]$$

$$= -[U_0 + U_1 + \dots + U_n]$$

$$= -\frac{1}{2}(n+1)(U_0 + U_n)$$

$$= -\frac{1}{2}(n+1)\arg(L_n)$$

www.dzexams.com

$$= -\frac{1}{2}(n+1)\,n\frac{\pi}{8}$$

$$= \frac{-n\pi(n+1)}{16}$$

③ أ/ تعيين (E_1) :

من أجل كل $\theta \in \mathbb{R}$ ، لدينا :

$z = L_1(L_2 - e^{i\theta})$ ، معناه

$z = L_1 L_2 - L_1 e^{i\theta}$ ، معناه

$z = L_3 - \alpha e^{i\theta}$ ، معناه

$z = L_3 + \alpha e^{i\pi} e^{i\theta}$ ، معناه

$z - L_3 = 2e^{i\frac{\pi}{8}} e^{i\pi} e^{i\theta}$ ، معناه

$z - L_3 = 2e^{i(\frac{9\pi}{8}+\theta)}$ ، معناه

ومنه :

$$\begin{cases} MB = 2 \\ (\vec{u}; \overrightarrow{MB}) = \frac{9\pi}{8} + \theta + 2k\pi \end{cases}$$

$\theta \in \mathbb{R}$ ، $k \in \mathbb{Z}$ مع

إذن (E_1) هي الدائرة التي

- مركزها النقطة β
- نصف قطرها 2

ب/ تعيين (E_2) :

لدينا : $\arg\left[(iz + i\overline{L_2})^2\right] = \frac{3\pi}{4} + 4k\pi$

www.dzexams.com

$$2\arg[(iz-iz_2)] = \frac{5\pi}{4} + 4k\pi \quad \text{معناه}$$

$$\arg[i(z-z_2)] = \frac{3\pi}{8} + 2k\pi \quad \text{ومنه}$$

$$\arg(i) + \arg(z-z_2) = \frac{3\pi}{8} + 2k\pi \quad \text{ومنه}$$

$$\frac{\pi}{2} + \arg(z-z_2) = \frac{3\pi}{8} + 2k\pi \quad \text{ومنه}$$

$$\arg(z-z_2) = -\frac{\pi}{8} + 2k\pi \quad \text{ومنه}$$

$$(\vec{u}, \vec{uA}) = -\frac{\pi}{8} + 2k\pi \quad \text{وعليه}$$

أي (E_2) هي نصف المستقيم الذي مبدؤه النقطة A وقياسه $\tan(-\frac{\pi}{8})$

التمرين الثالث

① إثبات أن: $P_k = \frac{k}{21}$

لدينا: $\sum_{i=1}^{6} P_i = 1$

ومنه: $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 1$

لدينا: الأعداد P_1، P_2، P_3، P_4، P_5 و P_6 تشكل بهذا الترتيب متتالية حسابية أساسها r

معناه: $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = \frac{6}{2}(P_1 + P_6)$

وعليه: $\frac{6}{2}(P_1 + P_6) = 1$

www.dzexams.com

$$(I) \dots\dots P_1 + P_6 = \frac{1}{3}$$ ومنه =

ولدينا: الأعداد P_1 ، P_2 و P_4 تشكل بهذا الترتيب متتالية هندسية أساسها q

معناه: $$(II) \dots\dots P_1 \cdot P_4 = P_2^2$$

ولدينا $P_2 = P_1 + r$ ومنه $P_1 = P_2 - r$

ولدينا $$\begin{cases} P_4 = P_2 + 2r \\ P_6 = P_2 + 4r \end{cases}$$

نعوض P_1 و P_6 في (I) نجد: $P_2 + 2r + P_2 + 4r = \frac{1}{3}$

ومنه $$(III) \dots\dots 2P_2 + 6r = \frac{1}{3}$$

نعوض قيمة P_1 و P_4 في (II) نجد: $(P_2 - r)(P_2 + 2r) = P_2^2$

ومنه: $rP_2 - 2r^2 = 0$

ومنه: $r(P_2 - 2r) = 0$

ومنه: $P_2 - 2r = 0$ $(r \neq 0)$

ومنه $P_2 = 2r$

نعوض قيمة P_2 في (III) نجد: $2(2r) + 6r = \frac{1}{2}$

ومنه $P_2 = \frac{2}{21}$ و $r = \frac{1}{21}$

إذن: $P_1 = P_2 - r$

www.dzexams.com

تكافئ: $P_1 = \frac{1}{21}$

إذن من أجل كل $1 \leq k \leq 6$ لدينا $P_k = \frac{k}{21}$

② أ/ حساب $P(A)$ ، $P(B)$ و $P(C)$:

من أجل كل $1 \leq k \leq 6$ لدينا:

k	1	2	3	4	5	6
P_k	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

ومنه:

- $P(A) = P_2 + P_4 + P_6 = \frac{2+4+6}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$
- $P(B) = 1 - (P_1 + P_2) = 1 - \frac{1+2}{21} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$
- $P(C) = P_3 + P_4 = \frac{3+4}{21} = \frac{1}{3}$

ب/ حساب احتمال الحصول على عددٍ أكبر من أو يساوي 3 علما أنّه زوجي:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{4+6}{21}}{\frac{12}{21}} = \frac{5}{6}$$

ج/ تبيين أنّ A و B مستقلتان:

لدينا:

- $P(A) \cdot P(B) = \frac{24}{49}$

www.dzexams.com

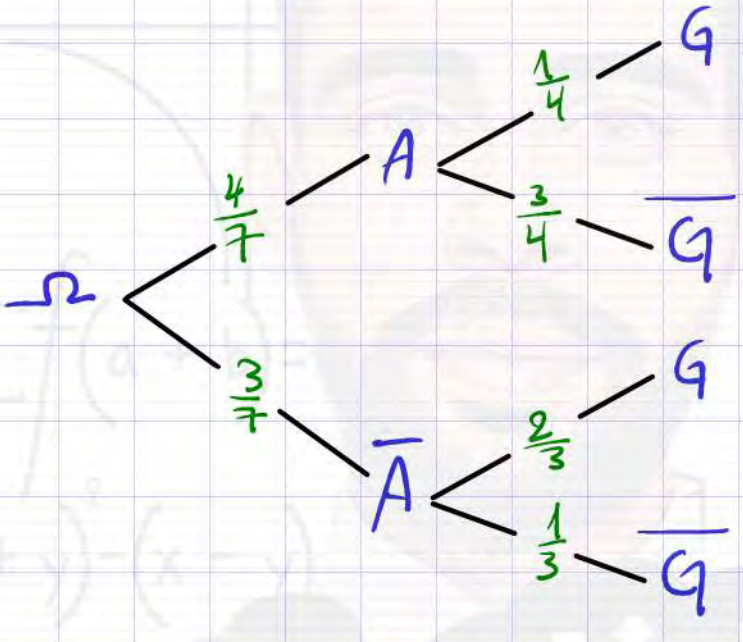
• $P(A \cap B) = P_4 + P_6 = \frac{4+6}{21} = \frac{10}{21}$

$P(A) \cdot P(B \neq P(A \cap B)$ بما أن

فإن A و B غير مستقلتان.

③ أ/ نعين $P(A \cap G)$

لتمثيل هذه التجربة بشجرة الاحتمالات:



ومنه $P(A \cap G) = \frac{4}{7} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{7}$

ب/ حساب $P(G)$:

$P(G) = P(A \cap G) + P(\overline{A} \cap G)$

$= \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{7}$

www.dzexams.com

التمرين الرابع

(I

① حساب نهايات الدالة h_n:

- $\lim\limits_{x \to 0} h_n(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x^2 - n + n \ln x)$

$= -\infty$

لأن: $\begin{cases} n \geq 1 \\ \lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty \end{cases}$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} h_n(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - n + n \ln x)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + n \ln x)$

$= +\infty$

لأن: $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

ب/ تغيرات الدالة h_n:

لما h_n قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ حيث:

$h'_n(x) = 2x + \frac{n}{x}$

$= \frac{2x^2 + n}{x}$

www.dzexams.com

لدينا: $x>0$ تكافئ $D_g = \mathbb{R}_+^*$

ولدينا: $2x^2+n>0$ تكافئ $n \geq 1$

إذن $h'_n(x)>0$

ومنه h_n متزايدة تماما على $]0,+\infty[$.

x	0		$+\infty$
$h'_n(x)$	‖	$+$	
$h_n(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

② أ/ تبيين أن $h_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α_n:

لدينا h_n مستمرة ومتزايدة تماما على $I=]0,+\infty[$

ولدينا: $[1,e[\subset I$

ولدينا: $\begin{cases} h_n(1) \approx 1-n \leq 0 \\ h_n(e) \approx e^2 > 0 \end{cases}$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة $h_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α_n حيث $1 \leq \alpha_n < e$

ب/ استنتاج إشارة $h_n(x)$:

x	0		α_n		$+\infty$
$h_n(x)$	‖	$-$	0	$+$	

www.dzexams.com

$$f_n(x) = x - n - \frac{n \ln x}{x}$$ (II

• $\lim_{x \to 0} f_n(x) = +\infty$ ①

لأن: $\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$

التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مقارب معادلته $x = 0$

• $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$

لأن: $\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} (x - n) = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$

② أ/ تبيين أن (Δ_n) مقارب مائل لـ (C_n)

لدينا:

$$\lim_{x \to +\infty} [f_n(x) - y_{\Delta_n}] = \lim_{x \to +\infty} \left[-\frac{n \ln x}{x} \right] = 0$$

لأن:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

ب/ دراسة وضعية (C_n) بالنسبة إلى (Δ_n):

من أجل كل $x > 0$ و $n \geq 1$ ، لدينا:

$$f_n(x) - (x - n) = -\frac{n \ln x}{x}$$

www.dzexams.com

لدينا $x > 0$

ولدينا $-n\ln x = 0$

$x = 1$

معناه:

وعليه:

x	0		1		$+\infty$
$f_n(x)-y_{(\Delta)}$	‖	$+$	ϕ	$-$	

- (C_n) فوق (Δ_n) ⟵ $0 < x < 1$
- (C_n) تحت (Δ_n) ⟵ $x > 1$
- (C_n) يقطع (Δ_n) في $A_n(1, 1-n)$

③ 1/ تبيين أن: $f_n'(x) = \dfrac{h_n(x)}{x^2}$

لدينا f_n قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ حيث:

$$f_n'(x) = 1 - \frac{\frac{n}{x}\cdot x - n\ln x}{x^2}$$

$$= \frac{x^2 - n - n\ln x}{x^2}$$

$$= \frac{h_n(x)}{x^2}$$

www.dzexams.com

ب/ استاج اتجاه تغير f_n :

لدينا $f'_n(x) = \frac{f_{n'}(x)}{x^2}$

من أجل $x^2 > 0$

فإن :

x	0	α_n	$+\infty$
$f'_n(x)$	‖	$-$ 0	$+$

$f_n(x)$ متزايدة تماما على $]\alpha_n ; +\infty[$

ومتناقصة تماما على $]0 ; \alpha_n[$

x	0	α_n	$+\infty$
$f'_n(x)$	‖	$-$ 0	$+$
$f_n(x)$	$+\infty$ ‖	$\searrow$ $f_n(\alpha_n)$	$\nearrow$ $+\infty$

4) الحصر $f_n(\alpha_n) = 2\alpha_n - n - \frac{n}{\alpha_n}$

$f_n(\alpha_n) = 0$ ، $n > 1$ من أجل كل $n > 0$ لدينا

ومنه $\alpha_n^2 - n + n \ln \alpha_n = 0$

ومنه $\ln \alpha_n = \frac{n - \alpha_n^2}{n}$:

www.dzexams.com

$$f_\alpha(\alpha_n) = \alpha_n - n - \frac{n \ln \alpha_n}{\alpha_n}$$ ومنه :

$$= \alpha_n - n - \frac{n\left(\frac{n-\alpha_n^2}{n}\right)}{\alpha_n}$$

$$= \alpha_n - n - \frac{n-\alpha_n^2}{\alpha_n}$$

$$= \alpha_n - n - \frac{n}{\alpha_n} + \alpha_n$$

$$= 2\alpha_n - n - \frac{n}{\alpha_n}$$

ج) تبين أنه يوجد مماس يوازي (Δ_n) :

لدينا $(\Delta_n) \parallel (T_n)$

معناه يوجد عدد حقيقي a يحقق $f'_n(a) = 1$

$$\frac{a^2 - n + n\ln a}{a^2} = 1$$ ، ومنه

$$a^2 - n + n\ln a = a^2$$ ، ومنه

$$n\ln a = n$$ ، ومنه

$$\ln a = 1$$ ، ومنه

$$a = e$$ ومنه

www.dzexams.com

ومنه يوجد مماس لـ (C_n) يوازي (Δ) معادلته:

$$(T_n): y = f_n'(e)(x-e) + f_n(e)$$

$$= x - e + e - n - \frac{n}{e}$$

$$= x - \left(n + \frac{n}{e}\right)$$

ج 1/ التحقق أن $t=1$ حل الوحيد للمعادلة:

من أجل كل $t>0$ لدينا:

$$1 - t = 2\ln t$$

$$1 - t - 2\ln t = 0$$ تكافئ

نضع $\varphi(t) = 1 - t - 2\ln t$

لدينا φ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ حيث:

$$\varphi'(t) = -1 - \frac{2}{t} = -\frac{t+2}{t}$$

لدينا $t>0$ ، ولدينا $-(t+2)=0$ هما $t=-2$

ولدينا $\varphi(1)=0$

t	0	1	$+\infty$
$\varphi'(t)$	‖	$-$	
$\varphi(t)$	‖ $+\infty$	0 ↘	$-\infty$

www.dzexams.com

$1-t=2\ln t$ أذن $t=1$ حل للمعادلة

ب/ نبين أنه يوجد مماس وحيد (C_n) يشمل مبدأ المعلم:

(D_n) مماس لـ (C_n) يشمل مبدأ المعلم

معناه يوجد عدد حقيقي b حيث:

$$f_n'(b)(0-b)+f_n(b)=0$$

$$\frac{b^2-n+n\ln b}{b^2}(-b)+b-n-\frac{n\ln b}{b}=0$$ ومنه

$$\frac{-(b^2-n+n\ln b)+b^2-nb-n\ln b}{b}=0$$ ومنه

$$-b^2+n-n\ln b+b^2-nb-n\ln b=0$$ ومنه

$$n-nb-2n\ln b=0$$ ومنه

$$n(1-b-2\ln b)=0$$ ومنه

$$1-b-2\ln b=0$$ ومنه

$$v(b)=0$$ ومنه

$$b=1$$ ومنه

أذن يوجد مماس وحيد لـ (C_n) يشمل

www.dzexams.com

صيغة الحصر لمعادلة :

$$(D_n): y = f_n'(1)(x-1) + f_n(1)$$

$$= (1-n)(x-1) + 1-n$$

$$= (1-n)x$$

(III

$$g(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$$

1) تغيرات الدالة g :

من أجل $x \in \mathbb{R}_+^*$ لدينا الدالة g قابلة للاشتقاق و

$$g'(x) = f'_{(n+1)}(x) - f_n'(x)$$

$$= \frac{h_{(n+1)}(x) - h_n(x)}{x^2}$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(x^2 - (n+1) + (n+1)\ln x - x^2 + n - n\ln x\right)$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(-n - 1 + n\ln x + \ln x + n - n\ln x\right)$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(-1 + \ln x\right)$$

$x^2 > 0$ لدينا

www.dzexams.com

ولدينا : $-1+\ln x = 0$

معناه : $x = e$

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	ϕ	$+$	

اذن :

وعليه g متزايدة تماما على $]e;+\infty[$

ومتناقصة تماما على $]0;e[$

② تبيان أن $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β :

لدينا g مستمرة ومتناقصة تماما على $]0;e[$

ولدينا $]0,5;0,6[\subset]0;e[$

ولدينا $\begin{cases} g(0,6) \approx -0,14 \\ g(0,5) \approx 0,38 \end{cases}$

اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β حيث $0,5 < \beta < 0,6$

③ الوضع النسبي بين (C_n) و (C_{n+1})

من أجل كل $x>0$ ، $n \geq 1$ لدينا -

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = g(x)$$

وعليه :

- (C_{n+1}) فوق (C_n) $\longleftarrow$ $0 < x < 1$
- (C_{n+1}) تحت (C_n) $\longleftarrow$ $x > 1$
- (C_{n+1}) يقطع (C_n) في $B_n\left(e, e-n-\frac{n}{e}\right)$

www.dzexams.com

④ تبيان أن: $f_n(\beta)=\beta$

من أجل كل $x>0$ لدينا:

$$g(x)=f_{(n+1)}(x)-f_n(x)$$

$$=x-(n+1)-\frac{(n+1)\ln x}{x}-x+n+\frac{n\ln x}{x}$$

$$=-1-\frac{\ln x}{x}$$

$$=-\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)$$

من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ لدينا $g(\beta)=0$

$$-\left(1+\frac{\ln\beta}{\beta}\right)=0 \quad \text{ومنه}$$

$$\frac{\ln\beta}{\beta}=-1 \quad \text{ومنه}$$

$$\ln\beta=-\beta \quad \text{ومنه}$$

وبالتالي: $f_n(\beta)=\beta-n+\frac{n\beta}{\beta}$

$$=\beta-n+n$$

$$=\beta$$

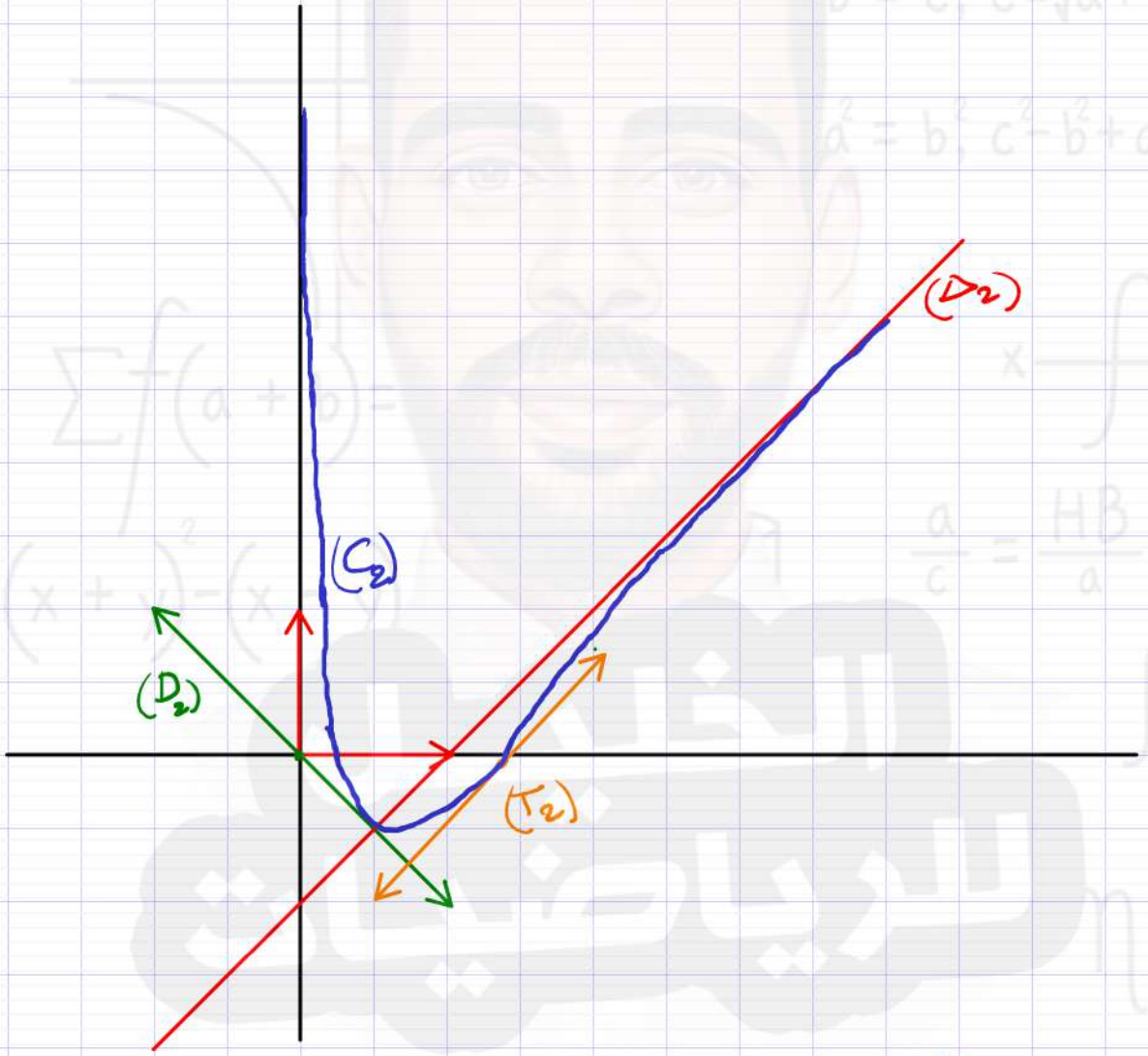
www.dzexams.com

(IV

① رسم (C_2):

من أجل $n=2$ لدينا:

$$\begin{cases} (T_2): y = x - 2\left(1+\frac{1}{e}\right) \\ (\Delta_2): y = x - 2 \\ (D_2): y = -x \end{cases}$$



② المناقشة البيانية:

حلول المعادلة $f_2(x) = mx$ هي فواصل نقط تقاطع

(C_2) مع المستقيمات ذات المعادلة $y = mx$

www.dzexams.com

لدينا $y = mx$

ومنه $mx - y = 0$

ومنه $\begin{cases} x = 0 \\ -y = 0 \end{cases}$

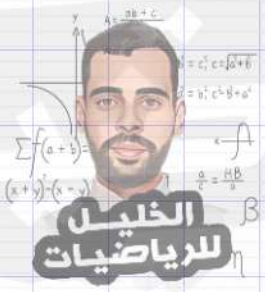
ومنه $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

اذن المستقيمات ذات المعادلة $y = mx$

تدور حول مبدأ المعلم.

ونجد أنه لما: $-1 < m < -2\left(1+\frac{1}{e}\right)$

المعادلة تقبل حلين متمايزين



﴿بالتوفيق والنجاح لجموع التلاميذ الشرفاء﴾

www.dzexams.com