



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية



الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبي

دورة: ماي 2025

أكاديمية بهجة برج البحري

الشعبة: رياضيات

المدة: 04 سا و 30 د

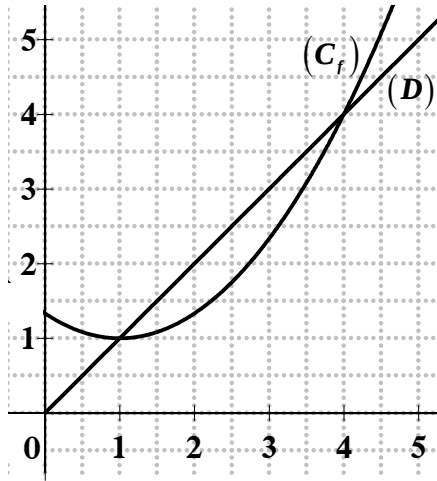
إعداد الأستاذ عبد الحميد بوقطوف

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)



f الدالة العددية المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1)^2$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{i}; \vec{j})$ و (D) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ كما هو موضح في الشكل المقابل.

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد

$$u_{n+1} = f(u_n), \quad n \text{ طبيعي}$$

1) أ- أعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2 و u_3 مبرزاً خطوط الإنشاء.

ب- ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leq u_n \leq 4$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(u_n - 1)(u_n - 4), \quad n \text{ طبيعي}$$

ج- استنتج أن المتتالية (u_n) متناقصة وأنها متقاربة.

$$(3) \quad (v_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ: } v_n = \ln\left(\frac{u_n - 1}{3}\right)$$

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 يطلب تعيين حدها الأول.

ب- عبر عن v_n بدلالة n

$$(4) \quad \text{نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم } n, \quad w_n = \left(\frac{(u_0 - 1)(u_1 - 1)(u_2 - 1) \dots (u_{n-1} - 1)}{3^n} \right)$$

$$\text{أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم } n, \quad \frac{1}{2^n} \ln(w_n) = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\text{ب- استنتج } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \ln(w_n)$$

التمرين الثاني: (03,5 نقاط)

يحتوي وعاء على 12 بطاقة منها 4 بطاقات تحمل العدد 1 و 6 بطاقات تحمل العدد e و 6 بطاقات تحمل العدد $\frac{1}{e}$

كل البطاقات متماثلة ولا نفرق بينها باللمس.



نسحب على التوالي بطاقتين من الوعاء مع إرجاع البطاقة المسحوبة إلى الوعاء في كل مرة.
ليكن x الرقم المسجل على البطاقة المسحوبة الأولى و y الرقم المسجل على البطاقة المسحوبة الثانية.

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

نعتبر النقطة M ذات اللاحقة $z = \ln x + i \ln y$ ونعتبر الأحداث التالية:

A : "نقطة M من حامل محور الفواصل" ، B : "قيس الزاوية الموجهة $(\vec{OM}; \vec{u})$ يساوي $-\frac{\pi}{4}$ "

C : "نقطة M من الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1"

(1) أحسب $p(A)$ و $p(B)$

(2) بين أن $p(C) = \frac{4}{9}$

(3) علما أن النقطة M من حامل محور الفواصل، ما احتمال أن تكون من الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1؟

(4) المتغير العشوائي الذي يرافق بكل عملية سحب لكريتين المسافة OM

أ- برر أن قيم المتغير العشوائي X هي: 0، 1 و $\sqrt{2}$

ب- عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب $p(e^{\sqrt{2}-x} > 1)$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $u_n = \alpha \times 2^n + \beta \times (-3)^n$ حيث α و β عدنان صحيحان.

(1) أ- باستعمال خوارزمية إقليدس، أوجد ثنائية $(\alpha_0; \beta_0)$ حلا للمعادلة (E) $8\alpha - 27\beta = -11 \dots$

ب- حل المعادلة (E)

(2) أ- أوجد العدد الصحيح k حتى تكون الثنائية $(27k+110; 8k+33)$ حلا للمعادلة (E') $4\alpha + 9\beta = 17 \dots$

ب- استنتج قيمتي α و β بحيث يكون $u_2 = 17$ و $u_3 = -11$

(3) نضع $\alpha = 2$ و $\beta = 1$

أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \equiv 3 \times 2^n [5]$

ب- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد u_n على 5

(4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $w_n = 2^{n+1} + (-3)^n$ و $S_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$

أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n \equiv 2 - 4 \times 2^n [5]$

ب- استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد S_{2025} على 5

التمرين الرابع: (07,5 نقاط)

1. الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ ب: $g(x) = \frac{x}{x-1} - \ln|x-1|$

(1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$

(2) أ- احسب $g'(x)$ الدالة المشتقة للدالة g

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.



(3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $4 < \alpha < 5$

(4) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R} - \{1\}$

$$f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \text{ الدالة العددية المعرفة على } \mathbb{R} - \{1\} \text{ بـ: } \begin{cases} f(x) = \frac{\ln|x-1|}{x} & ; x > 0 \\ f(x) = \frac{-6e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2} & ; x \leq 0 \end{cases}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس ($O, \vec{i}; \vec{j}$) (وحدة الطول $2cm$)

(1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجةين بيانيا.

ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ثم فسر النتيجةين بيانيا.

(2) أ- بين أن: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\frac{1}{6}$

ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ (إرشاد: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) + x}{x^2} = -\frac{1}{2}$)

ج- فسر النتيجةين بيانيا.

(3) بين أن: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$

(4) أ- أحسب $f'(x)$

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(5) أحسب $f(-1)$ ، $f(0)$ ، $f(2)$ و $f(5)$ ثم أنشئ (C_f) (نأخذ $\alpha \approx 4,5$)

(6) أ- أوجد العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل $x \neq -2$ و $x \neq -1$ ، $\frac{-6x}{x^2 + 3x + 2} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+1}$

ب- استنتج أن: $\frac{-6e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2} = \frac{-12e^{-x}}{1 + 2e^{-x}} + \frac{6e^{-x}}{1 + e^{-x}}$

ج- أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين $x = -\ln 2$ و $x = 0$

انتهى الموضوع الأول



الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

n عدد طبيعي أكبر أو يساوي 5

M و N عدنان طبيعيان يكتبان على الترتيب $100n$ و $n001$ في نظام التعداد الذي أساسه $n+1$

(1) أكتب كلا من M و N في النظام الذي أساسه n

(2) أ- أكتب $M + N$ في النظام الذي أساسه $n+1$

ب- استنتج أن $M + N = k(n+1)$ حيث k عدد طبيعي يطلب تعيينه بدلالة n

ج- أكتب k في النظام الذي أساسه n

(3) برهن أنه يوجد عدنان طبيعيان غير معدومين a و b يحققان: $\overline{ab}^n \times \overline{aaa}^n = k$

(4) أوجد جميع الثنائيات $(\alpha; \beta)$ من الأعداد الطبيعية غير المعدومة التي تحقق: $d + m = \beta + 9$

حيث: $d = PGCD(\alpha; \beta)$ و $m = PPCM(\alpha; \beta)$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(I_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $I_0 = \int_0^1 e^{-x} dx$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$

(1) أ- تحقق أن: $I_0 = 1 - \frac{1}{e}$

ب- باستعمال المكاملة بالتجزئة، برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $I_{n+1} = (n+1)I_n - e^{-1}$

(2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $\frac{1}{(n+1)e} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ ثم استنتج نهاية المتتالية (I_n)

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{1}{n!} I_n$

أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = -\frac{e^{-1}}{(n+1)!}$

ب- استنتج أن: $e(1 - u_n) = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $(z + 2 - 3i)(z^2 - 2z + 10) = 0$

II. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

نعتبر النقط A ، B و C لاحقاتها $z_A = -2 + 3i$ ، $z_B = 1 - 3i$ و $z_C = \overline{z_B}$ على الترتيب.

(1) أ- أكتب على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسّي العدد المركب $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

ب- أوجد طبيعة التحويل النقطي T الذي يحول النقطة A إلى النقطة B يطلب تحديد عناصره المميزة.

ج- بين أن النقط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة (Γ) يطلب تعيين مركزها Ω ونصف قطرها r



$$(2) \quad (\Delta) \text{ مجموعة النقط } M(x; y) \text{ ذات اللاحقة } z = x + yi \text{ التي تحقق: } \left| \frac{z - z_A}{z - z_C} \right| = 1$$

أ- عين ثم أنشئ المجموعة (Δ)

ب- عين ثم أنشئ المجموعة (Δ') صورة المجموعة (Δ) بالتحويل T

(3) أ- عين z_D لاحقة النقطة D حتى تكون النقطة C مرجحا للجملة $\{(A;1), (B;1), (D;-1)\}$

ب- بين أن النقطة D هي نظيرة النقطة C بالنسبة إلى النقطة Ω

ج- عين بدقة طبيعة الرباعي $ADBC$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. n عدد طبيعي غير معدوم.

$f_n(x) = x^n e^{1-x}$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

(C_n) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}; \vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$)

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$

(2) بين أن جميع المنحنيات (C_n) تمرّ من نقطتين ثابتتين يطلب تعيين إحداثيتهما.

(3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f_n'(x) = (n-x)f_{n-1}(x)$

(4) أ- أدرس حسب شفعية n اتجاه تغير الدالة f_n ثم شكل جدول تغيراتها.

ب- أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1})

ج- أنشئ في نفس المعلم المنحنيات (C_1) ، (C_2) و (C_3)

II. (I_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $I_0 = \int_0^1 e^{1-x} dx$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$

(1) أحسب I_1 و I_0

(2) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$

ب- استنتج I_2

III. (1) A_n مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_n) و (C_{n+1}) والمستقيمين $x=0$ و $x=1$

عبر عن A_n بدلالة n و I_n

(2) α عدد حقيقي أكبر تماما من 1

$S(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_1) و (C_2) والمستقيمين $x=0$ و $x=\alpha$

أ- برهن أن $S(\alpha) = 24 - 4e - 4(\alpha^2 + \alpha + 1)e^{1-\alpha}$

ب- بين أن $[2A_1 = S(\alpha)]$ تكافئ $[e^\alpha = \alpha^2 + \alpha + 1]$ ثم استنتج وجود وحدانية للعدد α

انتهى الموضوع الثاني

حل مقترح لامتحان البكالوريا التجريبي

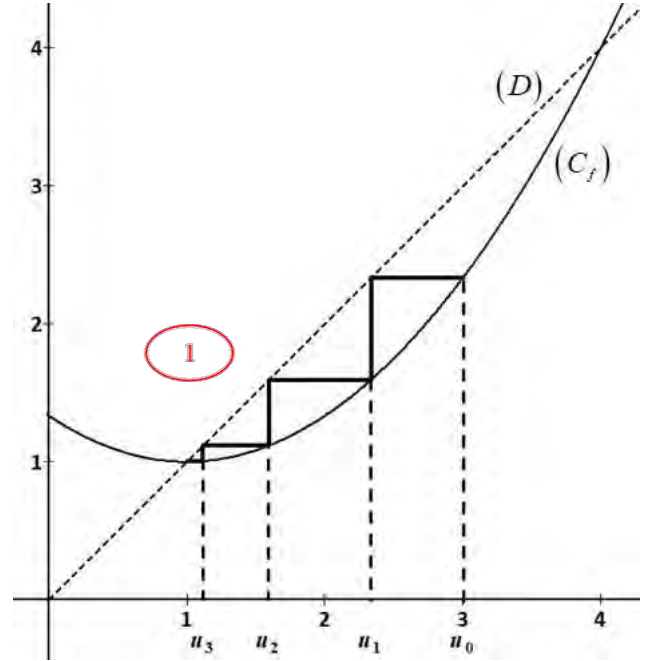
دورة ماي 2025

شعبة الرياضيات

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 ن)

(1) أ- تمثيل الحدود u_0, u_1, u_2 و u_3 على حامل محور الفواصل:



(1) ب- تخمين اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها:

• نلاحظ أن $u_0 > u_1 > u_2 > u_3$

وعليه: المتتالية (u_n) متناقصة. (0,25)

• ونلاحظ أن حدود المتتالية (u_n) تتقارب نحو فاصلة نقطة تقاطع المنحنى

(C_f) والمستقيم (D)

وعليه: المتتالية (u_n) متقاربة. (0,25)

(2) أ- البرهان بالتراجع أن $1 \leq u_n \leq 4$ من أجل كل عدد طبيعي n :

لتكن $P(n)$ الخاصية: " $1 \leq u_n \leq 4$ "

من أجل $n=0$ لدينا: $u_0 = 3$ و $1 \leq 3 \leq 4$ أي $1 \leq u_0 \leq 4$

ومنه: $P(0)$ محققة. (0,25)

ليكن $n \in \mathbb{N}$

نفرض أن الخاصية $P(n)$ صحيحة أي $1 \leq u_n \leq 4$

ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$ أي $1 \leq u_{n+1} \leq 4$

لدينا: $1 \leq u_n \leq 4$

والدالة المرفقة بالمتتالية (u_n) متزايدة تماما على المجال $[1; 4]$

وعليه: $f(1) \leq f(u_n) \leq f(4)$ (0,25)

ومنه: $1 \leq u_{n+1} \leq 4$

لأن: $f(u_n) = u_{n+1}$ ، $f(1) = 1$ و $f(4) = 4$

إذن: الخاصية $P(n+1)$ صحيحة.

وبالتالي:

وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع، فإن $1 \leq u_n \leq 4$ من أجل كل عدد

طبيعي n (0,25)

(2) ب- تبين أن $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(u_n - 1)(u_n - 4)$ من أجل كل عدد

طبيعي n :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$$

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{3}(u_n - 1)^2 - u_n$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(u_n - 1)^2 - (u_n - 1)$$

$$u_{n+1} - u_n = (u_n - 1) \left[\frac{1}{3}(u_n - 1) - 1 \right]$$

$$u_{n+1} - u_n = (u_n - 1) \left(\frac{1}{3}u_n - \frac{1}{3} - 1 \right)$$

$$u_{n+1} - u_n = (u_n - 1) \left(\frac{1}{3}u_n - \frac{4}{3} \right)$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(u_n - 1)(u_n - 4) \quad (0,50)$$

(2) ج- استنتاج أن المتتالية (u_n) متناقصة وأنها متقاربة:

• لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq 4$

أي: $u_n - 1 \geq 0$ و $u_n - 4 \leq 0$

فيكون: $\frac{1}{3}(u_n - 1)(u_n - 4) \leq 0$ أي: $u_{n+1} - u_n \leq 0$

ومنه: نستنتج أن المتتالية (u_n) متناقصة. (0,25)

• ولدينا: المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 1

ومنه: نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو نهاية ℓ (0,25)

(3) أ- تبين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 يطلب تعيين حدها الأول:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ومن أجل $n \neq 1$:

$$v_{n+1} = \ln \left(\frac{u_{n+1} - 1}{3} \right)$$

$$v_{n+1} = \ln \left(\frac{f(u_n) - 1}{3} \right)$$

$$v_{n+1} = \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{3}(u_n - 1)^2 - 1}{3} \right)$$

$$v_{n+1} = \ln \left(\frac{\frac{1}{3}(u_n - 1)^2}{3} \right)$$

$$v_{n+1} = \ln \left(\frac{(u_n - 1)^2}{9} \right)$$

$$v_{n+1} = \ln \left(\frac{u_n - 1}{3} \right)^2$$

$$v_{n+1} = 2 \times \ln \left(\frac{u_n - 1}{3} \right)$$

$$v_{n+1} = 2 \times v_n$$

ومنه: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = 2$ (0,50)

ومنه:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \ln(w_n) = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \quad (0,25)$$

التمرين الثاني: (03,5 ن)

1	1	1	1	e	e
$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e}$

نسحب على التوالي بطاقتين من الوعاء مع إرجاع البطاقة المسحوبة إلى الوعاء في كل مرة.

فيكون عدد الحالات الممكنة لهذا السحب: $12^2 = 144$

نسجل في الجدول التالي جميع الحالات الممكنة للنقطة M ذات اللاحقة z

x	y	$z = (\ln x) + i(\ln y)$
1	1	$z = 0$
1	e	$z = i$
1	$\frac{1}{e}$	$z = -i$
e	e	$z = 1 + i$
e	1	$z = 1$
e	$\frac{1}{e}$	$z = 1 - i$
$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e}$	$z = -1 - i$
$\frac{1}{e}$	1	$z = -1$
$\frac{1}{e}$	e	$z = -1 + i$

(1) حساب $p(A)$ و $p(B)$

• A : "نقطة M من حامل محور الفواصل"

معناه: $z = 0$ أو $z = 1$ أو $z = -1$

ومنه: $p(A) = \frac{4^2 + 2^1 \times 4^1 + 6^1 \times 4^1}{12^2}$ نجد: $p(A) = \frac{1}{3}$ (0,50)

• B : "قيس الزاوية الموجهة $(\vec{OM}; \vec{u})$ يساوي $-\frac{\pi}{4}$ "

الحدث B يكافئ: "قيس الزاوية الموجهة $(\vec{u}; \vec{OM})$ يساوي $\frac{\pi}{4}$ "

معناه: $z = 1 + i$

ومنه: $p(B) = \frac{2^2}{12^2}$ نجد: $p(B) = \frac{1}{36}$ (0,50)

(2) تبيان أن $p(C) = \frac{4}{9}$

• C : "نقطة M من الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1"

معناه: $z = i$ أو $z = -i$ أو $z = 1$ أو $z = -1$

ومنه: $p(C) = \frac{4^1 \times 2^1 + 4^1 \times 6^1 + 2^1 \times 4^1 + 6^1 \times 4^1}{12^2}$

نجد: $p(C) = \frac{4}{9}$ (0,50)

وحدها الأول v_0 حيث:

$$v_0 = \ln\left(\frac{u_0 - 1}{3}\right)$$

$$v_0 = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \quad (0,25)$$

(3) ب- التعبير عن v_n بدلالة n :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه: $v_n = 2^n \times \ln\left(\frac{2}{3}\right)$ (0,25)

(4) أ- تبيان أن $\frac{1}{2^n} \ln(w_n) = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \ln\left(\frac{2}{3}\right)$ من أجل كل عدد طبيعي

غير معدوم n :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ومن أجل $u_n \neq 1$:

$$w_n = \left(\frac{(u_0 - 1)(u_1 - 1)(u_2 - 1) \dots (u_{n-1} - 1)}{3^n} \right)$$

ومنه:

$$\ln(w_n) = \ln\left(\frac{(u_0 - 1)(u_1 - 1) \dots (u_{n-1} - 1)}{3^n} \right)$$

$$\ln(w_n) = \ln[(u_0 - 1)(u_1 - 1) \dots (u_{n-1} - 1)] - \ln 3^n$$

$$\ln(w_n) = \ln(u_0 - 1) + \ln(u_1 - 1) + \dots + \ln(u_{n-1} - 1) - n \ln 3$$

$$\ln(w_n) = \ln\left(\frac{u_0 - 1}{3} \times 3\right) + \ln\left(\frac{u_1 - 1}{3} \times 3\right) + \dots + \ln\left(\frac{u_{n-1} - 1}{3} \times 3\right) - n \ln 3$$

$$\ln(w_n) = \ln\left(\frac{u_0 - 1}{3}\right) + \ln 3 + \ln\left(\frac{u_1 - 1}{3}\right) + \ln 3 + \dots + \ln\left(\frac{u_{n-1} - 1}{3}\right) + \ln 3 - n \ln 3$$

$$\ln(w_n) = \ln\left(\frac{u_0 - 1}{3}\right) + \ln\left(\frac{u_1 - 1}{3}\right) + \dots + \ln\left(\frac{u_{n-1} - 1}{3}\right) + (\ln 3 + \ln 3 + \dots + \ln 3) - n \ln 3$$

$$\ln(w_n) = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} + (\ln 3 + \ln 3 + \dots + \ln 3) - n \ln 3$$

$$\ln(w_n) = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} + n \ln 3 - n \ln 3$$

$$\ln(w_n) = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$$

$$\ln(w_n) = v_0 \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{2^n - 1}{2 - 1} \times \ln\left(\frac{2}{3}\right) = (2^n - 1) \times \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

ومنه:

$$\frac{1}{2^n} \ln(w_n) = \frac{1}{2^n} (2^n - 1) \times \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

إذن:

$$\frac{1}{2^n} \ln(w_n) = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \times \ln\left(\frac{2}{3}\right) \quad (0,50)$$

(4) ب- استنتاج $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \ln(w_n)$:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ ومنه:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2^n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{2^n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

التمرين الثالث: (04 ن)

(1) أ- إيجاد ثنائية $(\alpha_0; \beta_0)$ حلا للمعادلة $(E): 8\alpha - 27\beta = -11$ باستعمال خوارزمية إقليدس لدينا:

$$27 = 3 \times 8 + 3$$

$$8 = 2 \times 3 + 2$$

$$3 = 1 \times 2 + 1$$

ومنه:

$$3 - 2 = 1$$

$$3 - (8 - 2 \times 3) = 1$$

$$3 - 8 + 2 \times 3 = 1$$

$$3 \times 3 - 8 = 1$$

$$3(27 - 3 \times 8) - 8 = 1$$

$$3 \times 27 - 9 \times 8 - 8 = 1$$

$$-10 \times 8 + 27 \times 3 = 1$$

$$8(-10) - 27(-3) = 1 \dots (*)$$

بضرب طرفي المساواة (*) في العدد (-11) نجد:

$$8(110) - 27(33) = -11$$

ومنه: $(\alpha_0; \beta_0) = (110; 33)$ (0,50)

(1) ب- حل المعادلة (E) :

$$8\alpha - 27\beta = -11 \dots (E)$$

$$8(110) - 27(33) = -11 \dots (E_0)$$

ولدينا أيضا: (E_0) بطرح (E) من (E_0) نجد: (E'')

$$8(\alpha - 110) = 27(\beta - 33) \dots (E'')$$

من (E'') لدينا: 27 يقسم $8(\alpha - 110)$ و 27 أولي مع 8

ومنه: حسب مبرهنة غوص فإن 27 يقسم $\alpha - 110$

$$\text{أي } \alpha - 110 = 27k \text{ ومنه: } \alpha = 27k + 110 \text{ مع } k \in \mathbb{Z}$$

بتعويض قيمة α في (E'') نجد $y = 8k + 33$ مع $k \in \mathbb{Z}$

ومنه: $S_{(\alpha; \beta)} = \{(27k + 110; 8k + 33) / k \in \mathbb{Z}\}$ (0,50)

(2) أ- إيجاد العدد الصحيح k حتى تكون الثنائية $(27k + 110; 8k + 33)$ حلا للمعادلة (E')

$$4\alpha + 9\beta = 17 \dots (E')$$

الثنائية $(27k + 110; 8k + 33)$ حل للمعادلة (E') معناه:

$$4(27k + 110) + 9(8k + 33) = 17$$

$$108k + 440 + 72k + 297 = 17$$

$$180k = -720$$

$$k = -\frac{720}{180}$$

$$k = -4 \text{ (0,25)}$$

(2) ب- استنتاج قيمتي α و β بحيث يكون $u_2 = 17$ و $u_3 = -11$:

$$u_n = \alpha \times 2^n + \beta \times (-3)^n \text{ لدينا من أجل كل عدد طبيعي } n$$

$$u_2 = 4\alpha + 9\beta = 17 \dots (E')$$

$$u_3 = 8\alpha - 27\beta = -11 \dots (E)$$

من أجل $n = 3$ لدينا: (E) من أجل $n = 2$ لدينا: (E') من (1) ب- و (2) أ- نستنتج أن للمعادلتين (E) و (E') نفس الحلول من أجل $k = -4$

$$\text{ومنه: } \alpha = -27 \times 4 + 110 \text{ و } \beta = -8 \times 4 + 33$$

(3) حساب احتمال أن تكون النقطة M من الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1 علما أنها من حامل محور الفواصل:

معناه: حساب $p_A(C)$

$$p_A(C) = \frac{p(A \cap C)}{p(A)} = \frac{\frac{2^1 \times 4^1 + 6^1 \times 4^1}{12^2}}{\frac{1}{3}} \text{ ومنه:}$$

$$\text{نجد: } p_A(C) = \frac{2}{3} \text{ (0,50)}$$

(4) أ- تبرير أن قيم المتغير العشوائي X هي 0، 1 و $\sqrt{2}$:

نستعين بالجدول التالي:

x	y	$z = (\ln x) + i(\ln y)$	$X = OM = z $
1	1	0	0
1	e	i	1
1	$\frac{1}{e}$	$-i$	1
e	e	$1+i$	$\sqrt{2}$
e	1	1	1
e	$\frac{1}{e}$	$1-i$	$\sqrt{2}$
$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e}$	$-1-i$	$\sqrt{2}$
$\frac{1}{e}$	1	-1	1
$\frac{1}{e}$	e	$-1+i$	$\sqrt{2}$

(0,25)

ومنه: $X = \{0; 1; \sqrt{2}\}$

(4) ب- قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X وحساب $p(e^{\sqrt{2}-X} > 1)$:

$$p(X=0) = \frac{4^2}{12^2} = \frac{1}{9}$$

$$p(X=1) = p(C) = \frac{4}{9}$$

$$p(X=\sqrt{2}) = \frac{2^2 + 2^1 \times 6^1 + 6^2 + 6^1 \times 2^1}{12^2} = \frac{4}{9}$$

ومنه:

x_i	0	1	$\sqrt{2}$
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$

(0,75)

حساب $p(e^{\sqrt{2}-X} > 1)$:

$$p(e^{\sqrt{2}-X} > 1) = p(\sqrt{2} - X > 0)$$

$$p(e^{\sqrt{2}-X} > 1) = p(X < \sqrt{2})$$

$$p(e^{\sqrt{2}-X} > 1) = p(X=0) + p(X=1)$$

$$p(e^{\sqrt{2}-X} > 1) = \frac{5}{9} \text{ (0,50)}$$

التمرين الرابع: (07,5 ن)

1. الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ: $g(x) = \frac{x}{x-1} - \ln|x-1|$

(1) أ- حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x-1} - \ln(1-x) \right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t-1}{t} - \ln t \right)$$

$$\textcircled{0,25} = -\infty$$

لأن: $\lim_{t \rightarrow +\infty} (-\ln t) = -\infty$ و $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t-1}{t} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x-1} - \ln(x-1) \right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t+1}{t} - \ln t \right)$$

$$\textcircled{0,25} = -\infty$$

لأن: $\lim_{t \rightarrow +\infty} (-\ln t) = -\infty$ و $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t+1}{t} = 1$

(1) ب- حساب $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x}{x-1} - \ln(1-x) \right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{t-1}{t} - \ln t \right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{t} (t-1 - t \ln t) \right]$$

$$\textcircled{0,25} = -\infty$$

لأن: $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} = +\infty$ و $\lim_{t \rightarrow 0^+} (t-1) = -1$ و $\lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln t = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x}{x-1} - \ln(x-1) \right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{t+1}{t} - \ln t \right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (t+1 - t \ln t)$$

$$\textcircled{0,25} = +\infty$$

لأن: $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} = +\infty$ و $\lim_{t \rightarrow 0^+} (t+1) = 1$ و $\lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln t = 0$

(2) أ- حساب $g'(x)$ الدالة المشتقة للدالة g :

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{1\}$ ودالتها المشتقة:

$$g'(x) = \frac{x-1-x}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1}$$

$$g'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1}$$

$$g'(x) = \frac{-1-x+1}{(x-1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{-x}{(x-1)^2} \quad \textcircled{0,25}$$

(2) ب- دراسة اتجاه تغير الدالة g وتشكيل جدول تغيراتها:

نجد: $\alpha = 2$ و $\beta = 1$ $\textcircled{0,50}$

(3) أ- البرهان أن $u_n \equiv 3 \times 2^n [5]$ من أجل كل عدد طبيعي n :

من أجل $\alpha = 2$ و $\beta = 1$ لدينا: $u_n = 2 \times 2^n + (-3)^n$ ومنه:

$$u_n \equiv 2 \times 2^n + (-3)^n [5] \quad (-3 \equiv 2 [5])$$

$$u_n \equiv 2 \times 2^n + 2^n [5]$$

$$u_n \equiv 3 \times 2^n [5] \quad \textcircled{0,50}$$

(3) ب- دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد u_n على 5 حسب قيم n :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$n =$	$4p$	$4p+1$	$4p+2$	$4p+3$	$p \in \mathbb{N}$
$2^n \equiv$	1	2	4	3	$[5]$
$u_n \equiv$	3	1	2	4	$[5]$

1

حيث: $u_n \equiv 3 \times 2^n [5]$

(4) أ- البرهان أن $S_n \equiv 2 - 4 \times 2^n [5]$ من أجل كل عدد طبيعي n :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = 2^{n+1} + (-3)^n$

ولدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$

ومنه:

$$S_n = (2^1 + (-3)^0) + (2^2 + (-3)^1) + \dots + (2^{n+1} + (-3)^n)$$

$$S_n = (2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n+1}) + ((-3)^0 + (-3)^1 + \dots + (-3)^n)$$

$$S_n = 2 \times \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} + 1 \times \frac{(-3)^{n+1} - 1}{-3 - 1}$$

$$S_n = 2(2^{n+1} - 1) - \frac{1}{4}((-3)^{n+1} - 1)$$

$$4S_n = 8(2^{n+1} - 1) - ((-3)^{n+1} - 1)$$

$$4S_n = 8 \times 2^{n+1} - 8 - (-3)^{n+1} + 1$$

$$4S_n = 16 \times 2^n + 3(-3)^n - 7$$

ومنه:

$$\begin{cases} 4S_n \equiv 16 \times 2^n + 3(-3)^n - 7 [5] \\ 4 \equiv -1 [5] ; 16 \equiv 1 [5] ; -3 \equiv 2 [5] ; 7 \equiv 2 [5] \end{cases}$$

$$-S_n \equiv 2^n + 3 \times 2^n - 2 [5]$$

$$-S_n \equiv 4 \times 2^n - 2 [5]$$

$$S_n \equiv 2 - 4 \times 2^n [5] \quad \textcircled{0,50}$$

(4) ب- استنتاج باقي القسمة الإقليدية للعدد S_{2025} على 5:

$$\begin{cases} S_{2025} \equiv 2 - 4 \times 2^{2025} [5] \\ 2^{2025} \equiv 2 [5] ; (2025 = 4 \times 506 + 1) \end{cases}$$

$$S_{2025} \equiv 2 - 4 \times 2 [5]$$

$$S_{2025} \equiv -6 [5] ; (-6 \equiv 4 [5])$$

$$S_{2025} \equiv 4 [5]$$

$$S_{2025} \equiv 4 [5]$$

ومنه: باقي القسمة الإقليدية للعدد S_{2025} على 5 هو 4 $\textcircled{0,25}$

إشارة $g'(x)$ على $\mathbb{R} - \{1\}$ من إشارة $-x$ كما يلي:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$-x$	+	0	-	-
$g'(x)$	+	0	-	-

ومنه:

- الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty; 0]$

- الدالة g متناقصة تماما على كل من المجالين $[0; 1[$ و $]1; +\infty[$

جدول تغيراتها كالتالي:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	-
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$	$-\infty$

(3) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $4 < \alpha < 5$:

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[4; 5]$

ولدينا: $g(4) \times g(5) < 0$ أي: $g(5) \simeq -0,136$ و $g(4) \simeq +0,235$

ومنه: وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا

α حيث $4 < \alpha < 5$ يحقق $g(\alpha) = 0$

(4) استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R} - \{1\}$:

من جدول تغيرات الدالة g ومن السؤال (3) نستنتج إشارة $g(x)$ على

$\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي:

x	$-\infty$	0	1	α	$+\infty$	
$g(x)$	-	0	-	+	0	-

II. الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln|x-1|}{x} & ; x > 0 \\ \frac{-6e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2} & ; x \leq 0 \end{cases}$$

(1) أ- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم تفسير النتيجةين بيانيا:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2} = 0 \quad (0,25)$$

لأن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x-1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x-1)}{x-1} \times \frac{x-1}{x} \end{aligned}$$

$$(0,25) = 0$$

لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} = 1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x-1)}{x-1} = 0$

المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا أفقيا هو حامل محور

الفواصل و $y=0$ معادلة له. (0,25)

(1) ب- حساب $\lim_{x \rightarrow +1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ثم تفسير النتيجةين بيانيا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\ln(1-x)}{x} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln t}{1-t} \end{aligned}$$

$$(0,25) = -\infty$$

لأن: $\lim_{t \rightarrow 0} (1-t) = 1$ و $\lim_{t \rightarrow 0} \ln t = -\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +1} \frac{\ln(x-1)}{x} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln t}{t+1} \end{aligned}$$

$$(0,25) = -\infty$$

لأن: $\lim_{t \rightarrow 0} (t+1) = 1$ و $\lim_{t \rightarrow 0} \ln t = -\infty$

المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا عموديا و $x=1$ معادلة

له. (0,25)

(2) أ- تبين أن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\frac{1}{6}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-6e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2} + 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-6e^x + e^{2x} + 3e^x + 2}{x(e^{2x} + 3e^x + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 3e^x + 2}{x(e^{2x} + 3e^x + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)(e^x - 2)}{x(e^{2x} + 3e^x + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \times \frac{e^x - 2}{e^{2x} + 3e^x + 2} \end{aligned}$$

$$(0,25) = -\frac{1}{6}$$

لأن: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2}{e^{2x} + 3e^x + 2} = -\frac{1}{6}$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

(2) ب- حساب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1-x)}{x} + 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) + x}{x^2} \end{aligned}$$

$$(0,25) = -\frac{1}{2} \quad (\text{حسب الإرشاد المعطى})$$

(2) ج- تفسير النتيجةين بيانيا:

لدينا: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$

الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 0

ومنه: المنحنى (C_f) يقبل نصفي مماسين عند النقطة ذات الفاصلة 0 معامل

توجيهيهما $-\frac{1}{6}$ و $-\frac{1}{2}$ 0,25

معادلتيهما: $(T_d): y = -\frac{1}{2}x - 1$ و $(T_g): y = -\frac{1}{6}x - 1$

(3) تبين أن $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$

لدينا من I. (3) ومن أجل $\alpha \in]4; 5[$: $g(\alpha) = 0$

أي: $\ln(\alpha - 1) = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$ ومنه: $\frac{\alpha}{\alpha - 1} - \ln(\alpha - 1) = 0$

ولدينا من أجل $\alpha \in]4; 5[$: $f(\alpha) = \frac{\ln(\alpha - 1)}{\alpha}$

ومنه:

$f(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha - 1} = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \times \frac{1}{\alpha}$

$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$ 0,25

(4) أ- حساب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{0; 1\}$ ودالتها المشتقة:

• على المجال $]0; 1[\cup]1; +\infty[$:

لدينا: $f(x) = \frac{\ln|x-1|}{x}$ ومنه:

$f'(x) = \frac{\frac{x}{x-1} - \ln|x-1|}{x^2}$

$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ 0,25

• على المجال $]-\infty; 0[$:

لدينا: $f(x) = \frac{-6e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2}$ ومنه:

$f'(x) = \frac{-6e^x(e^{2x} + 3e^x + 2) + 6e^x(2e^{2x} + 3e^x)}{(e^{2x} + 3e^x + 2)^2}$

$f'(x) = \frac{6e^x(2e^{2x} + 3e^x - e^{2x} - 3e^x - 2)}{(e^{2x} + 3e^x + 2)^2}$

$f'(x) = \frac{6e^x(e^{2x} - 2)}{(e^{2x} + 3e^x + 2)^2}$

$f'(x) = \frac{6e^x(e^x - \sqrt{2})(e^x + \sqrt{2})}{(e^{2x} + 3e^x + 2)^2}$ 0,25

ومنه:

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} & ; x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[\\ f'(x) = \frac{6e^x(e^x - \sqrt{2})(e^x + \sqrt{2})}{(e^{2x} + 3e^x + 2)^2} & ; x \in]-\infty; 0[\end{cases}$$

(4) ب- دراسة اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها:

• إشارة $f'(x)$ على المجال $]0; 1[\cup]1; +\infty[$ من إشارة $g(x)$ من السؤال I. (4) لدينا:

$g'(x) < 0$ على كل من المجالين $]0; 1[$ و $]1; +\infty[$

$g'(x) > 0$ على المجال $]\alpha; +\infty[$

• إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty; 0[$ من إشارة $e^x - \sqrt{2}$

أي: $f'(x) < 0$ على المجال $]-\infty; 0[$

لأن: $e^x - \sqrt{2} < 0$ و $e^x + \sqrt{2} > 0$ و $e^x > 0$ و $(e^{2x} + 3e^x + 2)^2 > 0$

ومنه:

x	$-\infty$	0	1	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	+	0	-

وعليه:

- الدالة f متناقصة تماما على كل من المجالات $]-\infty; 0[$ ، $]0; 1[$ و

$]\alpha; +\infty[$

- الدالة f متزايدة تماما على المجال $]1; \alpha[$

يعطى جدول تغيراتها كالتالي:

x	$-\infty$	0	1	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	+	-
$f(x)$	0	-1	$-\infty$	$\frac{1}{\alpha - 1}$	0

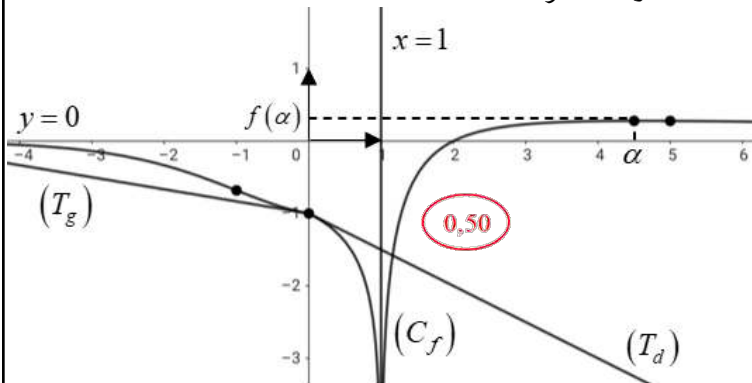
(5) حساب $f(-1)$ ، $f(0)$ ، $f(2)$ و $f(5)$ ثم إنشاء (C_f) :

لدينا:

$$\begin{cases} x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[: f(x) = \frac{\ln|x-1|}{x} \Leftrightarrow \begin{cases} f(2) = 0 \\ f(5) \simeq 0,3 \end{cases} \\ x \in]-\infty; 0[: f(x) = \frac{-6e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2} \Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) \simeq -0,7 \\ f(0) = -1 \end{cases} \end{cases}$$

إنشاء (C_f) :

ملاحظة: وحدة الطول 2cm



(6) إيجاد العددين الحقيقيين a و b :

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R} - \{-2; -1\}$

$$\frac{-6x}{x^2 + 3x + 2} = \frac{a}{x + 2} + \frac{b}{x + 1}$$

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04,5 ن)

(1) كتابة كلا من M و N في النظام الذي أساسه n :
لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 5$:

$$M = \overline{100n}^{n+1}$$

$$M = n \times (n+1)^0 + 0 \times (n+1)^1 + 0 \times (n+1)^2 + 1 \times (n+1)^3$$

$$M = n + 0 + 0 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

$$M = 1 + 4n + 3n^2 + n^3$$

$$M = 1 \times n^0 + 4 \times n^1 + 3 \times n^2 + 1 \times n^3$$

$$M = \overline{1341}^n \quad (0,50)$$

ولدينا من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 5$:

$$N = \overline{n001}^{n+1}$$

$$N = 1 \times (n+1)^0 + 0 \times (n+1)^1 + 0 \times (n+1)^2 + n \times (n+1)^3$$

$$N = 1 + 0 + 0 + n(n^3 + 3n^2 + 3n + 1)$$

$$N = 1 + n^4 + 3n^3 + 3n^2 + n$$

$$N = 1 \times n^0 + 1 \times n^1 + 3 \times n^2 + 3 \times n^3 + 1 \times n^4$$

$$N = \overline{13311}^n \quad (0,50)$$

(2) أ- كتابة $M + N$ في النظام الذي أساسه $n+1$:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 5$:

$$M + N = \overline{100n}^{n+1} + \overline{n001}^{n+1}$$

$$M + N = n \times (n+1)^0 + 0 \times (n+1)^1 + 0 \times (n+1)^2 + 1 \times (n+1)^3 + 1 \times (n+1)^0 + 0 \times (n+1)^1 + 0 \times (n+1)^2 + n \times (n+1)^3$$

$$M + N = (n+1)(n+1)^0 + 0 \times (n+1)^1 + 0 \times (n+1)^2 + (n+1)(n+1)^3$$

$$M + N = (n+1) + 0 + 0 + (n+1)^4$$

$$M + N = 0 \times (n+1)^0 + 1 \times (n+1)^1 + 0 \times (n+1)^2 + 0 \times (n+1)^3 + 1 \times (n+1)^4$$

$$M + N = \overline{10010}^{n+1} \quad (0,50)$$

(2) ب- استنتاج أن $M + N = k(n+1)$ حيث k عدد طبيعي يطلب تعيينه بدلالة n :

لدينا من (2) أ- ومن أجل كل عدد طبيعي $n \geq 5$:

$$M + N = \overline{10010}^{n+1}$$

$$M + N = 1 \times (n+1)^1 + 1 \times (n+1)^4$$

$$M + N = (n+1)^1 + (n+1)^4$$

$$M + N = (n+1)[1 + (n+1)^3]$$

$$M + N = (n+1)(1 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1)$$

$$M + N = (n+1)(n^3 + 3n^2 + 3n + 2)$$

$$M + N = k(n+1) \quad (0,50)$$

$$k = n^3 + 3n^2 + 3n + 2$$

حيث:

$$\frac{-6x}{x^2 + 3x + 2} = \frac{a(x+1) + b(x+2)}{(x+2)(x+1)}$$

$$\frac{-6x}{x^2 + 3x + 2} = \frac{ax + a + bx + 2b}{x^2 + 3x + 2}$$

$$\frac{-6x}{x^2 + 3x + 2} = \frac{(a+b)x + a + 2b}{x^2 + 3x + 2}$$

بالمطابقة نجد: $a + b = -6$ و $a + 2b = 0$

ومنه: $a = -12$ و $b = 6$ (0,25)

فيكون:

$$\frac{-6x}{x^2 + 3x + 2} = -\frac{12}{x+2} + \frac{6}{x+1}$$

$$(6) \text{ ب- استنتاج أن } \frac{-6e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2} = \frac{-12e^{-x}}{1 + 2e^{-x}} + \frac{6e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

من (6) أ- نستنتج أن:

$$\frac{-6e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2} = -\frac{12}{e^x + 2} + \frac{6}{e^x + 1}$$

ومنه:

$$\frac{-6e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2} = -\frac{12e^{-x}}{e^{-x}(e^x + 2)} + \frac{6e^{-x}}{e^{-x}(e^x + 1)}$$

$$\frac{-6e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2} = -\frac{12e^{-x}}{1 + 2e^{-x}} + \frac{6e^{-x}}{1 + e^{-x}} \quad (0,25)$$

(6) ج- حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور

الفواصل والمستقيمين $x = -\ln 2$ و $x = 0$:

لتكن $\mathcal{A}$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل

والمستقيمين $x = -\ln 2$ و $x = 0$

ملاحظة: (C_f) يقع أسفل حامل محور الفواصل على $[-\ln 2; 0]$

ومنه:

$$\mathcal{A} = 2 \times 2 \int_{-\ln 2}^0 -f(x) dx$$

$$= 4 \int_{-\ln 2}^0 \frac{6e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2} dx$$

$$= 4 \int_{-\ln 2}^0 \left(\frac{12e^{-x}}{1 + 2e^{-x}} - \frac{6e^{-x}}{1 + e^{-x}} \right) dx$$

$$= 4 \int_{-\ln 2}^0 \frac{12e^{-x}}{1 + 2e^{-x}} dx - 4 \int_{-\ln 2}^0 \frac{6e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx$$

$$= -24 \int_{-\ln 2}^0 \frac{-2e^{-x}}{1 + 2e^{-x}} dx + 24 \int_{-\ln 2}^0 \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx$$

$$= -24 \left[\ln(1 + 2e^{-x}) \right]_{-\ln 2}^0 + 24 \left[\ln(1 + e^{-x}) \right]_{-\ln 2}^0$$

$$= -24(\ln 3 - \ln 5) + 24(\ln 2 - \ln 3)$$

$$= -24 \ln 3 + 24 \ln 5 + 24 \ln 2 - 24 \ln 3$$

$$= 24(\ln 5 + \ln 2 - 2 \ln 3)$$

$$= 24(\ln 10 - \ln 9)$$

$$\mathcal{A} = 24 \ln \frac{10}{9} \text{ cm}^2 \quad (0,25)$$

(2) ج- كتابة k في النظام الذي أساسه n :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 5$:

$$k = n^3 + 3n^2 + 3n + 2$$

$$k = 2 + 3n + 3n^2 + n^3$$

$$k = 2 \times n^0 + 3 \times n^1 + 3 \times n^2 + 1 \times n^3$$

$$k = \overline{1332}^n \quad (0,50)$$

(3) البرهان أنه يوجد عدنان طبيعيين غير معدومين a و b يحققان:

$$k = \overline{ab}^n \times \overline{aaa}^n$$

$$k = \overline{ab}^n \times \overline{aaa}^n$$

تكافئ:

$$n^3 + 3n^2 + 3n + 2 = (b \times n^0 + a \times n^1)(a \times n^0 + a \times n^1 + a \times n^2)$$

$$n^3 + 3n^2 + 3n + 2 = (b + an)(a + an + an^2)$$

$$n^3 + 3n^2 + 3n + 2 = a(an + b)(n^2 + n + 1)$$

$$n^3 + 3n^2 + 3n + 2 = a(an^3 + an^2 + an + bn^2 + bn + b)$$

$$n^3 + 3n^2 + 3n + 2 = a(an^3 + (a+b)n^2 + (a+b)n + b)$$

$$n^3 + 3n^2 + 3n + 2 = a^2n^3 + a(a+b)n^2 + a(a+b)n + ab$$

بالمطابقة:

$$\begin{cases} a^2 = 1 \\ a(a+b) = 3 \\ ab = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \quad (0,50)$$

ومنه:

(4) إيجاد جميع الثنائيات $(\alpha; \beta)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق:

$$d + m = \beta + 9$$

$$d = \text{PGCD}(\alpha; \beta)$$

ومنه: $\alpha = \alpha' \times d$ و $\beta = \beta' \times d$ حيث α' و β' أوليان فيما بينهما.

$$\text{PPCM}(\alpha; \beta) \times \text{PGCD}(\alpha; \beta) = \alpha \times \beta$$

$$m \times d = \alpha \times \beta$$

$$m \times d = \alpha' \times d \times \beta' \times d$$

$$m = \alpha' \times \beta' \times d$$

$$d + m = \beta + 9$$

ومنه:

$$d + \alpha' \times \beta' \times d = \beta' \times d + 9$$

$$d + \alpha' \times \beta' \times d - \beta' \times d = 9$$

$$d(1 + \alpha' \times \beta' - \beta') = 9 \dots (*) \quad (0,25)$$

$$d \in D_9 = \{1; 3; 9\}$$

$$d = 1$$

(*) تكافئ:

$$1 + \alpha' \times \beta' - \beta' = 9$$

$$\alpha' \times \beta' - \beta' = 8$$

$$\beta'(\alpha' - 1) = 8$$

نلخص النتائج في الجدول التالي:

$\alpha' - 1$	1	2	4	8
α'	2	3	5	9
β'	8	4	2	1
$\text{PGCD}(\alpha'; \beta')$	4	1	1	1

ومنه:

$$(\alpha'; \beta') = \{(3; 4), (5; 2), (9; 1)\}$$

إذن:

$$(\alpha; \beta) = \{(3; 4), (5; 2), (9; 1)\} \quad (0,75)$$

$$d = 3$$

(*) تكافئ:

$$3(1 + \alpha' \times \beta' - \beta') = 9$$

$$1 + \alpha' \times \beta' - \beta' = 3$$

$$\alpha' \times \beta' - \beta' = 2$$

$$\beta'(\alpha' - 1) = 2$$

نلخص النتائج في الجدول التالي:

$\alpha' - 1$	1	2
α'	2	3
β'	2	1
$\text{PGCD}(\alpha'; \beta')$	2	1

ومنه:

$$(\alpha'; \beta') = \{(3; 1)\}$$

إذن:

$$(\alpha; \beta) = \{(9; 3)\} \quad (0,25)$$

$$d = 9$$

(*) تكافئ:

$$9(1 + \alpha' \times \beta' - \beta') = 9$$

$$1 + \alpha' \times \beta' - \beta' = 1$$

$$\alpha' \times \beta' - \beta' = 0$$

$$\beta'(\alpha' - 1) = 0$$

$$\text{بما أن } \beta' \in \mathbb{N}^* \text{ فإن } \alpha' - 1 = 0 \text{ أي: } \alpha' = 1$$

ومنه:

$$(\alpha'; \beta') = \{(1; \beta)\}$$

إذن:

$$(\alpha; \beta) = \{(9; 9\beta)\} \quad (0,25)$$

خلاصة:

الثنائيات $(\alpha; \beta)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق $d + m = \beta + 9$ هي:

$$(\alpha; \beta) = \{(3; 4), (5; 2), (9; 1), (9; 3), (9; 9\beta) / \beta \in \mathbb{N}^*\}$$

التمرين الثاني: (03,5 ن)

(1) أ- التحقق أن $I_0 = 1 - \frac{1}{e}$

$$I_0 = \int_0^1 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} - (-1) = -e^{-1} + 1 = -\frac{1}{e} + 1$$

$$I_0 = 1 - \frac{1}{e} \quad (0,50)$$

(1) ب- البرهان أن $I_{n+1} = (n+1)I_n - e^{-1}$ من أجل كل عدد طبيعي n :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$

ومنه: $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x} dx$

باستعمال المكاملة بالتجزئة، نضع: $v' = e^{-x}$ و $u = x^{n+1}$ 0,50

ومنه: $v = -e^{-x}$ و $u' = (n+1)x^n$

وعليه:

$$I_{n+1} = [-x^{n+1} e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)x^n e^{-x} dx$$

$$I_{n+1} = [-e^{-1} - 0] + (n+1) \int_0^1 x^n e^{-x} dx$$

$$I_{n+1} = -e^{-1} + (n+1)I_n$$

$$I_{n+1} = (n+1)I_n - e^{-1} \quad (0,50)$$

(2) البرهان أن $\frac{1}{(n+1)e} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n :

لدينا $x \in [0;1]$ أي: $0 \leq x \leq 1$ ومنه: $-1 \leq -x \leq 0$

وأيضاً: $e^{-1} \leq e^{-x} \leq 1 \dots (*)$

لدينا من أجل $x \in [0;1]$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq x^n \leq 1$

ومنه (*) تكافئ:

$$e^{-1} x^n \leq x^n e^{-x} \leq x^n$$

$$\int_0^1 e^{-1} x^n dx \leq \int_0^1 x^n e^{-x} dx \leq \int_0^1 x^n dx$$

$$e^{-1} \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 \leq I_n \leq \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1$$

$$\frac{1}{e} \left[\frac{1}{n+1} - 0 \right] \leq I_n \leq \left[\frac{1}{n+1} - 0 \right]$$

$$\frac{1}{(n+1)e} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} \quad (0,50)$$

استنتاج نهاية المتتالية (I_n) :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1)e} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1}$$

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n \leq 0$$

حسب مبرهنة النهاية بالحصص فإن:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0 \quad (0,50)$$

(3) أ- البرهان أن $u_{n+1} - u_n = \frac{e^{-1}}{(n+1)!}$ من أجل كل عدد طبيعي n :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{1}{n!} I_n$

ومنه:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} I_{n+1} - \frac{1}{n!} I_n$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} [(n+1)I_n - e^{-1}] - \frac{1}{n!} I_n$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)}{(n+1)!} I_n - \frac{e^{-1}}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} I_n$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)}{(n+1)n!} I_n - \frac{e^{-1}}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} I_n$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n!} I_n - \frac{e^{-1}}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} I_n$$

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{e^{-1}}{(n+1)!} \quad (0,50)$$

(3) ب- استنتاج أن $e(1 - u_n) = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$

من (3) أ- لدينا: $u_{n+1} - u_n = -\frac{e^{-1}}{(n+1)!}$

ومنه: $e(u_n - u_{n+1}) = \frac{1}{(n+1)!}$

فيكون:

$$n=0: e(u_0 - u_1) = \frac{1}{1!}$$

$$n=1: e(u_1 - u_2) = \frac{1}{2!}$$

$$n=2: e(u_2 - u_3) = \frac{1}{3!}$$

...

$$n-2: e(u_{n-2} - u_{n-1}) = \frac{1}{(n-1)!}$$

$$n-1: e(u_{n-1} - u_n) = \frac{1}{n!}$$

بالجمع نجد:

$$e(u_0 - u_1 + u_1 - u_2 + \dots + u_{n-2} - u_{n-1} + u_{n-1} - u_n) = \frac{1}{1!} + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}$$

$$e(u_0 - u_n) = \frac{1}{1!} + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$$e(u_0 - u_n) + \frac{1}{0!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$$e(u_0 - u_n) + 1 = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} \dots (1)$$

حيث:

$$u_0 = \frac{1}{0!} I_0 = 1 \times \left(1 - \frac{1}{e} \right) = 1 - \frac{1}{e}$$

(1) ج- تبيان أن النقط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة (Γ) يطلب تعيين مركزها Ω ونصف قطرها r :
 بما أن المثلث ABC قائم في C (السؤال 1. أ-) فإن الدائرة المحيطة به تشمل رؤوسه A ، B و C ومنه: النقط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة (Γ) التي قطرها هو وتر للمثلث ABC القائم في C (0,25)
 فيكون:

- مركزها Ω منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ ذات اللاحقتها z_Ω ونصف قطرها r حيث:

$$z_\Omega = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{-2 + 3i + 1 - 3i}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$r = \Omega A = \Omega B = \Omega C$$

$$r = |z_A - z_\Omega| = |z_B - z_\Omega| = |z_C - z_\Omega| \quad (0,25)$$

$$r = \left| 1 + 3i + \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{3}{2} + 3i \right| = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

(2) أ- تعيين ثم إنشاء المجموعة (Δ) :

$$\left| \frac{z - z_A}{z - z_C} \right| = 1 \quad \text{لدينا:}$$

تكافئ:

$$\left| \frac{z - z_A}{z - z_C} \right| = 1$$

$$|z - z_A| = |z - z_C|$$

$$AM = CM$$

ومنه: المجموعة (Δ) هي المستقيم المحوري للقطعة المستقيمة $[AC]$ (0,25)
 ملاحظة: إنشاء المجموعة (Δ) في آخر التمرين.

(2) ب- تعيين ثم إنشاء المجموعة (Δ') صورة المجموعة (Δ) بالتحويل T :
 لدينا من 1. أ- أن (T) يحول A إلى B و C نقطة صامدة.

أي أن صورة القطعة $[AC]$ بالتحويل T هي $[BC]$

ومنه: المجموعة (Δ') هي المستقيم المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$ وهو حامل محور الفواصل. (0,25)

ملاحظة: إنشاء المجموعة (Δ') في آخر التمرين.

(3) أ- تعيين z_D لاحقة النقطة D حتى تكون النقطة C مرجحا للجملة $\{(A;1), (B;1), (D;-1)\}$:

النقطة C مرجح للجملة $\{(A;1), (B;1), (D;-1)\}$ معناه:

$$z_C = \frac{1 \times z_A + 1 \times z_B - 1 \times z_D}{1 + 1 - 1}$$

ومنه:

$$z_C = \frac{1 \times z_A + 1 \times z_B - 1 \times z_D}{1 + 1 - 1}$$

$$z_D = z_A + z_B - z_C$$

$$z_D = -2 + 3i + 1 - 3i - 1 - 3i$$

$$z_D = -2 - 3i \quad (0,25)$$

(3) ب- تبيان أن النقطة D هي نظيرة النقطة C بالنسبة إلى النقطة Ω :

بتعويض u_0 بـ $1 - \frac{1}{e}$ في (1):

$$e \left(1 - \frac{1}{e} - u_n \right) + 1 = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$$-1 + e(1 - u_n) + 1 = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$$e(1 - u_n) = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \quad (0,50)$$

التمرين الثالث: (04,5 ن)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$(z + 2 - 3i)(z^2 - 2z + 10) = 0 \quad \dots (E)$$

$$z^2 - 2z + 10 = 0 \quad \text{أو} \quad z + 2 - 3i = 0 \quad (E)$$

$$\bullet \quad z + 2 - 3i = 0 \quad \text{معناه:} \quad z_0 = -2 + 3i$$

$$\bullet \quad z^2 - 2z + 10 = 0$$

$$\Delta = -36 = (6i)^2 \quad \text{نحسب المميز} \Delta \text{ فنجد:}$$

$$\text{ومنه: للمعادلة } z^2 - 2z + 10 = 0 \text{ حلان مترافقان } z_1 \text{ و } z_2 = \overline{z_1}$$

$$\text{هما: } z_1 = 1 - 3i \text{ و } z_2 = 1 + 3i$$

فتكون حلول (E) المعادلة هي:

$$(0,75) \quad S = \{z_0 = -2 + 3i; z_1 = 1 - 3i; z_2 = 1 + 3i\}$$

$$\text{11. } z_A = -2 + 3i, z_B = 1 - 3i, z_C = \overline{z_B} = 1 + 3i$$

(1) أ- كتابة العدد المركب $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ على الشكل الجبري ثم الأسّي:

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{1 - 3i - 1 - 3i}{-2 + 3i - 1 - 3i} = \frac{-6i}{-3} = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \text{لدينا:}$$

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \quad (0,50)$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC :

$$\text{لدينا: } \left| \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \right| = 2 \quad \text{ومنه: } CB = 2CA$$

$$\text{ولدينا: } \arg \left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{ومنه: } (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{2}$$

نستنتج أن المثلث ABC قائم في C (0,25)

(1) ب- إيجاد طبيعة التحويل النقطي T الذي يحول A إلى B يطلب تعيين عناصره المميزة:

$$\text{لدينا من 1. أ- : } \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{ومنه: } z_B - z_C = 2i(z_A - z_C)$$

بما أن $2i$ عدد مركب طويلته 2 تختلف عن 1 فإن التحويل النقطي T

الذي يحول A إلى B هو تشابه مباشر (0,25)

عناصره المميزة:

- مركزه النقطة الصامدة C ذات اللاحقة $z_C = 1 - 3i$

$$k = |2i| = 2 \quad \text{نسبته} \quad (0,25)$$

$$\theta = \arg(2i) = \frac{\pi}{2} \quad \text{زاويته}$$

معناه: نبين أن Ω هي منتصف القطعة $[CD]$

لدينا:

$$\frac{z_C + z_D}{2} = \frac{1 + 3i - 2 - 3i}{2} = -\frac{1}{2} = z_\Omega \quad (0,25)$$

ومنه: النقطة D هي نظيرة النقطة C بالنسبة إلى النقطة Ω

ملاحظة: يمكن أن نبرهن أيضا أن $\overrightarrow{C\Omega} = \overrightarrow{\Omega D}$

$$\begin{cases} \overrightarrow{C\Omega} = \overrightarrow{z_{\overline{C\Omega}}} = z_\Omega - z_C = -\frac{1}{2} - 1 - 3i = -\frac{3}{2} - 3i \\ \overrightarrow{\Omega D} = \overrightarrow{z_{\overline{\Omega D}}} = z_D - z_\Omega = -2 - 3i + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} - 3i \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{C\Omega} = \overrightarrow{\Omega D}$$

(3) ج- تعيين بدقة طبيعة الرباعي $ADBC$

لدينا: Ω منتصف $[AB]$ من (1) ج-

ولدينا: Ω منتصف $[CD]$ من (3) ب-

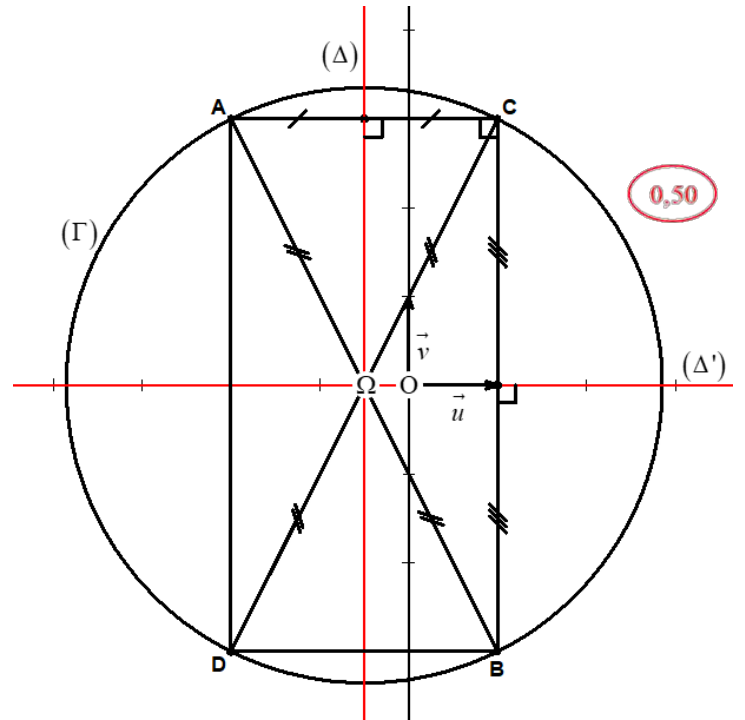
أي: $[AB]$ و $[CD]$ متناصفان.

ومنه: الرباعي $ADBC$ متوازي أضلاع. (0,25)

ولدينا: المثلث ABC قائم في C و $CB = 2CA$ من (1) أ-

ومنه: الرباعي $ADBC$ مستطيل. (0,25)

الإنشاءات في الشكل المرافق.



التمرين الرابع: (5, 07 ن)