الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية
مديرية التربية لولاية جيجل
ثانويات المقاطعة الأولى -جيجل

رابط الإجابة المفصّلة

إمتحان البكالوريا التجريبي
دورة: مـــــــاي 2025م
الشعبة: ريـــــــاضـــيات

اختبار في مادة: الرياضيات — **المدة: 04 سا و30 د**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأوّل:

التمرين الأول: (05 نقاط)

يحتوي صندوق 6 كريات بيضاء و 3 كريات سوداء، لا نفرق بينها عند اللمس. **(تُعطى النتائج على شكل كسر غير قابل للإختزال)**

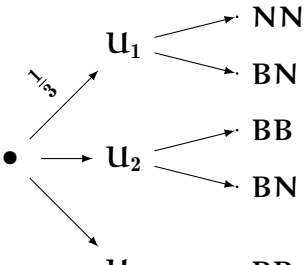
I/ نسحب عشوائيا من الصندوق ثلاث كريات على التوالي دون إرجاع، وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة.

1/ عيّن قيم المتغير العشوائي X ، ثم عرّف قانون احتماله.

2/ أحسب $E(X)$ الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X ثم استنتج $E(-40X+2025)$.

II/ نوزع الكريات التسع على ثلاثة أكياس غير شفافة U_1 ، U_2 و U_3 كما يلي:
كرية بيضاء وكريتين سوداوين للكيس U_1 ، كرية سوداء وكريتين بيضاوين للكيس U_2 وثلاث كريات بيضاء للكيس U_3 .
نختار عشوائيا كيسًا واحدًا من بين الأكياس الثلاثة ونسحب منه كريتان في آن واحد.
احتمال إختيار الكيس U_1 هو $P(U_1)=\frac{1}{3}$ و احتمال إختيار الكيس U_3 يساوي ضعف احتمال اختيار الكيس U_2 .

نعتبر الحدثين : A «الحصول على كريتين بيضاوين»
C «الحصول على كرية سوداء واحدة على الأقل»



1/ أحسب الاحتمالين: $P(U_2)$ و $P(U_3)$.

2/ ا/ أنقل ثم أتمم شجرة الإحتمالات المقابلة.

ب/ بيّن أن: $P(U_2\cap A)=\frac{2}{27}$ ثم تحقق أن $P(A)=\frac{14}{27}$.

3/ ماهو احتمال إختيار الكيس U_1 علما أنه تحصلنا على كرية سوداء واحدة على الأقل.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

I/ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول Z التالية: $(2Z-1)^2+(2-i)^2=0$. (دون حساب المميز)

II/ المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين: $Z_A=1+i$ و $Z_B=-i$.

1/ عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون: $(\overline{Z_B})^n+\left(\frac{Z_A}{\sqrt{2}}\right)^n=0$.

2/ ليكن f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث: $\frac{Z'-1-i}{Z-1-i}=1+i$.

ا/ استنتج قيسا بالراديان للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'}\right)$ وأكتب الطول AM' بدلالة الطول AM .

ب/ استنتج طبيعة التحويل f معينا عناصره المميزة.

3/ ا/ عيّن ثم أنشئ (C) مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z التي تحقق: $|(1+i)Z-1+i|=\sqrt{2}$.

ب/ عيّن ثم أنشئ (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z التي تحقق: $\arg\left[\left(Z_A\overline{Z}+Z_AZ_B\right)^2\right]=2\arg(Z_B)$.

ج/ عيّن لاحقتي نقطتي تقاطع المجموعتين (Δ) و (C) .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

(u_n) متتالية هندسية حدودها أعداد طبيعية غير معدومة؛ حدها الأول u_0 وأساسها q حيث $PGCD(u_0;q)=1$.

I/ عين u_0 و q علما أن: $u_1+2u_2=12(u_0)^2$ وأن: $u_0<q$ ، ثم أُكتب u_n بدلالة n .

II/ نضع فيما يلي $u_0=3$ و $q=4$. وليكن S_n المجموع المعرف كما يلي: $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$.

1/ ا/ أُدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 7 .

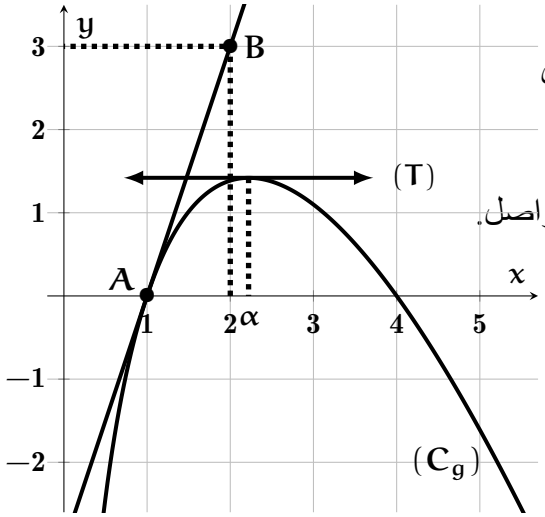
ب/ أُكتب S_n بدلالة n ، ثم عيّن قيم العدد الطبيعي n التي تحقق: $\begin{cases} n\equiv 2975[3] \\ S_n-1446n\equiv 2025[7] \end{cases}$.

2/ ليكن العدد الطبيعي A الذي يُكتب في النظام ذي الأساس 4 على الشكل: $A=\underbrace{\overline{333\cdots3}}_{\text{2025 رقمًا}}-\underbrace{\overline{333\cdots3}}_{\text{1446 رقمًا}}$

- بين أن: $A=S_{2024}-S_{1445}$ ، ثم استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد A على 7 .

3/ أثبت أن العددين الطبيعيين S_{2024} و $(S_{1445}+1)$ أوليين فيما بينهما.

التمرين الرابع: (07 نقاط)



I/ في الشكل المقابل: (C_g) هو التمثيل البياني للدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=(ax+b)\ln x$ ، حيث a و b عددان حقيقيان.
(C_g) يقطع حامل محور الفواصل في النقطتين ذات الفاصلتين 1 و 4 .
(T) مماس لـ (C_g) في النقطة ذات الفاصلة α ، موازٍ لحامل محور الفواصل.
(AB) مماس للمنحنى (C_g) في النقطة $A(1;0)$.

1/ بقراءة بيانية عين $g'(\alpha)$ ، ثم عين إشارة $g'(x)$.

2/ عين بيانيا: $g(4)$ و $g'(1)$ ، ثم بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $g(x)=(4-x)\ln x$.

3/ بقراءة بيانية حدد إشارة $g(x)$ حسب قيم x من $]0;+\infty[$.

II/ لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $\begin{cases} f(0)=0 \\ f(x)=-\frac{1}{4}x^2+4x+\left(\frac{1}{2}x^2-4x\right)\ln x \ ; \ \text{لما } x>0 \end{cases}$.

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. (الوحدة: $1\ cm$)

1/ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم أُحسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للدالة f ؟

2/ ا/ أُحسب $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ وفسّر النتيجة هندسيا، ثم بين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=-g(x)$.

ب/ استنتج إتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3/ ا/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف، يُطلب تعيين إحداثيتيها.

ب/ أنشئ (C_f) بدقة. (نأخذ: $f(1)=3.8$ ، $f(4)=0.9$ ، $\alpha=2.2$ و $f(\alpha)=2.5$)

4/ لتكن h الدالة المعرفة على $[1;e]$ بـ: $h(x)=-\frac{1}{4}x^2+4x$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

ا/ بين أنه من أجل كل x من المجال $[1;e]$: $f(x)-h(x)\le 0$.

ب/ باستعمال المكاملة بالتجزئة بيّن أن: $\int_1^e\left(\frac{1}{2}x^2-4x\right)\ln x\,dx=\frac{2e^3-18e^2-17}{18}$.

ج/ أُحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_h) والمستقيمين: $x=1$ و $x=e$.

انتهى الموضوع الأوّل.

الموضوع الثّاني:

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي كيس غير شفاف على عشر كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس موزعة: خمس كريات بيضاء مرقمة بـ -1، 0، 1، 2 و 3؛ ثلاث كريات خضراء مرقمة بـ 3، 4 و $5-$؛ وكريتين حمراوين مرقمتين بـ -1 و 0.
نسحب عشوائيا من الكيس ثلاث كريات على التوالي دون إرجاع، ونعتبر الأحداث التالية:

A : «الكريات المسحوبة الثلاث من نفس اللون». B : «الحصول على كريات جداء أرقامها عدد زوجي».

C : «مجموع أرقام الكريات المسحوبة عدد فردي».

1/ أحسب كلا من $P(A)$، $P(B)$ و $P(C)$.

2/ أحسب $P_A(C)$. هل الحدثان A و C مستقلان؟ علّل.

3/ ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لثلاث كريات عدد الأرقام السالبة تماما المسجلة عليها.

ا/ عرّف قانون احتمال المتغير العشوائي X، ثمّ أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

ب/ أحسب الاحتمال: $P(C_3^X = 3)$.

4/ نضيف إلى الكيس n كرية تحمل الرقم 0 ثم نسحب منه عشوائيا كريتين في آن واحد، ونعتبر P_n احتمال الحصول على كريتين تحملان الرقم 0 . عين قيمة العدد الطبيعي n حتى يكون: $P_n = \frac{1}{11}$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

I/ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول Z : $(\overline{Z})^4 + 4 = 0$. (حيث العدد $\overline{Z}$ هو مرافق العدد Z)

II/ المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. لتكن A ، B ، C ، D ، E و I نقط من المستوي، لواحقها على الترتيب: $Z_A = 1+i$ ، $Z_B = \overline{Z_A}$ ، $Z_C = -Z_A$ ، $Z_D = -Z_B$ ، $Z_E = -2$ و $Z_I = i$.

1/ ا/ أكتب العدد المركب $\frac{Z_B - Z_D}{Z_A - Z_C}$ على الشكل الأسي.

ب/ بيّن أن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع، ثم استنتج طبيعته مع التبرير.

2/ من أجل كل عدد مركب Z (حيث $Z \neq -2$) لاحقة النقطة M من المستوي نعرّف Z' لاحقة النقطة M' من المستوي كمايلي: $Z' = \frac{i(Z+1-i)}{Z+2}$.

ا/ بيّن أنه إذا كانت M نقطة من محور القطعة المستقيمة $[DE]$ فإن M' تنتمي إلى دائرة يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

ب/ تحقق أنه من أجل $Z \neq -2$: $Z' - i = \frac{1-i}{Z+2}$ ، ثم استنتج أن:

$IM' \times EM = \sqrt{2}$ و $\left(\vec{u}; \overrightarrow{IM'}\right) + \left(\vec{u}; \overrightarrow{EM}\right) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

3/ لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة Z حيث: $\arg\left(i\overline{Z} + i\overline{Z_B} + Z_A\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ و $k \in \mathbb{Z}$.

- عيّن طبيعة المجموعة (Γ) وعناصرها المميزة.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1/ نعتبر المعادلة (E) ... $570x - 135y = 1005$ ذات المجهول $(x; y)$ حيث x و y عددان صحيحان.

ا/ جد القاسم المشترك الأكبر للعددين 135 و 570 ثم استنتج أن المعادلة تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

ب/ بيّن أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلّا للمعادلة (E) فإن: $x \equiv 2[9]$ ، ثم استنتج حلول المعادلة (E) .

2/ ا/ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 11 .

ب/ x و y عددان طبيعيان و $(x;y)$ حل للمعادلة (E).

- عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد $5n^2 - 1446^{2025} + 1446^{3x+y}$ قابلا للقسمة على 11 .

3/ نضع: $A = 9n + 2$ و $B = 38n + 1$ حيث n عدد طبيعي، وليكن d' القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B .

- عين القيم الممكنة للعدد d' ثم عين قيم n بحيث يكون العدد A أوليا مع B .

4/ M عدد طبيعي يُكتب $\overline{1\beta\alpha\alpha\beta2}$ في نظام التعداد ذي الأساس 4 ويُكتب $\overline{\alpha\beta\alpha41}$ في نظام التعداد ذي الأساس 5 .

- عين العددين الطبيعيين α و β ، ثم أكتب M في النظام العشري.

5/ ا/ حلّل العدد 2025 إلى جداء عوامل أولية واستنتج الأعداد الطبيعية التي مربع كل منها يقسم 2025 .

ب/ عيّن كل الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق: $m^2 - 8d^2 = 2025$ حيث: $d = PGCD(a;b)$ و $m = PPCM(a;b)$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I/ نعتبر g الدالة العددية المعرفة على $[0;+\infty[$ بـــ: $g(x) = -e^x(e^x + 2x)$.

1/ أحسب $g(0)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2/ أحسب $g'(x)$ ثم بيّن أن $g'(x) < 0$ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$.

II/ لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $f(x) = \frac{x}{2}\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)$.

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1/ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(-x) = f(x)$. ماذا تستنتج؟

2/ ا/ بيّن أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

ب/ أثبت أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -\frac{x}{2}$ مقارب مائل لـــ (C_f) عند $+\infty$.

ج/ أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

3/ ا/ بيّن أنه من أجل كل x من المجال $[0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{1+g(x)}{2(1+e^x)^2}$.

ب/ بيّن أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$ ، ثم استنتج إتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ وشكّل جدول تغيراتها.

4/ ا/ بيّن أن المعادلة $f(x) = -1$ تقبل حلين بالضبط α و β حيث $2.3 < \alpha < 2.4$ ثم استنتج حصرا لـــ β .

ب/ أكتب معادلة المستقيم (Δ') المقارب لـــ (C_f) عند $-\infty$ ، ثم أنشئ (Δ) ، (Δ') و (C_f) .

ج/ عيّن قيم الوسيط الحقيقي m التي من أجلها يكون للمعادلة $1 - e^x = 2m(e^x + 1)$ حلّان متمايزان.

III/ لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بحدها الأول: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n) + \frac{u_n}{2}$.

1/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$.

2/ بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

3/ ا/ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$.

ب/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ثم أحسب نهاية المتتالية (u_n) .

انتهى الموضوع الثاني.

رابط الإطلاع على الموضوع إلكترونيا، مع الإجابة النموذجية :
(تُرفع الإجابة النموذجية بعد انتهاء فترة الإختبار مباشرة)

☺☺بالتوفيق للجميع في شهادة البكالوريا☺☺

بكالوريا تجريبية في مادة الرياضيات // المستوى: الثالثة رياضيات // دورة: مـــــــاي 2025

رابط الإطلاع على الموضوع إلكترونيا، مع الإجابة النموذجية :
(تُرفع الإجابة النموذجية بعد انتهاء فترة الإختبار مباشرة)

☺☺بالتوفيق للجميع في شهادة البكالوريا☺☺

الموضوع الأول:

التمرين الأول: (05 نقاط)

I/ عدد الحالات الكلية لسحب ثلاث كريات على التوالي دون إرجاع من بين تسع كريات هو: $A_9^3 = 504$.

1/ تعيين قيم المتغير العشوائي X : قيم X هي: $\{0;1;2;3\}$.

- عند سحب ثلاث كريات سوداء فإن: $X = 0$.
- عند سحب كرية بيضاء وكريتين سوداوين فإن: $X = 1$.
- عند سحب كريتين بيضاوين وكرية سوداء فإن: $X = 2$.
- عند سحب ثلاث كريات بيضاء فإن: $X = 3$.

- **تعيين قانون احتمال المتغير العشوائي X :**

$$P(X=0) = \frac{A_3^3}{A_9^3} = \frac{6}{504} = \frac{1}{84} \qquad P(X=1) = \frac{A_6^1 A_3^2 \times 3}{A_9^3} = \frac{108}{504} = \frac{3}{14}$$

$$P(X=2) = \frac{A_6^2 A_3^1 \times 3}{A_9^3} = \frac{270}{504} = \frac{15}{28} \qquad P(X=3) = \frac{A_6^3}{A_9^3} = \frac{120}{504} = \frac{5}{21}$$

وعليه نلخص قانون الاحتمال كما يلي:

$X = x_i$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{84}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{21}$

2/ حساب $E(X)$ الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{i=4} x_i P(X = x_i) = 0\left(\frac{1}{84}\right) + 1\left(\frac{3}{14}\right) + 2\left(\frac{15}{28}\right) + 3\left(\frac{5}{21}\right)$$

$$= \frac{3}{14} + \frac{15}{14} + \frac{5}{7} = \frac{28}{14} = \boxed{2 = E(X)}$$

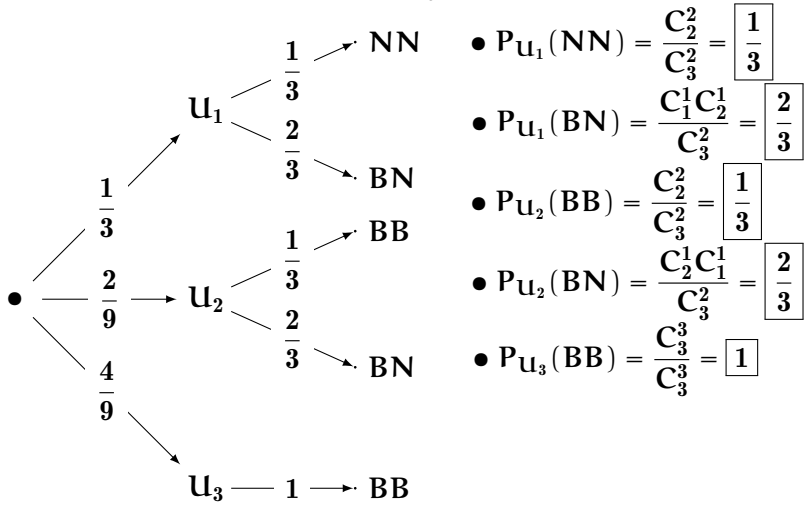
- **الإستنتاج:** $E(-40X + 2025) = -40 \times E(X) + 2025 = 1945$

II/ 1/ حساب الاحتمالين $P(U_2)$ و $P(U_3)$: لدينا: $P(U_3) = 2P(U_2)$

ولدينا: $P(U_1) + P(U_2) + P(U_3) = 1$ ومنه $\frac{1}{3} + 3P(U_2) = 1$

إذن: $P(U_2) = \frac{1 - \frac{1}{3}}{3} = \boxed{\frac{2}{9}}$ وبالتالي: $P(U_3) = 2 \times \frac{2}{9} = \boxed{\frac{4}{9}}$.

2/ I/ إتمام شجرة الاحتمالات: عدد الحالات الكلية لسحب في آن واحد لكريتين من بين ثلاث كريات من الكيس U_i هو $C_3^2 = 3$.



- $P_{U_1}(NN) = \frac{C_2^2}{C_3^2} = \boxed{\frac{1}{3}}$
- $P_{U_1}(BN) = \frac{C_1^1 C_2^1}{C_3^2} = \boxed{\frac{2}{3}}$
- $P_{U_2}(BB) = \frac{C_2^2}{C_3^2} = \boxed{\frac{1}{3}}$
- $P_{U_2}(BN) = \frac{C_2^1 C_1^1}{C_3^2} = \boxed{\frac{2}{3}}$
- $P_{U_3}(BB) = \frac{C_3^3}{C_3^3} = \boxed{1}$

ب/ حساب الإحتمالات:

- $P(U_2 \cap A) = P(U_2) \times P_{U_2}(BB) = \frac{2}{9} \times \frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{27}}$
- $P(A) = P(A \cap U_1) + P(A \cap U_2) + P(A \cap U_3)$
$= 0 + \frac{2}{27} + \frac{4}{9} \times 1 = \boxed{\frac{14}{27}}$

3/ الاحتمال الشرطي:

- $P_C(U_1) = \frac{P(C \cap U_1)}{P(C)} = \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{1 - P(A)}$
$= \frac{3}{9} \times \frac{1}{\frac{13}{27}} = \frac{1}{3} \times \frac{27}{13} = \boxed{\frac{9}{13} = P_C(U_1)}$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

I/ حل المعادلة في مجموعة الأعداد المركبة: لدينا: $(2Z-1)^2 + (2-i)^2 = 0$

يكافئ: $(2Z-1)^2 = -(2-i)^2$ ومنه: $(2Z-1)^2 = [i(2-i)]^2$

أي: $(2Z-1)^2 = (1+2i)^2$ وبالتالي: $2Z - 1 = 1 + 2i$

أو $2Z - 1 = -1 - 2i$ إذن: $\boxed{Z = 1 + i}$ أو $\boxed{Z = -i}$.

II/ 1/ تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\overline{Z_B}\right)^n + \left(\frac{Z_A}{\sqrt{2}}\right)^n = 0$:

لدينا: $Z_A = 1+i$ معناه: $|Z_A| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ وبوضع $\theta = \arg(Z_A)$ فإن: $\begin{cases}\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ وبالتالي: $\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

إذن:

- $\boxed{Z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$

ولدينا $Z_B = -i$ ومنه $|Z_B| = 1$ و $\arg(Z_B) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

إذن:

- $\boxed{Z_B = e^{-i\frac{\pi}{2}}}$

وبالتالي: $\left(\overline{Z_B}\right)^n + \left(\frac{Z_A}{\sqrt{2}}\right)^n = 0$ يكافئ: $\left(e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)^n = -\left(\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)^n$

يكافئ: $\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^n = e^{i\pi}\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n$ يكافئ: $e^{ni\frac{\pi}{2}} = e^{i\left(\pi+n\frac{\pi}{4}\right)}$

معناه: $n\frac{\pi}{2} = \pi + n\frac{\pi}{4} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

(عددان مركبان متساويان: لهما نفس الطويلة ولهما عمدتان هما قيسان لنفس الزاوية)

ومنه: $\frac{1}{2}n - \frac{1}{4}n = 1 + 2k$ أي $\frac{1}{4}n = 1 + 2k$ إذن: $\boxed{n = 8k+4 \ ; \ k \in \mathbb{N}}$

2/ f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث: $\frac{Z'-1-i}{Z-1-i} = 1+i$.

ا/ استنتاج قيس بالراديان للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'}\right)$:

- لدينا: $\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'}\right) = \arg\left(\frac{Z'-Z_A}{Z-Z_A}\right) = \arg\left(\frac{Z'-1-i}{Z-1-i}\right)$

$= \arg(1+i) = \boxed{\frac{\pi}{4} + 2k\pi = \left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'}\right)}$

- **كتابة الطول AM' بدلالة الطول AM :**

لدينا: $\left|\frac{Z'-1-i}{Z-1-i}\right| = \frac{|Z'-Z_A|}{|Z-Z_A|} = |1+i| = \sqrt{2}$

معناه: $\frac{AM'}{AM} = \sqrt{2}$ إذن: $\boxed{AM' = \sqrt{2}AM}$.

ب/ استنتاج طبيعة التحويل f : التحويل النقطي f يرفق بكل نقطة M النقطة M' حيث: $AM' = \sqrt{2}AM$ و $\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'}\right) = \frac{\pi}{4}$.

إذن f هو التشابه المباشر الذي مركزه النقطة A ونسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

3/ ا/ تعيين وإنشاء المجموعة (C) : حيث $|(1+i)Z - 1 + i| = \sqrt{2} \ \cdots \ (1)$

- لدينا: $|(1+i)Z-1+i| = \left|(1+i)\left(Z - \frac{1-i}{1+i}\right)\right|$

$= |1+i| \cdot \left|Z - \frac{(1-i)(1-i)}{1^2+1^2}\right|$

$= \sqrt{2} \cdot |Z-(-i)| = \sqrt{2} \cdot |Z - Z_B|$

وعليه (1) تكافئ: $\sqrt{2}|Z-Z_B| = \sqrt{2}$ تكافئ: $|Z-Z_B| = 1$

أي: $BM = 1$ إذن (C) هي الدائرة التي مركزها النقطة B ونصف قطرها 1 .

ب/ تعيين وإنشاء المجموعة (Δ) : مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z التي تحقق:

$\arg\left[\left(Z_A\overline{Z} + Z_A Z_B\right)^2\right] = 2\arg(Z_B) \ \cdots \ (2)$

- لدينا : $\arg\left[\left(Z_A\overline{Z} + Z_A Z_B\right)^2\right] = 2\arg\left[Z_A\left(\overline{Z} + Z_B\right)\right]$

$= 2\arg(Z_A) + 2\arg\left(\overline{Z} + Z_B\right)$

$= 2\frac{\pi}{4} - 2\arg\left(\overline{Z + Z_B}\right)$

$= \frac{\pi}{2} - 2\arg\left(Z + \overline{Z_B}\right)$

$= \frac{\pi}{2} - 2\arg(Z - Z_B)$

ومنه (2) تكافئ: $\frac{\pi}{2} - 2\arg(Z-Z_B) = 2\arg(Z_B)$

تكافئ: $-2\arg(Z-Z_B) = -\frac{\pi}{2} + 2\arg(Z_B)$

تكافئ: $2\arg(Z-Z_B) = \frac{\pi}{2} - 2\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 2k\pi$ بحيث $k \in \mathbb{Z}$

تكافئ: $\arg(Z-Z_B) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + k\pi$

تكافئ: $\arg(Z-Z_B) = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ معناه: $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{BM}\right) = \frac{3\pi}{4} + k\pi$

إذن (Δ) هو المستقيم (BM) الذي ميله هو $\tan\frac{3\pi}{4}$ باستثناء النقطة B.

ج/ تعيين لاحقتي نقطتي تقاطع المجموعتين (C) و (Δ):

نحل الجملة: $\begin{cases}|Z-Z_B| = 1 \\ \arg(Z-Z_B) = \frac{3\pi}{4} + k\pi\end{cases}$

معناه: $Z - Z_B = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ أو $Z - Z_B = e^{i\left(\pi+\frac{3\pi}{4}\right)}$

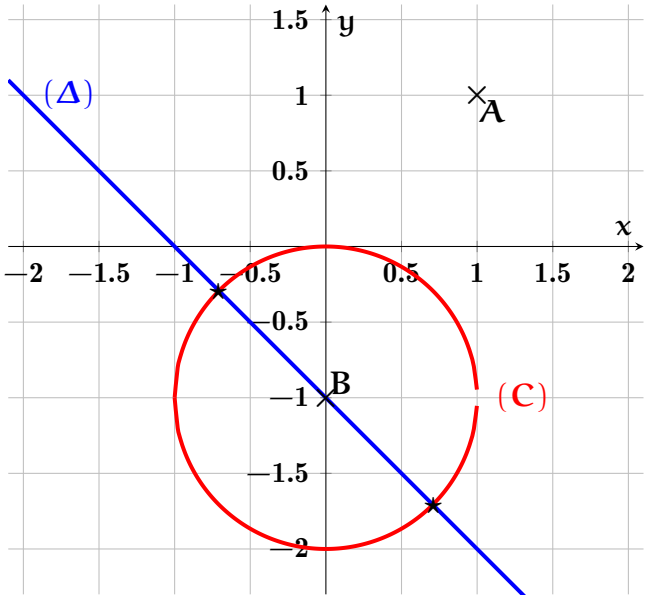
ومنه: $Z = Z_B + e^{i\frac{3\pi}{4}}$ أو $Z = Z_B + e^{i\frac{7\pi}{4}}$

أي: $Z = -i - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ أو $Z = -i + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

إذن: $\boxed{Z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)}$ أو $\boxed{Z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)}$

.

- **الإنشاء:**



التمرين الثالث: (04 نقاط)

I/ تعيين الحد الأول u_0 والأساس q : لدينا: $u_1 + 2u_2 = 12\,(u_0)^2$

ومنه: $u_0q + 2u_0q^2 = 12u_0^2$ تكافئ: $q + 2q^2 = 12u_0$ أي:

$q\,(1 + 2q) = 12u_0$ ومنه: $q \mid 12u_0$ وبما أن $\mathrm{PGCD}\,(u_0; q) = 1$ فإن: $q \mid 12$

إذن: $q \in D_{12} = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$.

فنميز الحالات التالية:

q	1	2	3	4	6	12
u_0	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{4}$	3	$\frac{13}{2}$	25

وبما أن حدود المتتالية (u_n) أعداد طبيعية و $q > u_0$ فإن: $\boxed{(u_0; q) = (3; 4)}$

- **عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) :** المتتالية (u_n) هندسية أساسها $q = 4$ و حدها الأول $u_0 = 3$ ، فإنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = u_0q^n = \boxed{3 \times 4^n = u_n}$.

II /1 /أ/ دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 7 :

لدينا: $4^0 \equiv 1\,[7]$ و $4^1 \equiv 4\,[7]$ و $4^2 \equiv 2\,[7]$ و $4^3 \equiv 1\,[7]$

وعليه:

$n =$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$	$k \in \mathbb{N}$
$4^n \equiv$	1	4	2	$[7]$

ب/ كتابة S_n بدلالة n :

- $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0\left(\frac{4^{n+1} - 1}{4 - 1}\right) = 3\left(\frac{4^{n+1} - 1}{3}\right)$

وعليه من أجل كل عدد طبيعي n : $\boxed{S_n = 4^{n+1} - 1}$

تعيين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة:

$$\begin{cases} n \equiv 2975\,[3] \\ S_n - 1446n \equiv 2025\,[7] \end{cases}$$

تكافئ: $\begin{cases} n \equiv 2\,[3] \\ S_n - 4n \equiv 2\,[7] \end{cases}$ ومنه: $n = 3k + 2$ حيث $k \in \mathbb{N}$

بالتعويض نجد: $\left(4^{3k+3} - 1\right) + 3\,(3k + 2) \equiv 2\,[7]$

ومنه: $(1 - 1) + 9k + 6 \equiv 2\,[7]$ أي: $2k \equiv -4\,[7]$

وبما أن: $7 \wedge 2 = 1$ فإن: $k \equiv -2\,[7]$ وبالتالي: $k \equiv 5\,[7]$

أي: $k = 7\alpha + 5$ بحيث $\alpha \in \mathbb{N}$ إذن: $\boxed{n = 21\alpha + 17\ ;\ \alpha \in \mathbb{N}}$.

2/ تبيان أن $A = S_{2024} - S_{1445}$:

- $A = \underbrace{\overline{333\cdots3}}_{\text{2025 رقمًا}} - \underbrace{\overline{333\cdots3}}_{\text{1446 رقمًا}}$

$= \left(3 \times 4^0 + 3 \times 4^1 + 3 \times 4^2 + \cdots + 3 \times 4^{2024}\right) - \left(3 \times 4^0 + 3 \times 4^1 + 3 \times 4^2 + \cdots + 3 \times 4^{1445}\right)$

$= \left(u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{2024}\right) - \left(u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{1445}\right)$

$\boxed{A = S_{2024} - S_{1445}}$

- **الإستنتاج:**

لدينا: $S_{2024} = 4^{2025} - 1$ و $S_{1445} = 4^{1446} - 1$

بما أن: $2025 = 3 \times 675$ فإن: $4^{2025} - 1 \equiv 1 - 1[7]$ أي: $S_{2024} \equiv 0[7]$

وبما أن: $2025 = 3 \times 675$ فإن: $4^{2025} - 1 \equiv 1 - 1[7]$ أي: $S_{2024} \equiv 0[7]$

وبالتالي: $A \equiv 0[7]$ إذن باقي القسمة الإقليدية للعدد A على 7 هو 0 .

3/ إثبات أن العددين الطبيعيين S_{2024} و $(S_{1445}+1)$ أوليين فيما بينهما:

- $S_{2024} = 4^{2025} - 1 = 4^{1446} \times 4^{579} - 1 = 4^{579}(S_{1445}+1) - 1$ لدينا:

وبالتالي: $4^{579}(S_{1445}+1) - S_{2024} = 1$

إذن حسب مبرهنة بيزو: العددان S_{2024} و $(S_{1445}+1)$ أوليان فيما بينهما.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I/ 1/ تعيين $g'(\alpha)$: المنحنى (C_g) يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة α موازيا لحامل محور الفواصل ومنه: $g'(\alpha) = 0$.

- **تعيين إشارة $g'(x)$:**

لدينا الدالة g تقبل الإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ، ومن خلال التمثيل البياني للدالة g نجد أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0;\alpha]$ ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$ وعليه:

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

2/ تعيين $g(4)$ و $g'(1)$:

- لدينا المنحنى (C_g) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما 1 و 4 ومنه: $\boxed{g(4) = 0}$
- لدينا $g'(1)$ هو معامل توجه المستقيم (AB) المماس لـ (C_g) عند النقطة $A(1;0)$ والذي يشمل النقطة $B(2;3)$ فإن: $g'(1) = \dfrac{3-0}{2-1} = \dfrac{3}{1} = \boxed{3 = g'(1)}$
- **تعيين عبارة الدالة g :** لدينا: $g(x) = (ax+b)\ln x$

ومنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$:

$$g'(x) = a\ln x + \frac{1}{x}(ax+b) = a\ln x + a + \frac{b}{x}$$

وبما أن: $\begin{cases} g(4) = 0 \\ g'(1) = 3 \end{cases}$ فإن: $\begin{cases} (4a+b)\ln 4 = 0 \\ a+b = 3 \end{cases}$

ومنه: $\begin{cases} 4a+b = 0 \\ a+b = 3 \end{cases}$ وعليه: $3a = -3$ أي $\boxed{a = -1}$

ومنه $-1+b = 3$ أي: $\boxed{b = 4}$ إذن: $\boxed{g(x) = (4-x)\ln x}$.

3/ تعيين إشارة $g(x)$ حسب قيم x : من خلال التمثيل البياني نجد:

x	0		1		4		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

II/ $D_f =]0;+\infty[$; $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = -\dfrac{1}{4}x^2 + 4x + \left(\dfrac{1}{2}x^2 - 4x\right)\ln x \end{cases}$; لما $x > 0$

1/ حساب النهايات:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\dfrac{1}{4}x^2 + 4x + \left(\dfrac{1}{2}x^2 - 4x\right)\ln x\right]$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left[-\dfrac{1}{4} + \dfrac{4}{x} + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{4}{x}\right)\ln x\right] = +\infty$

(لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ و لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x} = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\dfrac{1}{4} + \dfrac{4}{x} + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{4}{x}\right)\ln x\right] = +\infty$).

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{1}{4}x^2 + 4x + \dfrac{1}{2}x^2\ln x - 4x\ln x\right) = 0$

(لأن: $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{1}{4}x^2 + 4x\right) = 0$ و لأن: $\lim\limits_{x\to 0} x^n\ln x = 0$).

- **الإستنتاج:** لدينا: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ ومنه الدالة f مستمرة عند 0 .

2/ حساب النهاية:

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{1}{4}x + 4 + \dfrac{1}{2}x\ln x - 4\ln x\right) = +\infty$

(لأن: $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{1}{4}x + 4\right) = 4$ و $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ و $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$)

- **التفسير الهندسي:**

(C_f) يقبل نصف مماس موازٍ لحامل محور التراتيب معادلته $x = 0$ موجه للأعلى.

• **المشتق:** لدينا من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x :

• $f'(x) = -\frac{1}{2}x + 4 + (x-4)\ln x + \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}x^2 - 4x\right)$

$= -\frac{1}{2}x + 4 - (-x+4)\ln x + \frac{1}{2}x - 4$

$= -(4-x)\ln x = -g(x)$

3/ إتجاه التغير: إشارة $f'(x)$ عكس إشارة $g(x)$ وعليه: الدالة f متزايدة تماما على المجالين: $[0;1]$ و $[4;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال: $[1;4]$.

• **جدول التغيرات:**

x	0		1		4		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 0	↗	$f(1)$	↘	$f(4)$	↗	$+\infty$

4/ ا/ تعيين نقطة إنعطاف المنحنى (C_f) :

لدينا من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f''(x) = -g'(x)$ ، ومنه:

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

ومنه المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف إحداثييها: $(\alpha; f(\alpha))$.

ب/ الإنشاء نأخذ: $f(1) = 3.8$ ، $f(4) = 0.9$ ، $\alpha = 2.2$ و $f(\alpha) = 2.5$

5/ $h(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4x$ و $D_h = [1;e]$

ا/ تبيان أنه من أجل كل x من المجال $[1;e]$ ، $f(x) - h(x) \leq 0$:

• لدينا: $f(x) - h(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x\right)\ln x = \frac{1}{2}x(x-8)\ln x$

ولدينا من أجل كل x من المجال $[1;e]$: $\ln x \geq 0$ و $\frac{1}{2}x > 0$ و $x - 8 < 0$

إذن من أجل كل x من المجال $[1;e]$ يكون: $f(x) - h(x) \leq 0$.

ب/ المكاملة بالتجزئة: لتبيان أن:

$\int_1^e \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x\right)\ln x\,dx = \frac{2e^3 - 18e^2 - 17}{18}$

نفرض: $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{1}{6}x^3 - 2x^2 \end{cases}$

وبالتالي:

• $\int_1^e \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x\right)\ln x\,dx$

$= \left[\left(\frac{1}{6}x^3 - 2x^2\right)\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\left(\frac{1}{6}x^3 - 2x^2\right)dx$

$= \frac{1}{6}e^3 - 2e^2 - \int_1^e \left(\frac{1}{6}x^2 - 2x\right)dx$

$= \frac{1}{6}e^3 - 2e^2 - \left[\frac{1}{18}x^3 - x^2\right]_1^e$

$= \frac{1}{6}e^3 - 2e^2 - \left[\left(\frac{1}{18}e^3 - e^2\right) - \left(\frac{1}{18} - 1\right)\right]$

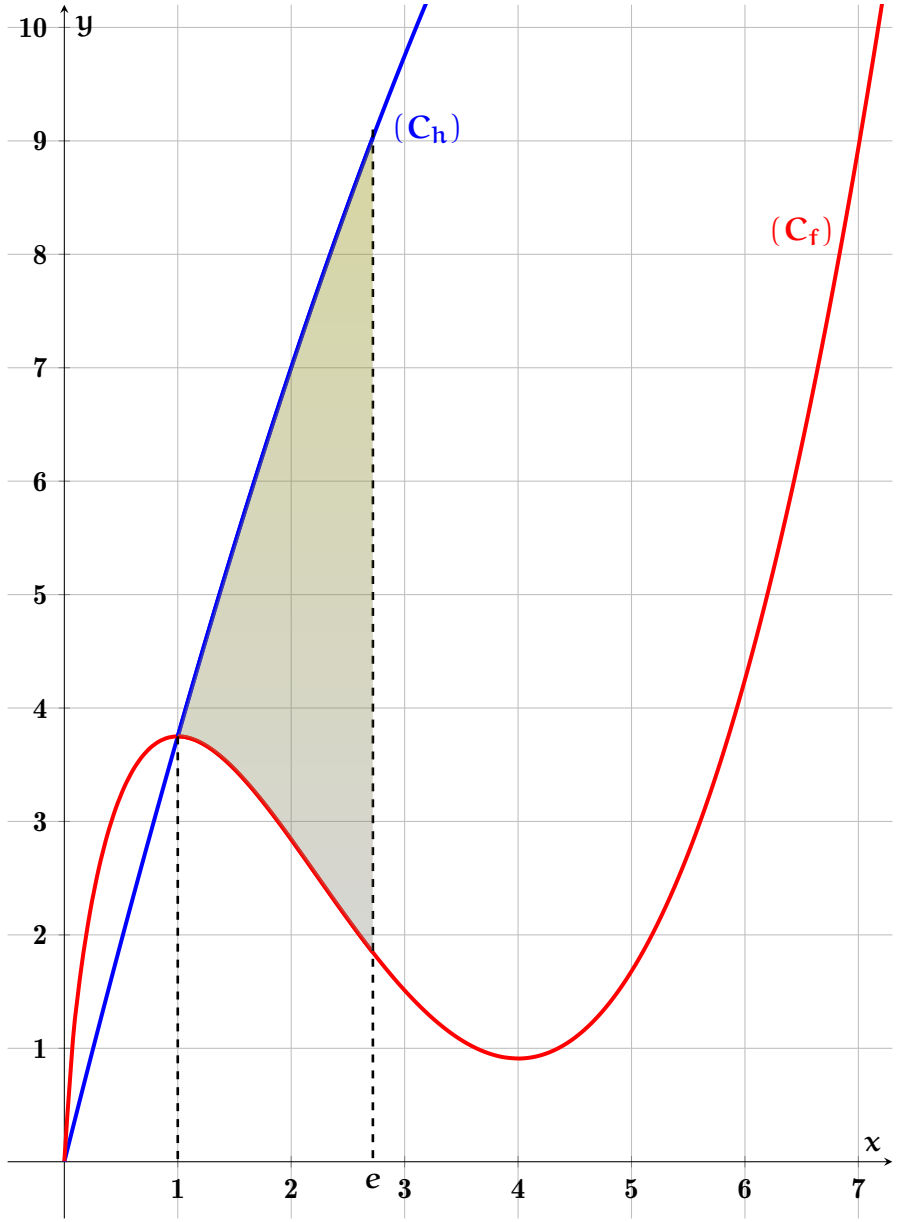
$= \frac{3}{18}e^3 - \frac{36}{18}e^2 - \frac{1}{18}e^3 + \frac{18}{18}e^2 + \frac{1}{18} - \frac{18}{18}$

$= \boxed{\frac{2e^3 - 18e^2 - 17}{18}}$

ج/ استنتاج المساحة: لدينا من أجل كل x من $[1;e]$ ، $f(x) - h(x) \leq 0$ ، ومنه:

• $A = -\int_1^e (f(x) - h(x))\,dx = -\int_1^e \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x\right)\ln x\,dx$

$\boxed{A = -\frac{2e^3 - 18e^2 - 17}{18}\ cm^2}$



– انتهى الموضوع الأول –

الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (04 نقاط)

عدد الحالات الكلية لسحب 3 كريات من بين 10 كريات على التوالي دون إرجاع هو $A_{10}^3 = 720$

1/ حساب الاحتمالات:

الحدث A : الحصول على ثلاث كريات بيضاء أو ثلاث كريات خضراء، ومنه:

- $P(A) = \dfrac{A_5^3 + A_3^3}{A_{10}^3} = \dfrac{60+6}{720} = \dfrac{66}{720} = \dfrac{11}{120}$

الحدث B : الحصول على ثلاثة أرقام جداؤها زوجي معناه الحصول على رقم زوجي على الأقل، أي: الحصول على رقم زوجي ورقمين فرديين أو رقمين زوجيين ورقم فردي أو ثلاثة أرقام زوجية. ومنه:

- $P(B) = \dfrac{A_4^1 A_6^2 \times 3 + A_4^2 A_6^1 \times 3 + A_4^3}{A_{10}^3} = \dfrac{360+216+24}{720} = \dfrac{600}{720} = \dfrac{5}{6}$

الحدث C : الحصول على ثلاثة أرقام مجموعها فردي معناه الحصول على عدد فردي من الأرقام الفردية، أي: الحصول على رقم فردي ورقمين زوجيين أو ثلاثة أرقام فردية. ومنه:

- $P(C) = \dfrac{A_6^1 A_4^2 \times 3 + A_6^3}{A_{10}^3} = \dfrac{216+120}{720} = \dfrac{336}{720} = \dfrac{7}{15}$

2/ حساب الاحتمال الشرطي:

- $P_A(C) = \dfrac{P(A \cap C)}{P(A)} = \dfrac{\left(\frac{A_3^1 A_2^2 \times 3 + A_3^3}{A_{10}^3}\right)}{\left(\frac{66}{720}\right)} = \dfrac{18+6}{720} \times \dfrac{720}{66} = \dfrac{24}{66} = \dfrac{4}{11}$
- **الإستنتاج:** نلاحظ أن: $P_A(C) \neq P(C)$ إذن الحدثان A و C غير مستقلين.

3/ ا/ تعيين قانون احتمال المتغير العشوائي X : قيم المتغير العشوائي x هي: $\{0;1;2;3\}$.

- عند سحب ثلاث كريات تحمل أرقاما موجبة فإن: $X = 0$.
- عند سحب كرية ذات رقم سالب تماما وكريتين برقمين موجبين فإن: $X = 1$.
- عند سحب كريتين ذات رقم سالب تماما وكرية برقم موجب فإن: $X = 2$.
- عند سحب ثلاث كريات تحمل رقما سالبا تماما فإن: $X = 3$.

وعليه:

- $P(X=1)=\dfrac{A_3^1A_7^2\times 3}{A_{10}^3}=\dfrac{378}{720}=\dfrac{21}{40}$ - $P(X=0)=\dfrac{A_7^3}{A_{10}^3}=\dfrac{210}{720}=\dfrac{7}{24}$
- $P(X=2)=\dfrac{A_3^2A_7^1\times 3}{A_{10}^3}=\dfrac{126}{720}=\dfrac{7}{40}$ - $P(X=3)=\dfrac{A_3^3}{A_{10}^3}=\dfrac{6}{720}=\dfrac{1}{120}$

وعليه نلخص قانون الاحتمال كما يلي:

$X=x_i$	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{7}{24}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{120}$

- **حساب $E(X)$ الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X :**

$$E(X)=\sum_{i=1}^{i=4}x_iP(X=x_i)$$
$$=0\left(\frac{7}{24}\right)+1\left(\frac{21}{40}\right)+2\left(\frac{7}{40}\right)+3\left(\frac{1}{120}\right)$$
$$=\frac{21}{40}+\frac{14}{40}+\frac{1}{40}=\frac{36}{40}=\boxed{\frac{9}{10}=E(X)}$$

ب/ استنتاج الاحتمال $P\left(C_3^X=3\right)$: لدينا $C_3^X=3$ معناه: $X=1$ أو $X=2$ ومنه:

- $P\left(C_3^X=3\right)=P(X=1)+P(X=2)=\dfrac{21}{40}+\dfrac{7}{40}=\dfrac{28}{40}=\boxed{\dfrac{7}{10}}$

4/ تعيين قيمة n يحيث $P_n=\dfrac{1}{11}$:

لدينا:

- $C_{n+2}^2=\dfrac{(n+2)!}{2!(n+2-2)!}=\dfrac{(n+2)!}{2(n)!}=\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}$

$$C_{n+2}^2=\frac{1}{2}\left(n^2+3n+2\right)$$

وكذلك:

- $C_{n+10}^2=\dfrac{(n+10)!}{2!(n+10-2)!}=\dfrac{(n+10)!}{2(n+8)!}=\dfrac{(n+10)(n+9)}{2}$

$$C_{n+10}^2=\frac{1}{2}\left(n^2+19n+90\right)$$

إذن:

- $P_n=\dfrac{C_{n+2}^2}{C_{n+10}^2}=\dfrac{n^2+3n+2}{n^2+19n+90}=\dfrac{1}{11}$

تكافئ: $11n^2+33n+22=n^2+19n+90$ تكافئ: $10n^2+14n-68=0$

تكافئ: $5n^2+7n-34=0$ لدينا $\Delta=729$ ومنه: $n_1=-\dfrac{17}{5}$ أو $n_2=2$

إذن $\boxed{n=2}$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

I/ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $(\overline{Z})^4+4=0$ تكافئ: $(\overline{Z})^4=-4$ تكافئ: $\left[(\overline{Z})^2\right]^2=(2i)^2$

تكافئ: $(\overline{Z})^2=2i$ أو $(\overline{Z})^2=-2i$ أي: $Z^2=-2i\cdots(1)$ أو $Z^2=2i\cdots(2)$

بوضع $Z=x+iy$ فإن: $Z^2=x^2-y^2+2ixy$ و $|Z^2|=x^2+y^2$

ومنه (1) تكافئ: $\begin{cases}x^2-y^2=0\\x^2+y^2=2\\2xy=-2\end{cases}$ وبالتالي: $2x^2=2$ أي: $x^2=1$

ومنه إما $x=1$ ومنه $y=1$ وإما $x=-1$ ومنه $y=-1$

وكذلك (2) تكافئ: $\begin{cases}x^2-y^2=0\\x^2+y^2=2\\2xy=-2\end{cases}$ وبالتالي: $2x^2=2$ أي: $x^2=1$

ومنه إما $x=1$ ومنه $y=-1$ وإما $x=-1$ ومنه $y=1$

إذن حلول المعادلة هي: $\boxed{S=\{1+i;-1-i;1-i;-1+i\}}$.

II/ $Z_A=1+i$ ، $Z_B=\overline{Z_A}=1-i$ ، $Z_C=-Z_A=-1-i$ ،

$Z_D=-Z_B=-1+i$ ، $Z_E=-2$ ، $Z_I=i$.

1/ ا/ كتابة العدد المركب $\dfrac{Z_B-Z_D}{Z_A-Z_C}$ على الشكل الأسي:

- $\dfrac{Z_B-Z_D}{Z_A-Z_C}=\dfrac{1-i+1-i}{1+i+1+i}=\dfrac{2-2i}{2+2i}=\dfrac{(2-2i)(2-2i)}{2^2+2^2}$
$=\dfrac{-8i}{8}=-i$

ومنه: $\left|\dfrac{Z_B-Z_D}{Z_A-Z_C}\right|=1$ و $\arg\left(\dfrac{Z_B-Z_D}{Z_A-Z_C}\right)=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$

وعليه: $\boxed{\dfrac{Z_B-Z_D}{Z_A-Z_C}=e^{-i\frac{\pi}{2}}}$.

ب/ تبيان أن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع:

لدينا:

- $Z_{\overrightarrow{AB}}=Z_B-Z_A=1-i-1-i=-2i$

و كذلك: $Z_{\overrightarrow{DC}} = Z_C - Z_D = -1 - i + 1 - i = -2i$ •

وبالتالي: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ إذن الرباعي ABCD متوازي أضلاع.

• **الإستنتاج:**

لدينا $\left|\dfrac{Z_B - Z_D}{Z_A - Z_C}\right| = 1$ و $\arg\left(\dfrac{Z_B - Z_D}{Z_A - Z_C}\right) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

معناه: $DB = CA$ و $\left(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{DB}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$

إذن القطران $[CA]$ و $[DB]$ متقايسان ومتعامدان، فمتوازي الأضلاع ABCD هو مربع.

2/ M لاحقتها Z و M' لاحقتها Z' حيث: $Z' = \dfrac{i(Z+1-i)}{Z+2}$.

ا/ تبيان أنه إذا كانت M نقطة من محور القطعة $[DE]$ فإن M' تنتمي إلى دائرة:

لتكن M تنتمي إلى محور القطعة المستقيمة $[DE]$ معناه: $MD = MB$ فإن:

$|Z - Z_D| = |Z - Z_E|$ ومنه: $\dfrac{|Z - Z_D|}{|Z - Z_E|} = 1$ تكافئ: $\left|\dfrac{z+1-i}{z+2}\right| = 1$

• $|Z'| = \left|\dfrac{i(z+1-i)}{z+2}\right| = |i| \cdot \left|\dfrac{z+1-i}{z+2}\right| = \left|\dfrac{z+1-i}{z+2}\right| = 1$ ومنه:

معناه: $OM' = 1$ وبالتالي النقطة M' تنتمي إلى الدائرة التي مركزها المبدأ O ونصف قطرها 1 .

ب/ من أجل $Z \neq 2$ لدينا:

• $Z' - i = \dfrac{i(z+1-i)}{z+2} - i = \dfrac{iz+i+1}{z+2} - \dfrac{iZ+2i}{Z+2}$

$= \dfrac{iZ+1+i-iZ-2i}{Z+2} = \dfrac{1-i}{Z+2}$

• **الإستنتاج:**

لدينا: $Z' - i = \dfrac{1-i}{Z+2}$ ومنه: $(Z'-i)(Z-(-2)) = 1-i$

بالتالي: $|(Z'-Z_I)(Z-Z_E)| = |1-i|$

تكافئ: $|(Z'-Z_I)| \cdot |(Z-Z_E)| = \sqrt{2}$ معناه: $\boxed{IM' \times EM = \sqrt{2}}$.

كذلك $\arg[(Z'-Z_I)(Z-Z_E)] = \arg(1-i)$

ومنه: $\arg(Z'-Z_I) + \arg(Z-Z_E) = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

معناه: $\boxed{\left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{IM'}\right) + \left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{EM}\right) = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

3/ تعيين طبيعة المجموعة (Γ) وعناصرها المميزة:

لدينا: • $\arg(i\overline{Z} + i\overline{Z_B} + Z_A) = \arg\left[i\left(\overline{Z} + \overline{Z_B} - iZ_A\right)\right]$

$= \arg(i) + \arg\left(\overline{Z} + \overline{Z_B} - iZ_A\right)$

$= \dfrac{\pi}{2} - \arg\left(\overline{\overline{Z} + \overline{Z_B} - iZ_A}\right)$

$= \dfrac{\pi}{2} - \arg\left(Z + Z_B + i\overline{Z_A}\right)$

$= \dfrac{\pi}{2} - \arg(Z + 1 - i + i + 1)$

$= \dfrac{\pi}{2} - \arg(Z+2)$

وعليه: $\dfrac{\pi}{2} - \arg(Z+2) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$

تكافئ: $-\arg(Z-(-2)) = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$

تكافئ: $\arg(Z - Z_E) = \dfrac{\pi}{6} - 2k\pi$ معناه: $\left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{EM}\right) = \dfrac{\pi}{6} - 2k\pi$

إذن مجموعة النقط (Γ) هي نصف المستقيم EM الذي ميله $\tan\frac{\pi}{6}$ باستثناء النقطة E .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1/ $570x - 135y = 1005 \cdots (E)$

ا/ إيجاد القاسم المشترك الأكبر للعددين 135 و 570 :

لدينا: $570 = 2 \times 3 \times 5 \times 19$ و $135 = 3^2 \times 5$

إذن: $PGCD(570; 135) = 3 \times 5 = 15$

طريقة 2: (خوارزمية إقليدس)

$570 = 135 \times 4 + 30$

$135 = 30 \times 4 + 15$

$30 = 15 \times 2$

إذن: $PGCD(570; 135) = 3 \times 5 = 15$.

• **الإستنتاج:**

لدينا $15 = 67 \times 15 = 1005$ ومنه: $15 | 1005$ إذن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

ب/ تبيان أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلّا للمعادلة (E) فإن: $x \equiv 2[9]$:

ليكن $(x; y)$ حلّا للمعادلة (E) معناه: $570x - 135y = 1005$

تكافئ: $(1) \cdots 38x - 9y = 67$ تكافئ: $38x = 9y + 67$

أي: $38x = 9(y+7)+4$

معناه: $38x \equiv 4[9]$ ومنه: $2x \equiv 4[9]$ وبما أن: $2 \wedge 9 = 1$ فإن: $\boxed{x \equiv 2[9]}$.

• استنتاج حلول المعادلة (E) :

ليكن $(x;y)$ حلّا للمعادلة (E) معناه: $x \equiv 2[9]$ ومنه: $x = 9k+2$ بحيث: $k \in \mathbb{Z}$

بالتعويض في المعادلة (1) نجد: $38(9k+2) - 9y = 67$ تكافئ: $38 \times 9k + 9 = 9y$

إذن $y = 38k+1$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

وبالتالي حلول المعادلة (E) هي $\boxed{(x;y) = (9k+2;38k+1)}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

2/ ا/ دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 11 :

لدينا: $5^0 \equiv 1[11]$ و $5^1 \equiv 5[11]$ و $5^2 \equiv 3[11]$ و $5^3 \equiv 4[11]$ و $5^4 \equiv 9[11]$ و $5^5 \equiv 1[11]$ وعليه:

$n =$	$5k$	$5k+1$	$5k+2$	$5k+3$	$5k+4$	$k \in \mathbb{N}$
$5^n \equiv$	1	5	3	4	9	$[11]$

ب/ تعيين قيم n بحيث يكون العدد $5n^2 - 1446^{2025} + 1446^{3x+y}$ قابلا للقسمة على 11 :

معناه: $5n^2 - 1446^{2025} + 1446^{3x+y} \equiv 0[11]$

لدينا: $(x;y)$ حلٌ من $\mathbb{N}^2$ للمعادلة (E) فإن $(x;y) = (9k+2;38k+1)$

إذن: $3x+y = 3(9k+2)+38k+1 = 65k+7 = 5(13k+1)+2$

لدينا: $1446 = 11 \times 131 + 5$ ومنه: $1446 \equiv 5[11]$

وبالتالي: $1446^{3x+y} \equiv 5^{5q+2}[11]$ إذن: $\boxed{1446^{3x+y} \equiv 3[11]} \cdots (*)$

وكذلك $1446^{2025} \equiv 5^{2025}[11]$ وبما أن $2025 = 5 \times 675$

فإن: $\boxed{1446^{2025} \equiv 1[11]} \cdots (**)$ من $(*)$ و $(**)$ نجد:

$5n^2 - 1446^{2025} + 1446^{3x+y} \equiv (5n^2 - 1 + 3)[11]$

وبالتالي: $5n^2 + 2 \equiv 0[11]$ تكافئ: $5n^2 \equiv -2[11]$ تكافئ: $5n^2 \equiv 20[11]$

وبما أن: $5 \wedge 11 = 1$ [فإن: $n^2 \equiv 4[11]$ ومنه: $n^2 - 2^2 \equiv 0[11]$

أي: $(n-2)(n+2) \equiv 0[11]$

وبما أن: 11 أولي فإن: $n-2 \equiv 0[11]$ أو $n+2 \equiv 0[11]$

ومنه $n \equiv 2[11]$ أو $n \equiv -2[11]$ أي $n \equiv 9[11]$

إذن: $\boxed{n = 11k+2}$ أو $\boxed{n = 11k+9}$ حيث $k \in \mathbb{N}$.

3/ تعيين القيم الممكنة للعدد $d' = PGCD(A;B)$

لدينا: $d'|A$ و $d'|B$ ومنه: $d'|(38A - 9B)$ أي: $d'|67$ إذن: $\boxed{d' \in D_{67} = \{1;67\}}$

• تعيين قيم n بحيث يكون العدد A أوليا مع B :

يكون $d' = 67$ لما: $\begin{cases} A \equiv 0[67] \\ B \equiv 0[67] \end{cases}$ أي: $\begin{cases} 9n+2 \equiv 0[67] \\ 38n+1 \equiv 0[67] \end{cases}$

ومنه: $\begin{cases} 36n+8 \equiv 0[67] \\ 38n+1 \equiv 0[67] \end{cases}$ يكافئ: $2n-7 \equiv 0[67]$ يكافئ: $2n \equiv 7[67]$

يكافئ: $34 \times 2n \equiv 238[67]$ يكافئ: $n \equiv 37[67]$ إذن:

$\boxed{n = 67\alpha + 37 \; ; \; \alpha \in \mathbb{N}}$

إذن يكون A و B أوليان فيما بينهما لما $n \neq 67\alpha + 37$ بحيث $\alpha \in \mathbb{N}$.

4/ تعيين العددين الطبيعيين α و β : لدينا $M = \overline{1\beta\alpha\alpha\beta2}^4 = \overline{\alpha\beta\alpha41}^5$

• ومنه: $M = 2 + 4\beta + 4^2\alpha + 4^3\alpha + 4^4\beta + 4^5 = 80\alpha + 260\beta + 1026$

• وكذلك: $M = 1 + 4 \times 5 + 5^2\alpha + 5^3\beta + 5^4\alpha = 650\alpha + 125\beta + 21$

وبالتالي: $80\alpha + 260\beta + 1026 = 650\alpha + 125\beta + 21$ أي: $570\alpha - 135\beta = 1005$

ومنه: $(\alpha;\beta) = (9k+2;38k+1)$ حيث: $k \in \mathbb{N}$.

وبما أن α و β رقمان لنظام التعداد ذي الأساس 4 فإن: $0 < \alpha \leq 3$ و $0 \leq \beta \leq 3$

إذن: $\boxed{(\alpha;\beta) = (2;1)}$.

• كتابة العدد M في النظام العشري:

$M = 80(2) + 260(1) + 1026 = \boxed{1446 = M}$

5/ ا/ تحليل العدد 2025 إلى جداء عوامل أولية: $\boxed{2025 = 3^4 \times 5^2}$

• الأعداد الطبيعية التي مربع كل منها يقسم 2025 : هي: 1 ، 3 ، 5 ، 9 ، 15 ، 45

ب/ عيّن كل الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق: $m^2-8d^2=2025$:

لدينا: $PGCD(a;b)=d$ و $PPCM(a;b)=m$ ومنه: $a\cdot b=m\cdot d$

وكذلك: $\begin{cases}a=d\cdot a'\\ b=d\cdot b'\end{cases}$ حيث: $a'\wedge b'=1$ ومنه: $d^2a'b'=dm$

إذن: $m=da'b'$ بالتعويض نجد: $(da'b')^2-8d^2=2025$ ومنه:

$d^2((a'b')^2-8)=2025$ وبالتالي: $d^2|2025$

ومنه: $d\in\{1;3;5;9;15;45\}$ إذن:

- لما $d=1$ تصبح: $(a'b')^2=2033$ ليس لها حلول طبيعية.
- لما $d=3$ تصبح: $(a'b')^2=233$ ليس لها حلول طبيعية.
- لما $d=5$ تصبح: $(a'b')^2=89$ ليس لها حلول طبيعية.
- لما $d=9$ تصبح: $(a'b')^2=33$ ليس لها حلول طبيعية.
- لما $d=15$ تصبح: $(a'b')^2=17$ ليس لها حلول طبيعية.
- لما $d=45$ تصبح: $(a'b')^2=9$ ومنه: $a'b'=3$ ،

ومنه: $\{(a';b')\in\{(1;3);(3;1)\}$ إذن: $\boxed{(a;b)\in\{(45;135),(135;45)\}}$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I/ $g(x)=-e^x(e^x+2x)$ و $D_g=[0;+\infty[$.

1/ حساب الصورة والنهاية:

- $g(0)=-e^0(e^0+2(0))=-1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}-e^x(e^x+2x)=-\infty$

(لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}-e^x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+2x)=+\infty$)

2/ حساب عبارة المشتقة: لدينا من أجل كل x من $[0;+\infty[$:

- $g'(x)=-e^x(e^x+2x)+(e^x+2)(-e^x)=-e^x(2e^x+2x+2)$

$\boxed{g'(x)=-2e^x(e^x+x+1)}$

- **إشارة المشتق:**

لدينا x من المجال $[0;+\infty[$ أي: $x\geq 0$ ومنه: $x+1>0$ وكذلك $e^x>0$

إذن: $g'(x)<0$.

II/ $f(x)=\frac{x}{2}\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)$ و $D_f=\mathbb{R}$.

1/ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(-x)=f(x)$: من أجل كل عدد حقيقي x :

- $f(-x)=-\frac{x}{2}\left(\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)=-\frac{x}{2}\left(\frac{(1-e^{-x})e^x}{(1+e^{-x})e^x}\right)$

$=-\frac{x}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)=\frac{x}{2}\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)=f(x)$

- **الإستنتاج:** بما أن $\mathbb{R}$ متناظرة بالنسبة إلى 0 فإننا نستنتج أن الدالة f زوجية وبالتالي منحناها البياني (C_f) متناظر بالنسبة إلى حامل محور التراتيب.

2/ ا/ حساب النهاية:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2}\left(\frac{e^x(e^{-x}-1)}{e^x(e^{-x}+1)}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2}\left(\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}\right)=-\infty$

(لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$ ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}\right)=-1$)

ب/ أثبت أن المستقيم (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+\frac{x}{2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2}\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}+1\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2}\left(\frac{1-e^x+1+e^x}{1+e^x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2}\left(\frac{2}{1+e^x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{1+e^x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x(e^{-x}+1)}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}\times\frac{1}{e^{-x}+1}\right)=0$

(لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$ ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{-x}+1}=1$

وكذلك: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$)

إذن المستقيم (Δ) ذو معادلة $y=-\frac{x}{2}$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

ج/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) :

لدينا مما سبق من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

- $f(x)+\frac{x}{2}=\frac{x}{1+e^x}$

لدينا $(e^x+1)>0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة x ، إذن:

- (C_f) يقع تحت (Δ) على المجال $]-\infty;0[$.
- (C_f) يقع فوق (Δ) على المجال $]0;+\infty[$.
- (C_f) و (Δ) يتقاطعان عند المبدأ $O(0;0)$.

3/ ا/ المشتق: من أجل كل x من المجال $[0;+\infty[$:

$$\bullet\ f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)+\frac{1}{2}x\left(\frac{-e^x(e^x+1)-e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}+x\cdot\frac{-2e^x}{(1+e^x)^2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{(1-e^x)(1+e^x)}{(1+e^x)^2}+\frac{-2xe^x}{(1+e^x)^2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1-e^{2x}-2xe^x}{(1+e^x)^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1-e^x(e^x+2x)}{(1+e^x)^2}\right)$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{1+g(x)}{2(1+e^x)^2}}$$

ب/ إتجاه التغير:

من أجل كل x من $[0;+\infty[$ لدينا : $g'(x)<0$ فالدالة g متناقصة تماما على $[0;+\infty[$ ومنه: $g(x)\leq g(0)$ أي: $g(x)\leq -1$ إذن: $g(x)+1\leq 0$

ومنه من أجل كل x من المجال $[0;+\infty[$ يكون: $f'(x)\leq 0$

فالدالة f متناقصة على المجال $[0;+\infty[$

وبما أن الدالة f زوجية فإنها متزايدة على المجال $]-\infty;0]$.

• جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

4/ ا/ تبيان أن المعادلة $f(x)=-1$ تقبل حلين بالضبط:

لدينا على المجال $[0;+\infty[$ الدالة f مستمرة ورتيبة تماما

وكذلك: $f(0)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ وبما أن: $-1\in\ ]-\infty;0[$

فإن المعادلة $f(x)=-1$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[0;+\infty[$

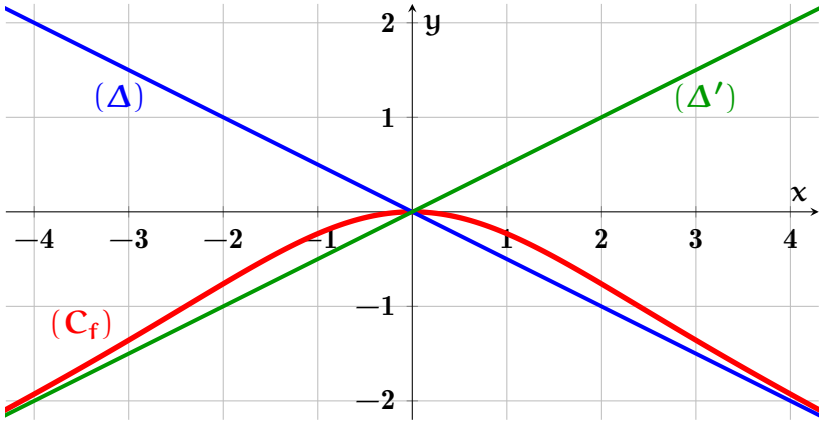
وبما أن: $f(2.3)=-0.94>-1$ و $f(2.4)=-1.0003<-1$

فإن: $2.3<\alpha<2.4$.

وبما أن الدالة f زوجية فإن المعادلة $f(x)=-1$ تقبل حلا وحيدا β على المجال $]-\infty;0]$ حيث: $-2.4<\beta<-2.3$.

ب/ بما أن (C_f) متناظر بالنسبة لحامل محور التراتيب، فإنه يقبل كذلك مستقيما مقاربا مائلا (Δ') عند $-\infty$ معادلته: $y=\frac{x}{2}$.

• الإنشاء:



ج/ تعيين قيم الوسيط الحقيقي m :

لدينا: $1-e^x=2m(1+e^x)$ تكافئ: $\frac{1-e^x}{1+e^x}=2m$

تكافئ: $x\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)=2mx$ تكافئ: $\frac{x}{2}\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)=mx$

تكافئ: $f(x)=mx$.

من خلال التمثيل البياني، نجد أن هذه المعادلة تقبل حلين متمايزين بالضبط لما $m\in\left]-\frac{1}{2};0\right[\cup\left]0;\frac{1}{2}\right[$.

III/ لدينا $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)+\frac{u_n}{2}$.

1/ البرهان بالتراجع:

نسمي الخاصية: $P(n)$ بـ: $u_n>0$ ولنثبت صحتها من أجل كل عدد طبيعي n .

- **من أجل** $n = 0$ لدينا $u_0 = 1$ أي: $u_0 > 0$ إذن الخاصية $P(0)$ صحيحة.

- ليكن n عددا طبيعيا، حيث الخاصية $P(n)$ صحيحة أي: $u_n > 0$ ومنه:

$f(u_n) + \frac{u_n}{2} > 0$ (لأنه من أجل كل $x > 0$ يكون: $f(x) - \frac{x}{2} > 0$)

أي: $u_{n+1} > 0$ وبالتالي إذاكانت $P(n)$ صحيحة فإن $P(n+1)$ صحيحة.

إذن حسب مبدأ البرهان بالتراجع، من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$.

2/ دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) : لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

- $u_{n+1} - u_n = f(u_n) + \frac{u_n}{2} - u_n = f(u_n) - \frac{u_n}{2}$

لدينا على المجال $]0;+\infty[$ المنحنى (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ') ،

ومنه من أجل كل $x > 0$ يكون: $f(x) - \frac{x}{2}$

وبما أن $u_n > 0$ فإن: $u_{n+1} - u_n < 0$ فالمتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

- **الإستنتاج:**

المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ ومحدودة من الأسفل وبالتالي هي متقاربة.

3/ ا/ تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$:

لدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n = f(u_n) \leq 0$

(لأنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون: $f(x) \leq 0$) ومنه: $\boxed{u_{n+1} < \frac{1}{2}u_n}$.

ب/ إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$ و كذلك: $u_n > 0$

ومنه:
$$\begin{cases} 0 < u_n \leq \frac{1}{2}u_{n-1} \\ 0 < u_{n-1} \leq \frac{1}{2}u_{n-2} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 0 < u_1 \leq \frac{1}{2}u_0 \end{cases}$$

بالضرب طرفا لطرف ثم الإختزال، نجد: $0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u_0$.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n يكون: $0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

- **حساب النهاية:**

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ ومن الحصر السابق نستنتج أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = 0$.

- انتهى الموضوع الثاني -

رابط الإطلاع على الموضوع إلكترونيا، مع الإجابة النموذجية:

تمنياتنا بالتوفيق والنجاح في شهادة البكالوريا
لكل تلاميذنا الشرفاء...