



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

امتحان البكالوريا التجريبي

الشعبة: رياضيات

اختبار في مادة: الرياضيات

ثانوية أوبينيا تر الخاصة

دورة: ماي 2025

المدة: أربع ساعات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:
الموضوع الأول

التمرين الأول (4 ن)

نعتبر صندوقين غير شفافين U_1 و U_2 بهما كريات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس.

U_1 يحتوي على 5 كريات حمراء و 3 كريات خضراء .

U_2 يحتوي على 3 كريات حمراء و 4 كريات خضراء .

نرمي عشوائيا قطعة نقود غير مزيّفة، إذا تحصلنا على وجه نسحب عشوائيا كرتين في آن واحد من U_1 ، وإذا تحصلنا على ظهر نسحب عشوائيا كرتين على التوالي دون إرجاع من U_2 ، ونعتبر الأحداث الآتية.

الحدث A : "الحصول على كرتين من نفس اللون" .

الحدث U_i : "سحب الكرتين من الصندوق U_i " مع $i \in \{1; 2\}$

$$1. \text{ أ. بين أن } P_{U_1}(A) = \frac{13}{28} \text{ و } P_{U_2}(A) = \frac{3}{7}$$

ب. أنقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثم أكملها.

2. أحسب احتمال أن تكون الكرتين المسحوبتين من الصندوق U_2 علما أنّهما مختلفتين في اللون.

3. نعتبر X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل إمكانية عدد الكريات الخضراء المسحوبة.

$$\text{أ. بين أن } P(X=0) = \frac{1}{4} \text{ و } P(X=1) = \frac{31}{56} \text{ ثم استنتج قانون احتمال المتغير العشوائي } X$$

$$\text{ب. أحسب احتمال الحدث } (X^{1962} + X^{2025} + 2 \equiv 0 [X+1])$$

التمرين الثاني (4 ن)

المتتالية العددية $(U_n)_{n \geq 1}$ معرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $U_n = \frac{2^n}{n!}$

$$1. \text{ أ. بين أنه: من أجل كل } n \text{ من } \mathbb{N}^*, U_n > 0$$

ب. بين أن $(U_n)_{n \geq 1}$ متناقصة على $\mathbb{N}^*$ ثم استنتج أنّها متقاربة.

$$2. \text{ المتتالية العددية } (V_n)_{n \geq 1} \text{ معرفة على } \mathbb{N}^* \text{ كما يلي : } V_n = \frac{U_{n+1}}{U_n}$$

$$\text{أ. بين أنه من أجل كل } n \text{ من } \mathbb{N}^* \text{ حيث } n \geq 2, V_n \leq \frac{2}{3}$$

ب. أثبت أنه : من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ حيث $n \geq 2$ ، $U_n \leq \frac{9}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ، ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

3. من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ نضع : $S_n = \log(2V_1) + \log(3V_2) + \dots + \log(nV_{n-1})$

• أحسب S_n بدلالة n ثم استنتج أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = \log 2$

التمرين الثالث (5 ن)

نعتبر في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة (E) المعرفة كما يلي $1962x - 977y = 8$:

1. أ. بين أن العدد 977 أولي ثم استنتج أن المعادلة (E) تقبل حلولاً في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

ب. عين الحل الخاص $(x_0; y_0)$ للمعادلة (E) الذي يحقق $x_0 + 5y_0 = 11$

ج. استنتج مجموعة حلول المعادلة (E)

2. نعتبر L عدداً طبيعياً يكتب $\overline{\alpha\gamma\gamma\beta\beta\alpha}$ في نظام التعداد الذي أساسه 4 حيث α ، β و γ تشكل بهذا الترتيب حدوداً

متتابعة من متتالية حسابية والثنائية $(\alpha; \beta)$ حل للمعادلة (E)

• عين كلاً من α ، β و γ ثم أكتب L في النظام العشري.

3. حلل العدد 2025 إلى جداء عوامل أولية ثم استنتج قيم العدد الطبيعي n التي تحقق $2025 \equiv 0 [n^3]$

4. نضع : $PGCD(a; b) = d$ و $PPCM(a; b) = m$ حيث $(a; b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

• عين كل الثنائيات $(a; b)$ حيث $a > b$ والتي تحقق

$$\begin{cases} m = 6d \\ a^3 + b^4 = 2025 \end{cases}$$

التمرين الرابع (7 ن)

(I) الدالة العددية g معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = x \ln x - 1$

1. شكل جدول تغيرات الدالة g على $]0; +\infty[$

2. أ. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $1,7 < \alpha < 1,8$

ب. استنتج حسب قيم x من $]0; +\infty[$ إشارة $g(x)$

(II) الدالة العددية f معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = (x-1)(\ln x - 1)$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{j}\| = 1cm$

1. أ. أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ وفسر النتيجة هندسياً ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$

ج. بين أن f متناقصة تماماً على $]0; \alpha[$ و متزايدة تماماً على $[\alpha; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

2. أ. أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة التي فاصلتها 1

ب. أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T)

3. أ. أنشئ كلاً من (T) و (C_f) . (تُعطى : $f(\alpha) \approx -0,33$).

ب. باستخدام (C_f) ناقش بياناً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = -x + m$

4. نعتبر λ عددا حقيقيا حيث $0 < \lambda < 1$

أ. أكتب بدلالة λ العدد $\mathcal{A}(\lambda)$ المعرّف بـ : $\mathcal{A}(\lambda) = \int_{\lambda}^1 [f(x) + x - 1] dx$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا.

ب. أحسب $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{A}(\lambda)$

5. المتتالية العددية (ω_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\omega_n = 1 - \frac{f(e^{-n})}{n+1}$

• أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = \omega_0 + \omega_1 + \dots + \omega_n$ ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول (4 ن)

كيس غير شفاف به 5 كرات متماثلة لا نفرّق بينها عند اللمس، منها كرتين خضراوين تحملان العددين: 0 و 0 ، كرتين بيضاوين تحملان العددين المركبين: $-i$ و i ، كرة حمراء تحمل العدد المركب: $-i$.
نسحب عشوائيا من الكيس ثلاث كرات في آن واحد.

- (I) 1. أحسب احتمال كلاً من الحدثين الآتيين.
أ. A : " الحصول على ثلاث كرات مجموعها عدد حقيقي ".
ب. B : " الحصول على ثلاث كرات تشكّل ألوان العلم الوطني ".

2. بين أنّ $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$ ، ثمّ استنتج $P(\overline{A \cup B})$

(II) نضيف إلى الكيس n كرة تحمل العدد 0 حيث $n \in \mathbb{N}^*$ ، ونسحب عشوائيا من الكيس كرتين على التوالي دون إرجاع، ونعتبر X المتغير العشوائي الذي يرفق كل إمكانية بطويلة مجموع العددين المحصل عليهما.

1. أ. بين أنّ $P(X = 0) = \frac{n^2 + 3n + 6}{n^2 + 9n + 20}$

ب. عرّف قانون احتمال المتغير العشوائي X

2. عين قيمة n التي تحقّق $P(A_X^2 = 2) = \frac{1}{15}$

التمرين الثاني (4 ن)

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ نضع: $a_n = 3 \times 2^n - 1$ و $b_n = 3 \times 2^n + 1$

1. أ. بين أنّ $PGCD(a_n; b_n) = PGCD(a_n; 2)$
ب. استنتج أنّ $PGCD(a_n; b_n) = 1$

2. من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ نضع: $S_n = n + a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$

أ. بين أنّه من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ ، $S_n = 12(4^n - 1)$
ب. استنتج أنّ $S_n \equiv 0 [9]$

3. أ. عين قيم n من $\mathbb{N}^*$ التي يكون من أجلها S_n مضاعفا للعدد 5

ب. استنتج أنّ مجموعة قيم رقم آحاد العدد S_n هي $\{0; 6\}$

4. عين قيم n من $\mathbb{N}^*$ التي يكون من أجلها $S_{2025} + S_{1962} + n \equiv 0 [5]$

التمرين الثالث (5 ن)

من أجل كلّ z من $\mathbb{C}$ نضع: $P(z) = z^4 + z^3 - z^2 + z - 2$

(I) 1. بين أنّه من أجل كلّ z من $\mathbb{C}$ ، $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$

2. حلّ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$ علما أنّها تقبل حلاً تخيلياً صرفاً.

- (II) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها z_A ، z_B و z_C على الترتيب حيث : $z_A = i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = |z_A|$
- بين أن النقط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.
 - أ. أكتب العدد المركب $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ على الشكل الجبري.
ب. استنتج طبيعة المثلث ABC
 - نعتبر النقطة M من المستوي ذات اللاحقة z حيث $z = \sin \alpha + i(\sin \alpha - 1)$ مع $\alpha \in \mathbb{R}$
• حدّد طبيعة مجموعة النقط M ذات اللاحقة z لما α يسمح المجال $[0; \pi]$

التمرين الرابع (7 ن)

- نعتبر k عددا من $\mathbb{N}^*$ ، الدالة العددية f_k معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f_k(x) = x - ke^{-x}$
- و (C_k) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$
- أ. أحسب كلاً من $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x)$
ب. بين أن الدالة f_k متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$ ثم شكّل جدول تغيراتها.
 - أ. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f_k(x) - x]$ ثم فسّر النتيجة هندسياً.
ب. أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_k) و المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$
 - أ. أثبت كلاً من (Δ) و (C_2)
ب. باستخدام (C_2) ناقش بياناً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f_2(x) = x + \ln m$
 - أ. أدرس الوضع النسبي للمنحنين (C_k) و (C_{k+1})
ب. بين أن المعادلة $f_k(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α_k حيث $\alpha_k > 0$
ج. استنتج أن المتتالية $(\alpha_k)_{k \geq 1}$ متزايدة تماماً
 - أ. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $x < e^x$
ب. استنتج أنه: من أجل كل k من $\mathbb{N}^*$ ، $\alpha_k > \ln \sqrt{k}$
 - المتتالية العددية $(\mu_k)_{k \geq 1}$ معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ $\mu_k = \frac{1}{\alpha_{k+1} - \alpha_k} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f_k(t) dt$
أ. بين أنه: من أجل كل k من $\mathbb{N}^*$ ، $0 \leq \mu_k \leq f_k(\alpha_{k+1})$
ب. تحقق أنه: من أجل كل k من $\mathbb{N}^*$ ، $f_k(\alpha_{k+1}) = e^{-\alpha_{k+1}}$ ثم استنتج $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mu_k$

انتهى الموضوع الثاني

إجابة نموذجية مقترحة للموضوع الأول

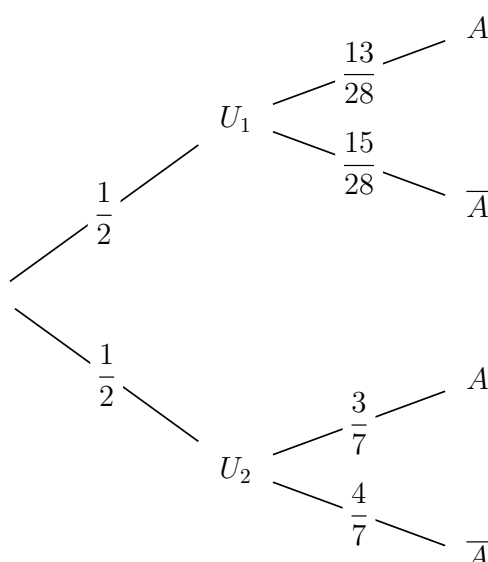
التمرين الأول (4 ن)

1. أ. تبين أن $P_{U_1}(A) = \frac{13}{28}$ و $P_{U_2}(A) = \frac{3}{7}$

$$\begin{aligned} P_{U_2}(A) &= \frac{A_3^2 + A_4^2}{A_7^2} \\ &= \frac{18}{42} \\ &= \frac{3}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{U_1}(A) &= \frac{C_5^2 + C_3^2}{C_8^2} \\ &= \frac{13}{28} \end{aligned}$$

ب. نقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثم إكمالها.



2. حساب احتمال أن تكون الكريتين المسحوبتين من الصندوق U_2 علما أنهما مختلفتين في اللون.

$$\begin{aligned} P_{\bar{A}}(U_2) &= \frac{P(U_2 \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} \\ &= \frac{P(U_2 \cap \bar{A})}{P(U_1 \cap \bar{A}) + P(U_2 \cap \bar{A})} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{4}{7}}{\frac{1}{2} \times \frac{15}{28} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{7}} \\ &= \frac{8}{23} \end{aligned}$$

3. أ. تبين أن $P(X=0) = \frac{1}{4}$ و $P(X=1) = \frac{31}{56}$ ثم استنتاج قانون احتمال المتغير العشوائي X

$$\begin{aligned} P(X=0) &= \frac{1}{2} \times \frac{C_5^2}{C_8^2} + \frac{1}{2} \times \frac{A_3^2}{A_7^2} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{10}{28} + \frac{1}{2} \times \frac{6}{42} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X=1) &= \frac{1}{2} \times \frac{C_5^1 \times C_3^1}{C_8^2} + \frac{1}{2} \times \frac{2 \times A_3^1 \times A_4^1}{A_7^2} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{15}{28} + \frac{1}{2} \times \frac{24}{42} \\ &= \frac{31}{56} \end{aligned}$$

مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي $\{0; 1; 2\}$ ، عندئذ لدينا

$$\begin{aligned} P(X=2) &= 1 - [P(X=0) + P(X=1)] \\ &= 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{31}{56} \right) \\ &= \frac{11}{56} \end{aligned}$$

وبالتالي

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{31}{56}$	$\frac{11}{56}$

ب. حساب احتمال الحدث $(X^{1962} + X^{2025} + 2 \equiv 0 [X+1])$

لدينا

$$X+1 \equiv 0 [X+1]$$

ومنه

$$X \equiv -1 [X+1]$$

وعليه

$$\begin{aligned} X^{1962} &\equiv (-1)^{1962} [X+1] \\ &\equiv 1 [X+1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X^{2025} &\equiv (-1)^{2025} [X+1] \\ &\equiv -1 [X+1] \end{aligned}$$

وبالتالي

$$\begin{aligned} X^{1962} + X^{2025} + 2 &\equiv 1 - 1 + 2 [X+1] \\ &\equiv 2 [X+1] \end{aligned}$$

ومنه

$$2 \equiv 0 [X+1]$$

وعليه

$$X+1 = 1 \quad \text{أو} \quad X+1 = 2$$

أي

$$X = 0 \quad \text{أو} \quad X = 1$$

عندئذ نستنتج أنَّ

$$\begin{aligned}
 P(X^{1962} + X^{2025} + 2 \equiv 0 [X + 1]) &= P(X = 0) + P(X = 1) \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{31}{56} \\
 &= \frac{45}{56}
 \end{aligned}$$

التمرين الثاني (4 ن)

1. أ. تبين أنه: من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ ، $U_n > 0$
من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$\begin{cases} 2^n > 0 \\ n! > 0 \end{cases}$$

ومنه $U_n > 0$

ب. تبين أنَّ $(U_n)_{n \geq 1}$ متناقصة على $\mathbb{N}^*$ ثم استنتاج أنها متقاربة.
من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$\begin{aligned}
 \frac{U_{n+1}}{U_n} &= \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \\
 &= \frac{2^n \times 2}{(n+1)n!} \times \frac{n!}{2^n} \\
 &= \frac{2}{n+1}
 \end{aligned}$$

ولدينا

$$n \geq 1$$

ومنه

$$n+1 \geq 2$$

وعليه

$$\frac{2}{n+1} \leq \frac{2}{2}$$

أي

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1$$

وبالتالي $(U_n)_{n \geq 1}$ متناقصة على $\mathbb{N}^*$.

استنتاج التقارب

لدينا

• $(U_n)_{n \geq 1}$ متناقصة على $\mathbb{N}^*$

• من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ ، $U_n > 0$ ، وعليه $(U_n)_{n \geq 1}$ محدودة من الأسفل بالعدد 0
وبالتالي $(U_n)_{n \geq 1}$ متقاربة.

2. أ. تبين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ حيث $n \geq 2$ ، $V_n \leq \frac{2}{3}$

من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ حيث $n \geq 2$ لدينا

$$n \geq 2$$

ومنه

$$n + 1 \geq 3$$

وعليه

$$\frac{2}{n+1} \leq \frac{2}{3}$$

أي

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{2}{3}$$

وبالتالي

$$V_n \leq \frac{2}{3}$$

ب. إثبات أنه : من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ حيث $n \geq 2$ ، $U_n \leq \frac{9}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ثم استنتاج $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

• نرسم للخاصية " $U_n \leq \frac{9}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ " بالرمز $P(n)$.

• نتحقق من صحة $P(2)$ لدينا

$$U_2 = \frac{2^2}{2!} = 2$$

$$\frac{9}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{9}{2} \times \frac{4}{3} = 2$$

ومنه

$$U_2 \leq \frac{9}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

وعليه $P(2)$ صحيحة.

• من أجل عدد طبيعي كفي k حيث $k \geq 2$ نفترض صحة $P(k)$ ونبرهن صحة $P(k+1)$.
لدينا

$$\begin{aligned} U_{k+1} &= \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} \\ &= \frac{2}{k+1} \times \frac{2^k}{k!} \\ &= V_k U_k \end{aligned}$$

وبما أن

$$\begin{cases} 0 < U_k \leq \frac{9}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^k \\ 0 < V_k \leq \frac{2}{3} \end{cases}$$

فإنّ

$$\begin{aligned} U_{k+1} &\leq \frac{2}{3} \times \frac{9}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^k \\ &\leq \frac{9}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} \end{aligned}$$

وبالتالي $P(k+1)$ صحيحة.

• وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع نستنتج أنّ $P(n)$ صحيحة من أجل كلّ $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

وبما أنّ $-1 < \frac{2}{3} < 1$ فإنّ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ ، ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$

3. • حساب S_n بدلالة n ثمّ استنتاج أنّ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = \log 2$ من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$\begin{aligned} S_n &= \log(2V_1) + \log(3V_2) + \cdots + \log(nV_{n-1}) \\ &= \log(2V_1 \times 3V_2 \times \cdots \times nV_{n-1}) \\ S_n &= \log(V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_{n-1} \times 2 \times 3 \times \cdots \times n) \\ &= \log\left(\frac{U_2}{U_1} \times \frac{U_3}{U_2} \times \cdots \times \frac{U_n}{U_{n-1}} \times n!\right) \\ &= \log\left(\frac{U_n}{U_1} \times n!\right) \\ &= \log\left(\frac{2^n}{n!} \times \frac{1!}{2^1} \times n!\right) \\ &= \log(2^{n-1}) \\ &= (n-1) \log 2 \end{aligned}$$

وعندئذ لدينا

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n-1}{n} \log 2\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n} \log 2\right) \\ &= \log 2 \end{aligned}$$

التمرين الثالث (5 ن)

1. أ. تبين أنّ العدد 977 أولي ثمّ استنتاج أنّ المعادلة (E) تقبل حلولاً في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

لدينا $\sqrt{977} \approx 31,25$ ، وبما أنّ

13 ∤ 31
17 ∤ 31
19 ∤ 31
23 ∤ 31
29 ∤ 31

2 ∤ 31
3 ∤ 31
5 ∤ 31
7 ∤ 31
11 ∤ 31

فإنّ 977 عدد أولي.

الاستنتاج. بما أن 977 عدد أولي و 1962 لا يقبل القسمة على 977 فإن $PGCD(1962; 977) = 1$ ومنه المعادلة (E) تقبل حلولاً في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

ب. تعيين الحل الخاص $(x_0; y_0)$ للمعادلة (E) الذي يحقق $x_0 + 5y_0 = 11$ لدينا

$$x_0 + 5y_0 = 11$$

ومنه

$$x_0 = 11 - 5y_0$$

وبما أن $(x_0; y_0)$ حل للمعادلة (E) فإن

$$1962x_0 - 977y_0 = 8$$

أي

$$1962(11 - 5y_0) - 977y_0 = 8$$

ومنه

$$y_0 = 2$$

وعليه

$$\begin{aligned} x_0 &= 11 - 5 \times 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

ج. استنتاج مجموعة حلول المعادلة (E) لدينا

$$\begin{cases} 1962x - 977y = 8 \\ 1962x_0 - 977y_0 = 8 \end{cases}$$

ومنه

$$1962(x - x_0) - 977(y - y_0) = 0$$

وعليه

$$1962(x - 1) = 977(y - 2)$$

وبما أن $PGCD(1962; 977) = 1$ فإن $1962 \mid y - 2$ وينتج عن ذلك أن

$$\begin{cases} y = 1962k + 2 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ومنه

$$\begin{cases} x = 977k + 1 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة هي S حيث

$$S = \{(977k + 1; 1962k + 2) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

2. تعيين كلاً من α ، β و γ ثم كتابة L في النظام العشري.

الثنائية $(\alpha; \beta)$ حل للمعادلة (E) معناه

$$\begin{cases} \alpha = 977k + 1 \\ \beta = 1962k + 2 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

وبما أن

$$\begin{cases} 0 < \alpha < 4 \\ 0 \leq \beta < 4 \end{cases}$$

فإن $k = 0$ ، وبالتالي $\alpha = 1$ و $\beta = 2$ ، وبما أن $\alpha + \gamma = 2\beta$ فإن

$$\begin{aligned}\gamma &= 2\beta - \alpha \\ &= 2 \times 2 - 1 \\ &= 3\end{aligned}$$

كتابة L على الشكل العشري

$$\begin{aligned}L &= \alpha \times 4^0 + \beta \times 4^1 + \beta \times 4^2 + \gamma \times 4^3 + \gamma \times 4^4 + \alpha \times 4^5 \\ &= 1 \times 4^0 + 2 \times 4^1 + 2 \times 4^2 + 3 \times 4^3 + 3 \times 4^4 + 1 \times 4^5 \\ &= 2025\end{aligned}$$

3. تحليل العدد 2025 إلى جداء عوامل أولية ثم استنتاج قيم العدد الطبيعي n التي تحقق $1962 \equiv 0 [n^3]$ لدينا

2025	3
675	3
225	3
75	3
25	5
5	5
1	

ومنه $2025 = 3^4 \times 5^2$ ونستنتج أن قيم العدد الطبيعي n التي تحقق $2025 \equiv 0 [n^3]$ هي : 1 و 3

4. تعيين كل الثنائيات $(a; b)$ حيث $a > b$ والتي تحقق $m = 6d$ و $a^3 + b^4 = 2025$ لدينا

$$\begin{cases} m \times d = a \times b \\ a = d \times a' \\ b = d \times b' \\ PGCD(a'; b') = 1 \end{cases}$$

ومنه

$$\begin{cases} m = d \times a' \times b' \\ a = d \times a' \\ b = d \times b' \\ PGCD(a'; b') = 1 \end{cases}$$

وعليه

$$\begin{cases} d \times a' \times b' = 6d \\ (d \times a')^3 + (d \times b')^4 = 2025 \\ PGCD(a'; b') = 1 \end{cases}$$

وبالتالي

$$\begin{cases} a' \times b' = 6 \\ d^3 [(a')^3 + d(b')^4] = 2025 \\ d \in \{1; 3\} \\ PGCD(a'; b') = 1 \end{cases}$$

وينتج

$$\begin{cases} (a'; b') \in \{(6; 1); (3; 2)\} \\ d^3 [(a')^4 + d(b')^3] = 2025 \\ d \in \{1; 3\} \end{cases}$$

• في حالة $d = 1$ الجملة غير محققة لأن

$$\begin{cases} 6^4 + 1^3 < 2025 \\ 3^4 + 2^3 < 2025 \end{cases}$$

• في حالة $d = 3$ ، لدينا

$$\begin{cases} (a'; b') \in \{(6; 1); (3; 2)\} \\ (a')^4 + 3(b')^4 = 75 \end{cases}$$

ومنه $a' = 3$ و $b' = 2$ ، وعليه $a = 9$ و $b = 6$

التمرين الرابع (7 نـ)

I 1. تشكيل جدول تغيرات الدالة g على $]0; +\infty[$ لدينا

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x - 1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x - 1) = +\infty$$

g قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ولدينا

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} \\ &= \ln x + 1 \end{aligned}$$

المعادلة

$$g'(x) = 0$$

تكافئ

$$\ln x + 1 = 0$$

وتكافئ

$$x = e^{-1}$$

وعندئذ لدينا

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	
$g(x)$	-1	$-e^{-1} - 1$	$+\infty$

2. أ. تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $1,7 < \alpha < 1,8$

• $g(x) < 0$ على $]0; e^{-1}]$

• g مستمرة على $[e^{-1}; +\infty[$

• g متزايدة تماماً على $[e^{-1}; +\infty[$
• لدينا

$$g(1, 7) \approx -0,1$$

$$g(1, 8) \approx 0,06$$

ومنه $g(1, 7) \times g(1, 8) < 0$
عندئذ نستنتج أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $1,7 < \alpha < 1,8$.

ب. استنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من $]0; +\infty[$

• $g(x) < 0$ على $]0; e^{-1}]$
• g متزايدة تماماً على $[e^{-1}; +\infty[$
• $g(\alpha) = 0$
وعليه

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$		-	+

(II) 1. أ. حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وتفسير النتيجة هندسياً ثم حساب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x-1)(\ln x - 1)]$$

$$= +\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - 1) = +\infty \end{cases}$$

لأنّ

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} [(x-1)(\ln x - 1)]$$

$$= +\infty$$

لأنّ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ (حامل محور الترتيب)
مقارب لـ (C_f)

ب. تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$
 f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ولدينا

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times (\ln x - 1) + \frac{1}{x} \times (x - 1) \\ &= \frac{x(\ln x - 1)}{x} + \frac{x - 1}{x} \\ &= \frac{x \ln x - 1}{x} \\ &= \frac{g(x)}{x} \end{aligned}$$

ج. تبين أن f متناقصة تماماً على $]0; \alpha[$ ومتزايدة تماماً على $[\alpha; +\infty[$ ثم تشكيل جدول تغيراتها.

من أجل كل x من $]0; +\infty[$ لدينا

$$x > 0$$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $g(x)$ وعندئذ لدينا

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		-	+

- $f'(x) < 0$ على $]0; \alpha[$ و $f'(\alpha) = 0$ ومنه f متناقصة تماما على $]-\infty; \alpha]$
- $f'(x) > 0$ على $]\alpha; +\infty[$ و $f'(\alpha) = 0$ ومنه f متزايدة تماما على $[\alpha; +\infty]$

x	0	α	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

2. أ. كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة التي فاصلتها 1

f قابلة للاشتقاق عند 1 ومنه (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه $f'(1)$ حيث

$$(T) : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

وبما أنّ $f(1) = 0$ و $f'(1) = -1$ فإنّ

$$(T) : y = -x + 1$$

ب. دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T)

من أجل كلّ x من $]0; +\infty[$ لدينا

$$\begin{aligned} f(x) - (-x + 1) &= (x - 1)(\ln x - 1) - (-x + 1) \\ &= (x - 1)(\ln x - 1) + (x - 1) \\ &= (x - 1)(\ln x - 1 + 1) \\ &= (x - 1)\ln x \end{aligned}$$

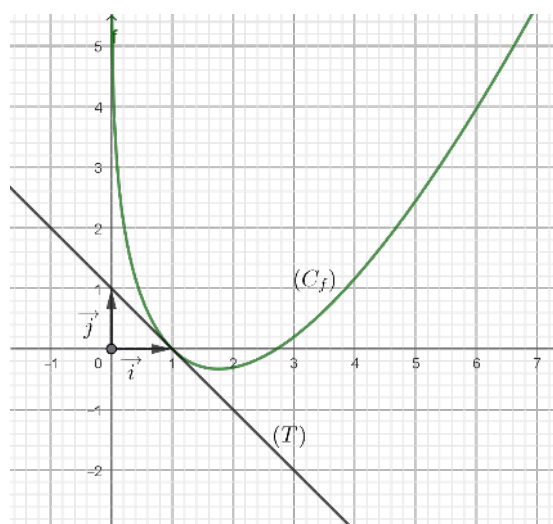
ومنّه

x	0	1	$+\infty$
$x - 1$	-	0	+
$\ln x$	-	0	+
$f(x) - (-x + 1)$	+	0	+

• (C_f) يقع فوق (T) على $]0; 1[\cup]1; +\infty[$

• (C_f) يقطع (T) في النقطة $A(1; 0)$

3. أ. إنشاء كُلا من (T) و (C_f) .



ب. مناقشة عدد حلول المعادلة $f(x) = -x + m$ حسب قيم الوسيط الحقيقي m

حلول المعادلة بيانها هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ_m) حيث
 $(\Delta_m): y = -x + m$

وعندئذ لدينا

عدد حلول المعادلة	قيم m
لا توجد حلول	$m \in]-\infty; 1[$
حل واحد	$m = 1$
حلان	$m \in]1; +\infty[$

4. أ. كتابة بدلالة λ العدد $\mathcal{A}(\lambda)$ المعروف بـ: $\mathcal{A}(\lambda) = \int_{\lambda}^1 [f(x) + x - 1] dx$ ، ثم تفسير النتيجة هندسياً.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\lambda) &= \int_{\lambda}^1 [f(x) + x - 1] dx \\ &= \int_{\lambda}^1 [(x - 1) \ln x] dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\lambda) &= \left[\left(\frac{x^2}{2} - x \right) \ln x \right]_{\lambda}^1 - \int_{\lambda}^1 \left(\frac{x}{2} - 1 \right) dx \\ &= \left(\lambda - \frac{\lambda^2}{2} \right) \ln \lambda - \left[\left(\frac{x^2}{4} - x \right) \right]_{\lambda}^1 \\ &= \left(\lambda - \frac{\lambda^2}{2} \right) \ln \lambda + \frac{\lambda^2}{4} - \lambda + \frac{3}{4}\end{aligned}$$

التفسير. من أجل كل x من $]0; +\infty[$ لدينا $f(x) - (-x + 1) \geq 0$ ، ومنه $\mathcal{A}(\lambda)$ هي مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمماس (T) والمستقيمين ذوا المعادلتين $x = \lambda$ و $x = 1$

ب. حساب $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{A}(\lambda)$

لدينا

$$\left(\lambda - \frac{\lambda^2}{2} \right) \ln \lambda + \frac{\lambda^2}{4} - \lambda + \frac{3}{4} = \lambda \ln \lambda - \frac{1}{2} \lambda^2 \ln \lambda + \frac{\lambda^2}{4} - \lambda + \frac{3}{4}$$

وبما أن

$$\begin{cases} \lim_{\lambda \rightarrow 0} (\lambda \ln \lambda) = 0 \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} (\lambda^2 \ln \lambda) = 0 \end{cases}$$

فإن

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{A}(\lambda) = \frac{3}{4}$$

5. حساب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = \omega_0 + \omega_1 + \dots + \omega_n$ ثم استنتاج $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$\begin{aligned}\omega_n &= 1 - \frac{f(e^{-n})}{n+1} \\ &= 1 - \frac{(e^{-n} - 1)(\ln e^{-n} - 1)}{n+1} \\ &= 1 - \frac{(e^{-n} - 1)(-n - 1)}{n+1} \\ &= 1 + \frac{(e^{-n} - 1)(n+1)}{n+1} \\ &= e^{-n}\end{aligned}$$

وعليه

$$\begin{aligned}S_n &= \omega_0 + \omega_1 + \dots + \omega_n \\ &= 1 + e^{-1} + \dots + e^{-n} \\ &= 1 \times \frac{1 - (e^{-1})^{n-0+1}}{1 - e^{-1}} \\ &= \frac{1 - e^{-n-1}}{1 - e^{-1}} \\ &= \frac{e - e^{-n}}{e - 1}\end{aligned}$$

وبما أنّ

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^n} \\ &= 0\end{aligned}$$

فإنّ

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{e}{e - 1}$$

سلم تنقيط الموضوع الأول

التمرين الأول (4 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
أ.1	$0,25 + 0,25$
ب.1	$1,25$
2	$0,5$
أ.3	$1,25$
ب.3	$0,5$

التمرين الثاني (4 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
أ.1	$0,5$
ب.1	$0,25 + 0,5$
أ.2	$0,75$
ب.2	$0,25 + 0,75$
3	$0,25 + 0,75$

التمرين الثالث (5 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
أ.1	$0,5 + 0,5$
ب.1	$0,5$
ج.1	1
2	1
3	$0,5 + 0,5$
4	$0,5$

التمرين الرابع (7 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
1 (I)	0,5
أ.2 (I)	0,5
ب.2 (I)	0,5
أ.1 (II)	0,75
ب.1 (II)	0,5
ج.1 (II)	0,25 + 0,5
أ.2 (II)	0,5
ب.2 (II)	0,5
أ.3 (II)	0,5 + 0,25
ب.3 (II)	0,25
أ.4 (II)	0,25 + 0,5
ب.4 (II)	0,25
5 (II)	0,25 + 0,25

إجابة نموذجية مقترحة للموضوع الثاني

التمرين الأول (4 ن)

(I) 1. حساب احتمال كلاً من الحدثين الآتين.

أ. A : "الحصول على ثلاث كريات مجموعها عدد حقيقي".

$$\begin{aligned}
 P(A) &= \frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد الإمكانيات}} \\
 &= \frac{C_2^1 \times C_2^1 \times C_1^1}{C_5^3} \\
 &= \frac{4}{10} \\
 &= \frac{2}{5}
 \end{aligned}$$

ب. B : "الحصول على ثلاث كريات تشكّل ألوان العلم الوطني".

$$\begin{aligned}
 P(B) &= \frac{\text{عدد عناصر } B}{\text{عدد الإمكانيات}} \\
 &= \frac{C_2^1 \times C_2^1 \times C_1^1}{C_5^3} \\
 &= \frac{4}{10} \\
 &= \frac{2}{5}
 \end{aligned}$$

2. تبين أن $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$ ، ثم استنتاج $P(\overline{A \cup B})$

$$\begin{aligned}
 P(A \cap B) &= \frac{C_2^1 \times C_1^1 \times C_1^1}{C_5^3} \\
 &= \frac{2}{10} \\
 &= \frac{1}{5}
 \end{aligned}$$

وعندئذ نستنتج

$$\begin{aligned}
 P(\overline{A \cup B}) &= 1 - P(A \cup B) \\
 &= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] \\
 &= 1 - \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} \right) \\
 &= \frac{2}{5}
 \end{aligned}$$

$$(II) 1. أ. تبين أن $P(X=0) = \frac{n^2 + 3n + 6}{n^2 + 9n + 20}$$$

$$\begin{aligned} P(X=0) &= \frac{A_{n+2}^2 + 2A_1^1 \times A_2^1}{A_{n+5}^2} \\ &= \frac{(n+2)(n+1) + 2 \times 1 \times 2}{(n+5)(n+4)} \\ &= \frac{n^2 + 3n + 6}{n^2 + 9n + 20} \end{aligned}$$

ب. تعريف قانون احتمال المتغير العشوائي X لدينا

$$\begin{cases} |0+0| = 0 \\ |-i+i| = 0 \\ |i+0| = 1 \\ |-i+0| = 1 \\ |-i-i| = 2 \end{cases}$$

وعليه مجموعة قيم المتغير العشوائي هي $\{0; 1; 2\}$ ولدينا

$$\begin{aligned} P(X=2) &= \frac{A_2^2}{A_{n+5}^2} \\ &= \frac{2}{(n+5)(n+4)} \\ &= \frac{2}{n^2 + 9n + 20} \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} P(X=1) &= \frac{2A_{n+2}^1 \times A_2^1 + 2A_{n+2}^1 \times A_1^1}{A_{n+5}^2} \\ &= \frac{2(n+2) \times 2 + 2(n+2) \times 1}{(n+5)(n+4)} \\ &= \frac{6n+12}{n^2 + 9n + 20} \end{aligned} \right.$$

وبالتالي

x_i	0	1	2	المجموع
$P(X=x_i)$	$\frac{n^2 + 3n + 6}{n^2 + 9n + 20}$	$\frac{6n + 12}{n^2 + 9n + 20}$	$\frac{2}{n^2 + 9n + 20}$	1

$$2. \text{ تعيين قيمة } n \text{ التي تحقق } P(A_X^2 = 2) = \frac{1}{15}$$

المعادلة

$$A_X^2 = 2$$

تكافئ

$$X(X-1) = 2$$

وتكافئ

$$X^2 - X - 2 = 0$$

وتكافئ

$$X = 2$$

وبالتالي

$$\begin{aligned} P(A_X^2 = 2) &= P(X=2) \\ &= \frac{2}{n^2 + 9n + 20} \end{aligned}$$

عندئذ لدينا

$$\frac{2}{n^2 + 9n + 20} = \frac{1}{15}$$

وذلك يكافئ

$$n = 1$$

التمرين الثاني (4 ن)

1. أ. تبين أن $PGCD(a_n; b_n) = PGCD(a_n; 2)$
نضع: $d_1 = PGCD(a_n; b_n)$ و $d_2 = PGCD(a_n; 2)$
• لدينا

$$\begin{cases} d_1 \mid a_n \\ d_1 \mid b_n \end{cases}$$

ومنه

$$d_1 \mid b_n - a_n$$

أي

$$d_1 \mid 2$$

وبالتالي

$$d_1 \mid d_2$$

• لدينا

$$\begin{cases} d_2 \mid a_n \\ d_2 \mid 2 \end{cases}$$

ومنه

$$d_2 \mid a_n + 2$$

أي

$$d_2 \mid b_n$$

ومنه

$$d_2 \mid d_1$$

وبما أن $d_1 > 0$ و $d_2 > 0$ فإن $d_1 = d_2$

ب. استنتاج أن $PGCD(a_n; b_n) = 1$

بما أن a_n عدد فردي فإنه لا يقبل القسمة على 2 ومنه $PGCD(a_n; 2) = 1$ ، وعليه $PGCD(a_n; b_n) = 1$

2. أ. تبين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ ، $S_n = 12(4^n - 1)$

من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$a_n b_n = 9 \times 4^n - 1$$

ومنه

$$\begin{aligned} S_n &= n + a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \\ &= n + 9 \times 4^1 - 1 + \dots + 9 \times 4^n - 1 \\ &= n + 9(4 + 4^2 + \dots + 4^n) - 1 - 1 - \dots - 1 \\ &= n + 9 \times 4 \times \frac{4^{n-0+1} - 1}{4 - 1} - n \times 1 \\ &= 12(4^n - 1) \end{aligned}$$

ب. استنتاج أن $S_n \equiv 0 [9]$

من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$4^n \equiv 1 [3]$$

ومنه

$$4^n - 1 \equiv 0 [3]$$

وذلك يكافئ

$$4^n - 1 = 3k \quad \text{حيث } k \in \mathbb{Z}$$

ويكافئ

$$12(4^n - 1) = 9(4k) \quad \text{حيث } k \in \mathbb{Z}$$

ويكافئ

$$S_n \equiv 0 [9]$$

3. أ. تعيين قيم n من $\mathbb{N}^*$ التي يكون من أجلها S_n مضاعفا للعدد 5

لدينا

$$S_n \equiv 0 [5]$$

وذلك يكافئ

$$12(4^n - 1) \equiv 0 [5]$$

ويكافئ

$$4^n - 1 \equiv 0 [5]$$

ويكافئ

$$4^n \equiv 1 [5]$$

ومن جهة أخرى لدينا

$$4 \equiv -1 [5]$$

وعليه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$4^n \equiv (-1)^n [5]$$

وبالتالي

$$(-1)^n \equiv 1 [5]$$

وذلك يكافئ أن $n = 2k$ حيث $k \in \mathbb{N}^*$.

ب. استنتاج أن مجموعة قيم رقم آحاد العدد S_n هي $\{0; 6\}$

من أجل كل k من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$4^{2k} \equiv 1 [5]$$

وذلك يكافئ

$$4^{2k+1} \equiv 4 [5]$$

ويكافئ

$$4^{2k+1} - 1 \equiv 3 [5]$$

ويكافئ

$$12(4^{2k+1} - 1) \equiv 1 [5]$$

أي

$$S_{2k+1} \equiv 1 [5]$$

وبما أن S_n عدد زوجي فإن مجموعة قيم رقم آحاد العدد S_n هي $\{0; 6\}$

4. تعيين قيم n من $\mathbb{N}^*$ التي يكون من أجلها $S_{2025} + S_{1962} + n \equiv 0 [5]$ لدينا

$$\begin{cases} S_{1962} \equiv 0 [5] \\ S_{2025} \equiv 1 [5] \end{cases}$$

ومنه

$$S_{2025} + S_{1962} + n \equiv n + 1 [5]$$

وعليه

$$n + 1 \equiv 0 [5]$$

وبالتالي

$$n \equiv 4 [5]$$

وينتج أن

$$n = 5k + 4 \quad \text{حيث } k \in \mathbb{N}$$

التمرين الثالث (7 ن)

(I) 1. تبين أنه من أجل كل z من $\mathbb{C}$ ، $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$

$$\begin{aligned} \overline{P(z)} &= \overline{z^4 + z^3 - z^2 + z - 2} \\ &= \overline{z^4} + \overline{z^3} - \overline{z^2} + \overline{z} - \overline{2} \\ &= \bar{z}^4 + \bar{z}^3 - \bar{z}^2 + \bar{z} - 2 \\ &= P(\bar{z}) \end{aligned}$$

2. حل المعادلة $P(z) = 0$ في $\mathbb{C}$ علماً أنها تقبل حلاً تخيلياً صرفاً.

من السؤال السابق، نستنتج أنه إذا كان z حلاً للمعادلة $P(z) = 0$ فإن $\bar{z}$ حل لها أيضاً، ولما كانت $P(z) = 0$ تقبل حلاً تخيلياً صرفاً $i\alpha$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ فإن $-i\alpha$ حل لها أيضاً، وعندئذ لدينا

$$\begin{aligned} P(z) &= (z - i\alpha)(z + i\alpha)(az^2 + bz + c) \\ &= (z^2 + \alpha^2)(az^2 + bz + c) \\ &= az^4 + bz^3 + cz^2 + a\alpha^2 z^2 + b\alpha^2 z + c\alpha^2 \\ &= az^3 + bz^3 + (c + a\alpha^2)z^2 + b\alpha^2 z + c\alpha^2 \end{aligned}$$

وذلك يكافئ

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c + \alpha^2 = -1 \\ \alpha^2 = 1 \\ c\alpha^2 = -2 \end{cases}$$

ويكافئ

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -2 \\ \alpha^2 = 1 \end{cases}$$

أي

$$P(z) = (z^2 + 1)(z^2 + z - 2)$$

عندئذ المعادلة تكافئ

$$z^2 + 1 = 0 \quad \text{أو} \quad z^2 + z - 2 = 0$$

حل المعادلة $z^2 + 1 = 0$

المعادلة تكافئ

$$z^2 = -1$$

وتكافئ

$$z^2 = i^2$$

وتكافئ

$$z = -i \quad \text{أو} \quad z = i$$

حل المعادلة $z^2 + z - 2 = 0$

لدينا

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) \\ = 9$$

ومنه المعادلة تقبل حلين z_1 و z_2 حيث

$$z_2 = \frac{-1 + 3}{2 \times 1} \\ = 1$$

$$z_1 = \frac{-1 - 3}{2 \times 1} \\ = -2$$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة هي $\{-i; i; -2; 1\}$ (II) 1. تبين أن النقط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

لدينا

$$|z_A| = |z_B| = |z_C| = 1$$

ومنه النقط A ، B و C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1.2. أ. كتابة العدد المركب $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ على الشكل الجبري.

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{-i - 1}{i - 1} \\ = \frac{(-i - 1)(i + 1)}{(i - 1)(i + 1)} \\ = \frac{-i^2 - i - i - 1}{i^2 - 1^2} \\ = \frac{-2i}{-2} \\ = i$$

ب. استنتاج طبيعة المثلث ABC

لدينا

$$\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\left|\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = 1$$

ومنه

$$(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$CA = CB$$

وبالتالي المثلث ABC متساوي الساقين وقائم في C

3. • تحديد طبيعة مجموعة النقط M ذات اللاحقة z لما α يسمح المجال $[0; \pi]$

نضع $z = x + iy$ حيث $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ ، عندئذ لدينا

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ x = \sin \alpha \\ 0 \leq \alpha \leq \pi \end{cases}$$

ومنه

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

وعليه مجموعة النقط M هي القطعة المستقيمة $[BC]$

التمرين الرابع (7 ن)

1. أ. حساب كلاً من $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - ke^{-x}) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty \end{cases}$$

لأنّ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - ke^{-x}) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

لأنّ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} &= \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t \\ &= 0 \end{aligned}$$

ب. تبين أنّ الدالة f_k متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$ ثمّ تشكيل جدول تغيّراتها.

f_k قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا

$$f'_k(x) = 1 + ke^{-x}$$

من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ لدينا $e^{-x} > 0$ وبما أنّ $k > 0$ فإنّ

$$f'_k(x) > 0$$

وبالتالي f_k متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2. أ. حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f_k(x) - x]$ ثمّ تفسير النتيجة هندسياً.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f_k(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-ke^{-x}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

لأنّ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$$

وبالتالي المستقيم ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_k) عند $+\infty$ ب. دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_k) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ لدينا

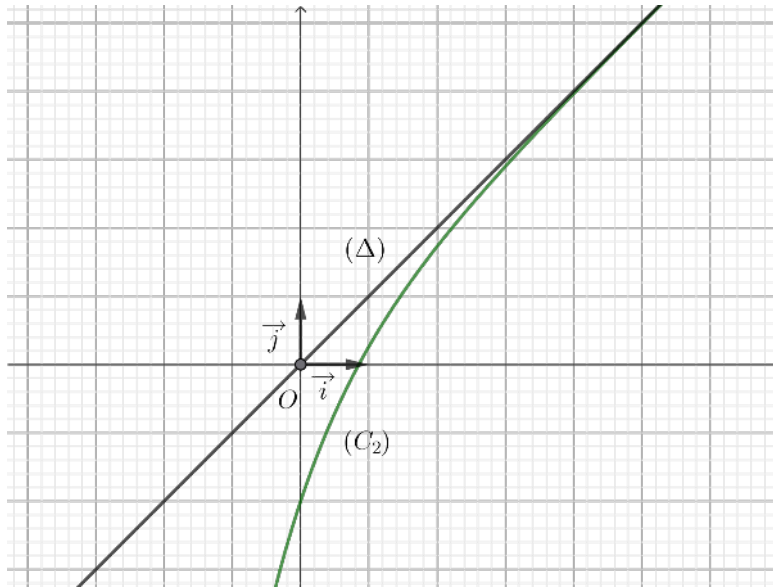
$$f(x) - x = -ke^{-x}$$

وبما أنّ

$$\begin{cases} k > 0 \\ e^{-x} > 0 \end{cases}$$

فإنّ

$$f_k(x) - x < 0$$

ومنه (C_k) يقع تحت (Δ) .3. أ. إنشاء كلاً من (Δ) و (C_2) ب. مناقشة عدد حلول المعادلة: $f_2(x) = x + \ln m$ حسب قيم الوسيط الحقيقي m حلول المعادلة بيانها هي فواصل نقاط تقاطع (C_2) مع المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y = x + \ln m$ ، مجموعة قيم m هي المجال $]0; +\infty[$ ، وبوضع $m' = \ln m$ ، ينتج

عدد حلول المعادلة	قيم m	في حالة
حل واحد	$m \in]0; 1[$	$m' < 0$
لا توجد حلول	$m \in [0; +\infty[$	$m' \geq 0$

4. أ. دراسة الوضع النسبي للمنحنين (C_k) و (C_{k+1}) من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) - f_k(x) &= x - (k+1)e^{-x} - (x - ke^{-x}) \\ &= -e^{-x} \\ &< 0 \end{aligned}$$

ومنه (C_{k+1}) يقع تحت (C_k)

ب. تبين أن المعادلة $f_k(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α_k حيث $\alpha_k > 0$

- f_k مستمرة على $\mathbb{R}$
- f_k متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$
- لدينا

$$\begin{aligned} f_k(0) &= 0 - ke^{-0} \\ &= -k \\ &< 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = +\infty$$

وبالتالي المعادلة $f_k(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α_k حيث $\alpha_k > 0$

ج. استنتاج أن المتتالية $(\alpha_k)_{k \geq 1}$ متزايدة تماماً

من أجل كل k من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$f_k(\alpha_{k+1}) > f_{k+1}(\alpha_{k+1})$$

وبما أن

$$f_{k+1}(\alpha_{k+1}) = f_k(\alpha_k)$$

فإن

$$f_k(\alpha_{k+1}) > f_k(\alpha_k)$$

ولما كانت f_k متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$ ينتج

$$\alpha_{k+1} > \alpha_k$$

وبما أن f_k متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$ فإن

$$\alpha_{k+1} > \alpha_k$$

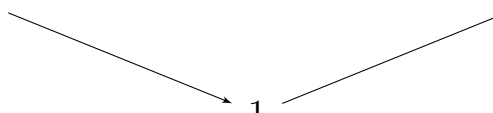
وبالتالي $(\alpha_k)_{k \geq 1}$ متزايدة تماماً.

5. أ. تبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $x < e^x$

نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $h(x) = e^x - x$ ، الدالة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا

$$h'(x) = e^x - 1$$

وينتج عن ذلك

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$			

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$h(x) \geq 1$$

وعليه

$$h(x) > 0$$

وبالتالي

$$e^x > x$$

ب. استنتاج أنه: من أجل كل k من $\mathbb{N}^*$ ، $\alpha_k > \ln \sqrt{k}$

لدينا

$$e^{\alpha_k} > \alpha_k$$

ولدينا

$$f_k(\alpha_k) = 0$$

ومنه

$$\alpha_k = ke^{-\alpha_k}$$

بالتعويض نجد

$$e^{\alpha_k} > ke^{-\alpha_k}$$

أي

$$(e^{\alpha_k})^2 > k$$

وذلك يكافئ

$$e^{\alpha_k} > \sqrt{k}$$

ويكافئ

$$\alpha_k > \ln \sqrt{k}$$

6. أ. تبين أنه: من أجل كل k من $\mathbb{N}^*$ ، $0 \leq \mu_k \leq f_k(\alpha_{k+1})$

من أجل كل t من $[\alpha_k; \alpha_{k+1}]$ لدينا

$$\alpha_k \leq t \leq \alpha_{k+1}$$

وبما أن f_k متزايدة تماماً على $[\alpha_k; \alpha_{k+1}]$ فإن

$$f_k(\alpha_k) \leq f(t) \leq f_k(\alpha_{k+1})$$

أي

$$0 \leq f(t) \leq f_k(\alpha_{k+1})$$

وبما أن f_k مستمرة على $\mathbb{R}$ فإن

$$0 \leq \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f(t) dt \leq \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f_k(\alpha_{k+1}) dt$$

أي

$$0 \leq \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f(t) dt \leq (\alpha_{k+1} - \alpha_k) f_k(\alpha_{k+1})$$

ومنه

$$0 \leq \frac{1}{\alpha_{k+1} - \alpha_k} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f_k(t) dt \leq f_k(\alpha_{k+1})$$

أي

$$0 \leq \mu_k \leq f_k(\alpha_{k+1})$$

ب. التحقق أنه: من أجل كل k من $\mathbb{N}^*$ ، $f_k(\alpha_{k+1}) = e^{-\alpha_{k+1}}$ ثم استنتاج $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mu_k$

من أجل كل k من $\mathbb{N}^*$ ، لدينا

$$f_k(\alpha_{k+1}) = \alpha_{k+1} - ke^{-\alpha_{k+1}}$$

ولدينا

$$f_{k+1}(\alpha_{k+1}) = 0$$

أي

$$\alpha_{k+1} - (k+1)e^{-\alpha_{k+1}} = 0$$

وعليه

$$\alpha_{k+1} = (k+1) e^{-\alpha_{k+1}}$$

وبالتعويض نجد

$$f_k(\alpha_{k+1}) = (k+1) e^{-\alpha_{k+1}} - k e^{-\alpha_{k+1}}$$

وعليه

$$f_k(\alpha_{k+1}) = e^{-\alpha_{k+1}}$$

وبالتالي من أجل كلّ k من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$0 \leq \mu_k \leq e^{-\alpha_{k+1}}$$

ولدينا

$$\alpha_{k+1} > \ln \sqrt{k+1}$$

وبما أنّ

$$\lim (\ln \sqrt{k+1}) = +\infty$$

فإنّ

$$\lim \alpha_{k+1} = +\infty$$

ومنه

$$\lim e^{-\alpha_{k+1}} = 0$$

وبالتالي

$$\lim \mu_k = 0$$



سلم تنقيط الموضوع الثاني

التمرين الأول (4 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
I) 1. أ	0,5
I) 1. ب	0,5
I) 2	0,5 + 0,5
II) 1. أ	0,5
II) 1. ب	0,25 + 0,5 + 0,25
II) 2	0,5

التمرين الثاني (4 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
1. أ	0,75
1. ب	0,5
2. أ	0,5
2. ب	0,75
3. أ	0,5
3. ب	0,5
4	0,5

التمرين الثالث (5 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
I) 1	0,75
I) 2	1 + 0,5
II) 1	0,75
II) 2. أ	0,75
II) 2. ب	0,75
II) 3	0,5

التمرين الرابع (7 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
أ.1	$0,25 + 0,25$
ب.1	$0,25 + 0,5$
أ.2	$0,25 + 0,5$
ب.2	$0,5$
أ.3	$0,5 + 0,25$
ب.3	$0,25$
أ.4	$0,5$
ب.4	$0,5$
ج.4	$0,5$
أ.5	$0,5$
ب.5	$0,5$
أ.6	$0,5$
ب.6	$0,25 + 0,25$

■ انتهى