



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية البكالوريا التجريبية



دورة: جوان 2025

الشعبة : رياضيات

امتحان تجريبي التعليم الثانوي

المدة: 04 سا و 30 د

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار احد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بحدّها الأول $u_0 = 0$ و من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{3 + (1 - \alpha^2)u_n^2}$ ، حيث $0 < \alpha < 1$.

1. برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq \frac{\sqrt{3}}{\alpha}$.

2. (أ) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = \frac{-\alpha^2 \left(u_n^2 - \frac{3}{\alpha^2} \right)}{\sqrt{3 + (1 - \alpha^2)u_n^2} + u_n}$.

(ب) برّر أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنّها متقاربة .

3. (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ ، $v_n = u_n^2 - \frac{3}{\alpha^2}$.

(أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $(1 - \alpha^2)$ يطلب حساب حدّها الأول بدلالة α .

(ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم بيّن أنّه من أجل كلّ $n \in \mathbb{N}$ ، $u_n = \frac{\sqrt{3}}{\alpha} \sqrt{1 - (1 - \alpha^2)^n}$ ، ثمّ أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ بدلالة α .

4. (أ) أحسب بدلالة n و α المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$.

(ب) من أجل كلّ عدد طبيعي n نضع $T_n = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2$.

- بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $T_n = S_n + (n + 1) \frac{3}{\alpha^2}$ ، ثمّ أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$ بدلالة α .

التمرين الثاني : (05 نقاط)

I. ليكن α عددا طبيعيا حيث : $6 \leq \alpha < 10$. و ليكن N عددا طبيعيا يكتب 10404 في نظام التعداد الذي أساسه α و يكتب أيضا 2644 في نظام التعداد الذي أساسه $\alpha + 2$.

1. بيّن أنّ α يحقق المعادلة $\alpha(\alpha^3 - 2\alpha^2 - 14\alpha - 52) = 48$.

2. جد قيمة α ثم أكتب العدد $N + 2$ في النظام العشري .

II. نضع $\alpha = 6$ ، و نعتبر المعادلة $Nx - 1805y = 3249$: (E) حيث x و y عددان صحيحان .

1. حدّد $PGCD(N; 1805)$ ثمّ بيّن أنّ المعادلة (E) تقبل على الأقل حلا .



2. (أ) بيّن أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة (E') حيث $(E') : 4x - 5y = 9$.
 (ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E') . (لاحظ أن $4 + 5 = 9$) .
 (ج) ليكن $(x; y)$ حلا للمعادلة (E') و x و y عدداً طبيعياً .
 - حدد القيم الممكنة لـ $PGCD(x; y)$ ثم جد الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E') حيث $PGCD(x; y) = 3$.
3. (أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الاقليدية للعدد 4^n على 7 .
 (ب) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n العدد $n^3 - n$ يقبل القسمة على 3 .
 (ج) من أجل كل عدد طبيعي n حدد باقي قسمة العدد $4^{n^3-n+2025} + 4^N$ على 7 .

التمرين الثالث : (04 نقاط)

كيس غير شفاف يحتوي على 10 كرات متماثلة لا نفرّق بينها باللمس منها ثلاث كرات بيضاء مرقمة بـ 0 ، π ، $\frac{\pi}{2}$ ، و خمس كرات حمراء مرقمة بـ 0 ، π ، $\frac{\pi}{2}$ ، و كرتين سوداوين مرقمتان بـ π ، $\frac{\pi}{2}$. نسحب من الكيس كرتين على التوالي مع الإرجاع

1. أحسب احتمال تحقق الأحداث التالية :
- A : "الحصول على كرتين مختلفتين في اللون" ، B : "الكرية المسحوبة الأولى حمراء" ، C : "سحب كرتين مجموع رقميهما يساوي π "
2. بين أن $P(B \cap C) = \frac{4}{25}$ ثم استنتج $P(B \cup C)$ و $P_C(B)$.
3. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب كرتين العدد $\cos(\alpha + \beta)$ حيث α هو الرقم المحصل عليه في السحبة الأولى و β هو الرقم المحصل عليه في السحبة الثانية .
- (أ) برّر أن قيم المتغير العشوائي X هي $\{-1; 0; 1\}$ ثم عرّف قانون احتماله .
- (ب) أحسب $E(X)$ الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X ثم استنتج $V(-2X + 2025)$.
- (ج) أحسب $P(|X| + 1 \equiv 0[2])$.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

- I. الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = x - 2 \ln(x)$.
1. (أ) أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $g(x) > 0$.
2. α عدد حقيقي و لتكن f_α الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f_\alpha(x) = \alpha \ln x - \frac{(\ln x)^2}{x}$. المنحنى البياني للدالة f_α في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- بيّن أن جميع المنحنيات (C_α) تشمل نقطة ثابتة A يطلب تحديد إحداثياتها .
- II. في كل ما يلي نضع $\alpha = 1$ و نرمز بـ f إلى الدالة f_1 و بالرمز (C_f) إلى المنحنى (C_1) .

1. (أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ثم فسّر النتيجة بياناً .
- (ب) بيّن أنه من أجل كل $x > 0$: $\frac{(\ln x)^2}{x} = 4 \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2$ ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.



2. أ) يبين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$ ، $f'(x) = \frac{g(x) + (\ln x)^2}{x^2}$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$ ثم شكّل جدول تغيراتها .

3. ليكن (Γ) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln x$ على المجال $]0; +\infty[$.

أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x]$ و فسّر النتيجة بيانياً .

ب) أدرس الوضعية النسبية بين (C_f) و (Γ) ثم يبين أن لهما مماسا مشتركا يطلب تحديد معادلة له .

4. أ) أرسم (Γ) ثم (C_f) .

ب) باستعمال مكاملة بالتجزئة جد الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على $]0; +\infty[$ و التي تنعدم عند القيمة 1 .

ج) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدّد بـ (C_f) و محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتيهما : $x = 1$ و $x = e$.

إنتهى الموضوع الأول



الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 + 2\sqrt{2}z + 8 = 0$ ثم استنتج مجموعة حلول المعادلة $(z-i)^2 + 2\sqrt{2}(z-i) + 8 = 0$.
2. في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين $a = -\sqrt{2} + i\sqrt{6}$ و $b = \sqrt{3} - 1 + i(\sqrt{3} + 1)$.
 أ) أحسب طولية و عمدة العدد a ثم بين أن $a = 2\sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
 ب) تحقق أن: $b = e^{-i\frac{\pi}{4}} \times a$ ثم بين أن $b = 2\sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right]$.
 ج) استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.
3. أكتب على الشكل الجبري العدد $\left(\frac{b}{2\sqrt{2}}\right)^{2025} + \left(\frac{a}{2\sqrt{2}}\right)^{1446}$.
4. C النقطة ذات اللاحقة $c = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$. - بين أن $\frac{a}{c} = i$ ثم استنتج طبيعة المثلث OAC .

التمرين الثاني : (05 نقاط)

1. لتكن (E) المعادلة ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث: $570x - 135y = 1005$.
 أ) جد القاسم المشترك الأكبر للعددين 570 و 135 ، ثم استنتج أن المعادلة (E) تقبل حلولاً في $\mathbb{Z}^2$.
 ب) بين أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلاً للمعادلة (E) فإن $x \equiv 2[9]$ ، ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) .
2. أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على 11.
 ب) جد قيم العدد الطبيعي n التي تحقق $5n^2 - 1446^{2025} + 1446^{3x+y} \equiv 0[11]$ حيث $(x; y)$ حل طبيعي للمعادلة (E) .
3. ليكن n عدد طبيعي و $A = 9n + 2$ و $B = 38n + 1$ وليكن $d' = \text{PGCD}(A; B)$.
 - حدّد القيم الممكنة لـ d' ثم جد الأعداد الطبيعية التي يكون من أجلها العددين A و B أوليان فيما بينهما.
4. L عدد طبيعي يكتب $\overline{1\beta\alpha\alpha\beta 2}$ في نظام التعداد ذو الأساس 4 و يكتب أيضاً $\overline{\alpha\beta\alpha 41}$ في نظام التعداد ذو الأساس 5.
 - جد العددين α و β ثم أكتب العدد L في النظام العشري.
5. أ) حلّ العدد 2025 إلى جداء عوامل أولية ثم استنتج الأعداد الطبيعية التي مربع كل منها يقسم 2025.
 ب) حدّد كل الثنائيات الطبيعية $(a; b)$ التي تحقق $m^2 - 8d^2 = 2025$ حيث $m = \text{PPCM}(a; b)$ و $d = \text{PGCD}(a; b)$.

التمرين الثالث : (04 نقاط)

1. (u_n) المتتالية المعرفة بـ $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = (2 - u_n)e^{-u_n} + u_n$.
 أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - 2 = (1 - e^{-u_n})(u_n - 2)$.
 ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 2$.



2. بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة .

3. نضع $\alpha = (1 - e^{-2})$.

(أ) استنتج مما سبق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < 1 - e^{-u_n} < \alpha$.

(ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $|u_{n+1} - 2| < \alpha |u_n - 2|$.

(ج) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $|u_n - 2| \leq \alpha^n$ ، ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

4. من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2(n+1) - \frac{1 - \alpha^{n+1}}{e^{-2}} \leq S_n \leq 2(n+1) + \frac{1 - \alpha^{n+1}}{e^{-2}}$ ، ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I. الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = x - e^{-x}$.

1. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ، ثم أحسب $g'(x)$ بدلالة x وشكل جدول تغيرات الدالة g .

2. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $0,5 < \alpha < 0,6$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II. الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{e^x - x}{e^x + 1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. (أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ واحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x]$ وفسر النتيجةين بيانياً .

(ب) أدرس الوضعية النسبية بين (C_f) والمستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x$.

2. (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x + 1)^2}$.

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

(ج) بين أن $f(\alpha) = 1 - \alpha$ ، ثم استنتج حصراً للعدد $f(\alpha)$.

3. (أ) أرسم (Δ) و (C_f) . نأخذ $0,4 \approx f(\alpha)$.

(ب) جد قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $f(x) = e^m$ حلين متميزين بالضبط .

4. نسمي S مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 0$ و $x = -1$.

(أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \in [-1; 0]$ ، $\frac{1}{2}(x+1)e^x \leq \frac{(x+1)e^x}{e^x + 1} \leq \frac{e^x}{e^x + 1}$.

(ب) باستعمال تكامل بالتجزئة أحسب $\int_{-1}^0 (x+1)e^x dx$ ثم استنتج أن $\frac{1}{2e} \leq S \leq \ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)$.

5. (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_n = \int_n^{n+1} (e^x + 1)f(x)dx$.

- أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية البكالوريا التجريبية



دورة: جوان 2025

الشعبة: تقني رياضي

امتحان تجريبي التعليم الثانوي

المدة: 04 سا و 30 د

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار احد الموضوعين الآتين:

الموضوع الأول

التمرين الأول : (05 نقاط)

I. نعتبر f الدالة المعرفة و المتزايدة تماما على المجال $[1; 2]$ ب : $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$.
- بين أنه إذا كان $x \in [1; 2]$ فإن $f(x) \in [\frac{1}{2}; \frac{4}{5}]$.

II. لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بهذا الأول $u_0 = 1$ و من أجل كل n عدد طبيعي ، $u_{n+1} = \frac{u_n^3 + 2}{u_n^2 + 1}$.

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل n عدد طبيعي : $1 \leq u_n < 2$.

2. (أ) بين أنه من أجل كل n عدد طبيعي : $u_{n+1} - u_n = \frac{2 - u_n}{u_n^2 + 1}$.
(ب) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .

3. (أ) بين أنه من أجل كل n عدد طبيعي : $2 - u_{n+1} = f(u_n)(2 - u_n)$.

(ب) استنتج أنه من أجل كل n عدد طبيعي : $0 < 2 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(2 - u_n)$.

4. بين أنه من أجل كل n عدد طبيعي : $0 < 2 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$ ، ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين الثاني : (04 نقاط)

يحتوي كيس غير شفاف على خمس كريات بيضاء تحمل الأرقام 0 ، 1 ، 2 ، 2 ، 3 وأربع كريات حمراء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 2 ، 2 وكريتين خضراوين تحملان الرقمين 2 ، 3. (كل الكرات متماثلة ولا يمكن التمييز بينها باللمس)

نسحب عشوائيا في آن واحد من الكيس ثلاث كريات و نعتبر الأحداث التالية : A : "الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون"

B : "الحصول على ثلاث كريات من نفس الرقم" C : "الحصول على ثلاث كريات تحمل ألوان العلم الوطني"

1. أحسب الإحتمالات التالية : $P(A)$ ، $P(B)$ ، $P(C)$ ، ثم بين أن $P(C \cap B) = \frac{14}{165}$ واستنتج $P(C \cup B)$.

2. نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات الحمراء المتبقية في الكيس.

(أ) حدّد قيم المتغير العشوائي X .

(ب) عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X وأحسب أمله الرياضي ثم جد قيمة العدد a حتى يكون $E(11X + a) = 2025$

3. نسحب الآن ثلاث كريات على التوالي بدون إرجاع

احسب احتمال الحدثين ، E : "الحصول على رقم أولي على الأقل" F : "الحصول على جداء الأرقام معدوم".



التمرين الثالث : (04 نقاط)

1. نعتبر المعادلة : $(E) \quad 21x - 12y = 6 \dots\dots$ حيث x و y عددين صحيحين .

(أ) بين أن المعادلة (E) تقبل حلولاً في Z^2 .

(ب) أثبت أنه إذا كانت الثنائية (x, y) حل للمعادلة (E) فإن : $y \equiv 3[7]$ ثم حل في Z^2 معادلة (E) .

(ج) استنتج الثنائيات (x, y) حلول المعادلة (E) التي تحقق : $x + y$ مضاعف لـ 9 .

2. n عدد طبيعي، ليكن $d = PGCD(a; b)$ القاسم المشترك الأكبر للعددين $a_n = 4n + 2$ و $b_n = 7n + 3$.

(أ) بين أن : $PGCD(a, b) = PGCD(n + 1, 2)$ ، ثم حدّد حسب قيم العدد الطبيعي n القيم الممكنة لـ d .

(ب) استنتج $(3 + 7 \times 2025^{1446} + 2; 4 \times 2025^{1446} + 2)$.

3. نعتبر الأعداد الطبيعية A_n و B_n حيث : $A_n = 7n^2 + 10n + 3$ و $B_n = 4n^2 + 6n + 2$.

- بين أن العددين A_n و B_n يقبلان القسمة على $n + 1$ ، ثم عبر حسب قيم n و بدلالة n عن القيم الممكنة لـ $PGCD(A_n, B_n)$.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{-2}{1 + e^x} + 1$ ، (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أحسب كلّاً من $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتائج بيانياً .

2. بين أنه من أجل كلّ عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{2e^x}{(1 + e^x)^2}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكّل جدول تغيراتها .

3. من أجل كلّ عدد حقيقي x أحسب $f(-x) + f(x)$ و فسر النتيجة بيانياً .

4. أكتب معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند مبدأ المعلم .

5. (أ) أنشئ المماس (T) ثم أرسم (C_f) .

(ب) ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) = |m|x$.

6. (أ) بين أنه من أجل كلّ عدد حقيقي x ، $f(x) = \frac{2e^x}{1 + e^x} - 1$ ،

(ب) أحسب A مساحة الحيز المحدّد بـ (C_f) و المستقيمت التي معادلاتها : $y = 0$ ، $x = 0$ و $x = \ln 2$.

7. من أجل كلّ عدد طبيعي n نضع : $u_n = (1 + e^n)(f(n) + 1)$ و $S_n = \ln u_0 + \ln u_1 + \dots + \ln u_n$.

(أ) بين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها و حدّها الأول .

(ب) أكتب S_n بدلالة n . ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

إنتهى الموضوع الأول



الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

لتكن (E) المعادلة ذات المجهولين الصحيحين x و y : (E) : : $2x - 5y = 1$.

1. جد الحل الخاص $(x_0; y_0)$ الذي يحقق $x_0 = 3y_0$ ثم حل المعادلة (E) .

2. جد مجموعة قيم العدد الطبيعي λ الذي يحقق : $\begin{cases} \lambda \equiv 1447[5] \\ \lambda \equiv 2025[2] \end{cases}$.

3. جد الثنائيات الطبيعية $(x; y)$ حلول المعادلة (E) و التي تحقق $9^\lambda + x \times y \equiv 0[10]$.

4. ليكن N عددا طبيعيا يكتب 23 في نظام التعداد الذي أساسه α و يكتب 54 في نظام التعداد الذي أساسه β .

جد العددين الطبيعيين α و β إذا علمت أن $3\beta - \alpha = 3$ ثم أكتب العدد $52N - 3$ في النظام العشري .

التمرين الثاني : (05 نقاط)

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بحدّها الأول $u_1 = \frac{5}{2}$ و من أجل كل n عدد طبيعي غير معدوم $u_{n+1} = 3 - \frac{n}{2(n+1)}(3 - u_n)$.

1. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل n عدد طبيعي غير معدوم : $u_n < 3$.

2. (أ) بيّن أنّه من أجل كل n عدد طبيعي غير معدوم : $u_{n+1} - u_n = \frac{n+2}{2(n+1)}(3 - u_n)$.

(ب) استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها .

3. (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ $v_n = n(3 - u_n)$.

(أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسيّة أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب حساب حدّها الأول .

(ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم بيّن أنّه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $u_n = 3 - \frac{1}{n \times 2^n}$ ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

4. من أجل كل n عدد طبيعي غير معدوم نضع : $P_n = (u_1 - 3) \times (u_2 - 3) \times \dots \times (u_n - 3)$.

- بيّن أنّ $P_n = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n(n+1)}}{n!}$.

التمرين الثالث : (04 نقاط)

يحتوي كيس غير شفاف على 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس منها كرتين تحملان الرقم 1 و ثلاث كريات تحمل الرقم 2 و كرتين تحملان الرقم

3 و كرتين تحملان الرقم 5 و كرية تحمل الرقم 4. نسحب عشوائيا من الكيس كرتين في آن واحد. و نعتبر الأحداث التالية :

A : " الحصول على كرتين مجموع رقميهما يساوي 6 " B : "الحصول على كرتين جداء رقميهما مضاعف للعدد 2 "

C : "الحصول على كرتين تحملان رقمين أوليين فيما بينهما " .

1. أحسب $P(A)$ و $P(B)$ ثم بيّن أنّ $P(C) = \frac{37}{45}$.

2. بيّن أنّ $P(A \cap C) = \frac{4}{45}$ ، ثم استنتج $P(\overline{A \cup C})$.



3. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لكريتين القاسم المشترك الأكبر للرقمين المسجلين عليهما .

(أ) بَرر أن قيم المتغير العشوائي X هي $\{1; 2; 3; 5\}$.

(ب) عَرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي ثم استنتج $E(150X + 1835)$.

4. نعيد الكيس إلى وضعه الأول و نضيف له كرية تحمل الرقم 0 ثم نسحب منه أربع كريات على التوالي دون إرجاع .

- أحسب احتمال الحصول على أربع كريات أرقامها تشكل العدد 2025 .

التمرين الرابع : (07 نقاط)

في كل ما يلي المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

I. g الدالة العددية المعرفة على المجال $] -1; +\infty[$ بـ : $g(x) = 1 - (x + 1) \ln(x + 1)$.

1. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ثم بَيّن أن $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = 1$.

2. (أ) أدرس إتجاه تغير الدالة g و شكّل جدول تغيراتها .

(ب) بَيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $0,76 < \alpha < 0,77$

ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $] -1; +\infty[$ و بَيّن أن $\ln(\alpha + 1) = \frac{1}{\alpha + 1}$.

3. نعتبر G الدالة المعرفة على $] -1; +\infty[$ بـ : $G(x) = x + \frac{1}{4}(x + 1)^2 [1 - 2 \ln(x + 1)]$.

(أ) بَيّن أن الدالة G هي دالة أصلية للدالة g على المجال $] -1; +\infty[$.

(ب) أحسب بدلالة α العدد $\mathcal{A}$ مساحة الحيز المستوي المحدّد بـ (C_g) و المستقيمت التي معادلاتها $y = 0$ ، $x = 0$ و $x = \alpha$.

(ج) بَيّن أن $\mathcal{A}(\alpha) = \left(\frac{1}{4}\alpha^2 + \alpha - \frac{1}{2} \right) u.a$

II. f الدالة العددية المعرفة على المجال $] -1; +\infty[$ بـ : $f(x) = e^{2-x} \ln(x + 1)$ ، (C_f) تمثيلها البياني .

1. (أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ و فسر النتيجة بيانياً .

(ب) بَيّن أنه من أجل كل $x > -1$: $f(x) = e^3 \times \frac{x + 1}{e^{x+1}} \times \frac{\ln(x + 1)}{x + 1}$ ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و فسر النتيجة بيانياً .

2. (أ) بَيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \in] -1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{e^{2-x}}{x + 1} g(x)$.

(ب) استنتج إتجاه تغير الدالة f و شكّل جدول تغيراتها .

3. أكتب معادلة (T) مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

4. أرسم (T) و (C_f) . نأخذ $f(\alpha) \approx 1,95$.

5. جد قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماماً m حتى تقبل المعادلة $f(x) = e^2 x + \ln(m)$ حلين متمايزين .



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية البكالوريا التجريبية



دورة: جوان 2025

الشعبة: علوم تجريبية

امتحان بكالوريا تجريبي التعليم الثانوي

المدة: 03 سا و 30 د

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار احد الموضوعين الآتين:

الموضوع الأول

التمرين الأول : (05 نقاط)

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بحدّها الأول $u_1 = \frac{5}{2}$ و من أجل كل n عدد طبيعي غير معدوم $u_{n+1} = 3 - \frac{n}{2(n+1)}(3 - u_n)$.

1. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل n عدد طبيعي غير معدوم : $u_n < 3$.

2. (أ) بين أنّه من أجل كل n عدد طبيعي غير معدوم : $u_{n+1} - u_n = \frac{n+2}{2(n+1)}(3 - u_n)$.

(ب) استنتج إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها.

3. (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ $v_n = n(3 - u_n)$.

(أ) بين أنّ المتتالية (v_n) هندسيّة أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب حساب حدّها الأول.

(ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم بين أنّه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $u_n = 3 - \frac{1}{n \times 2^n}$ ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

4. من أجل كل n عدد طبيعي غير معدوم نضع : $S_n = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \dots + nu_n$.

- أكتب عبارة S_n بدلالة n .

التمرين الثاني : (04 نقاط)

في كل حالة مما يأتي توجد إجابة وحيدة صحيحة إخترها مع التبرير

1. الشكل الأسّي للعدد المركّب $z = ie^{i\frac{\pi}{2}}$ هو

أ- $z = e^{i\pi}$	ب- $z = ie^{i\pi}$	ج- $z = e^{i\frac{\pi}{2}}$
-------------------	--------------------	-----------------------------

2. الشكل الجبري للعدد المركّب $z = 1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2024}$ هو :

أ- $z = i$	ب- $z = 1$	ج- $z = -i$
------------	------------	-------------

3. المعادلة $5z^2 - 3|z|^2 + 6 - 10i = 0$ تقبل حلّين مركّبين هما :

أ- $z_1 = -1 - i, z_2 = 1 - i$	ب- $z_1 = -i, z_2 = i$	ج- $z_1 = -1 - i, z_2 = 1 + i$
--------------------------------	------------------------	--------------------------------

4. العدد $z = (1 + 2i)^{2025} + (1 - 2i)^{2025}$:

أ- معدوم	ب- تخيلي صرف	ج- حقيقي
----------	--------------	----------



التمرين الثالث : (04 نقاط)

يحتوي صندوق على أربع كريات سوداء و كرية واحدة بيضاء (كل الكريات متماثلة لانفرق بينها باللمس) ، نعتبر اللعبة التالية : يقوم لاعب برمي زهرة نرد متوازن مرقم من 1 إلى 6 ، إذا كان الرقم الظاهر فرديا نضيف كرية بيضاء إلى الصندوق و إذا كان الرقم الظاهر زوجيا نضيف كرية سوداء إلى الصندوق بعد ذلك يسحب اللاعب ثلاث كريات في آن واحد من الصندوق ، نسمي الأحداث I : " الرقم الظاهر فردي " N : "الكريات الثلاث المسحوبة سوداء " 1. أحسب $P(N \cap I)$ ، $P_I(N)$ ، $P(I)$

2. (أ) أنقل ثم أكمل شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه الوضعية .

(ب) بين أن $P(N) = \frac{7}{20}$

3. علما أن الكريات المسحوبة كلها سوداء ما احتمال أن يكون الرقم الظاهر زوجيا .

4. ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الكريات البيضاء المسحوبة .

(أ) بين أن $P(X = 1) = \frac{11}{20}$ ، ثم عرّف قانون الاحتمال للمتغير X .

(ب) أحسب $E(x)$ الأمل الرياضي ثم استنتج قيمة العدد الحقيقي α

حتى يكون $E(3X - \alpha) = 2025$.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

الدالة f معرفة على $]0; +\infty[$ ب : $f(x) = \ln x - \frac{(\ln x)^3}{3}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و فسر النتائج بيانيا ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

2. (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$ ، $f'(x) = \frac{(1 - \ln x)(1 + \ln x)}{x}$.

(ب) حل في المجال $]0; +\infty[$ المتراجحة $(1 - \ln x)(1 + \ln x) < 0$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

3. أكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

4. بين أنه من أجل كل $x > 0$ ، $f(x) = \frac{(\ln x)(3 - (\ln x)^2)}{3}$ ثم استنتج النقاط الثلاث التي يتقاطع فيها (C_f) و محور الفواصل .

5. أنشئ المماس (T) ثم ارسم المنحنى (C_f) على المجال $]0; e^2]$.

6. الدالة H معرفة على $]0; +\infty[$ ب : $H(x) = x [(\ln x)^3 - 3(\ln x)^2 + 6 \ln x - 6]$.

(أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \in]0; +\infty[$ ، $H'(x) = (\ln x)^3$.

(ب) أحسب $\mathcal{A}$ مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) ومنحنى الدالة $x \mapsto \ln x$ و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 1$ و $x = e$.

7. الدالة g معرفة على $]0; +\infty[$ ب : $g(x) = |\ln x| \left(1 - \frac{(\ln x)^2}{3}\right)$ ، (C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

(أ) بين أنه من أجل كل $x \in [1; +\infty[$ ، $g(x) = f(x)$ و من أجل كل $x \in]0; 1[$ ، $g(x) = -f(x)$.

(ب) إشرح كيفية رسم (C_g) إنطلاقا من (C_f) ثم ارسمه في المعلم السابق .



الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - (2 + \sqrt{2})z + 2 + \sqrt{2} = 0$.
2. ليكن a العدد المركب المُعرّف بـ : $a = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$
 - (أ) بيّن أنّ $|a| = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$. حيث $|a|$ تمثل طولية العدد المركب a .
 - (ب) بيّن أنّ $a = 1 + e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، ثمّ استنتج أنّ $a = 2 \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) e^{i\frac{\pi}{8}}$.
3. استنتج قيمة كلّ من $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
4. (أ) بيّن أنّ العدد a^{2020} تخيلي صرف و أنّ a^{2024} حقيقي .
 (ب) جد أكبر قيمة للعدد الطبيعي n حتى يكون $|a|^n < 2025$.
- (ج) جد مجموعة النقط M ذات اللاحقة z من المستوي التي تحقق $|z - a| = |-8 + 6i|$.

التمرين الثاني : (05 نقاط)

- لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بحدها الأول $u_0 = \frac{3}{2}$ و من أجل كلّ n عدد طبيعي ، $u_{n+1} = \frac{\sqrt{3u_n^2 + 4}}{2}$.
1. برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ n عدد طبيعي : $0 < u_n < 2$.
 2. (أ) بيّن أنّه من أجل كلّ n عدد طبيعي : $u_{n+1}^2 - u_n^2 = \frac{(2 - u_n)(2 + u_n)}{4}$.
 (ب) استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها .
 3. (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $v_n = u_n^2 - 4$.
 - (أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ يطلب حساب حدها الأول .
 - (ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثمّ بيّن أنّه من أجل كلّ $n \in \mathbb{N}$ ، $u_n = \sqrt{4 - \frac{7}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n}$ ، ثمّ أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
 4. من أجل كلّ n عدد طبيعي نضع : $S_n = \ln \left[v_0 \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \right] + \ln \left[v_1 \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \right] + \dots + \ln \left[v_n \left(\frac{1}{n+2} - 1 \right) \right]$.
 - أكتب عبارة S_n بدلالة n .

التمرين الثالث : (04 نقاط)

- لدينا حجر نرد مغشوش مكعب الشكل أوجهه مرقمة من 1 إلى 6 . نسمي P_n احتمال الحصول على الرقم n مع $1 \leq n \leq 6$ ، الأعداد P_1 ، P_2 ، P_3 ، P_4 ، P_5 ، P_6 بهذا الترتيب تُشكّل حدودا متتابعة من متتالية حسابية و الأعداد P_1 ، P_2 ، P_4 بهذا الترتيب تُشكّل حدودا متتابعة من متتالية هندسية .
1. بيّن أنّ $P_1 = r = \frac{1}{21}$ ، ثمّ بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي $1 \leq n \leq 6$: $P_n = \frac{n}{21}$.
 2. نرمي النرد السابق مرّة واحدة و نسجّل الرقم الظاهر بعد استقرار النرد . أحسب احتمال تحقق الأحداث التالية :

A : " الحصول على رقم زوجي " B : " الحصول على مربع تام "



البكالوريا التجريبية / الأستاذ: لقمان بعون / الشعبة: علوم تجريبية / دورة جوان 2025

3. ليكن X المتغير العشوائي الذي يأخذ كقيمة 2025 إذا كان الرقم الظاهر زوجيا و يأخذ كقيمة 1446 - في باقي الحالات

(أ) عرّف قانون احتمال المتغير العشوائي X .

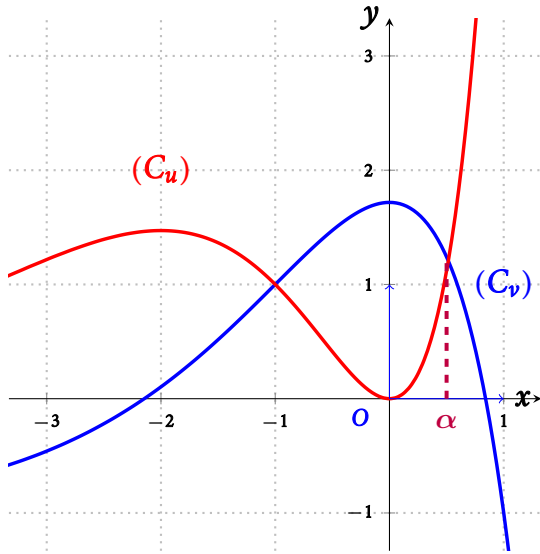
(ب) أحسب $E(X)$ الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X .

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I. المستوى منسوب الى معلم متعامد ومتجانس، في الشكل المقابل (C_u) و (C_v) هما على الترتيب التمثيلان البيانيان للدالتين العدديتين المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـ

$u(x) = x^2 e^{x+1}$ و $v(x) = (1-x)e^{x+1} - 1$ ، (C_v) و (C_u) يتقاطعان في نقطتين احدهما فاصلتها α تحقق : $0.50 < \alpha < 0.52$

و g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (x^2 + x - 1)e^{x+1} + 1$



1. بقراءة بيانية حدد $u(-1)$ و $v(-1)$

2. (أ) حدد حسب قيم العدد الحقيقي x من $\mathbb{R}$ وضعية (C_u) بالنسبة إلى (C_v)

(ب) تحقق ان $g(x) = u(x) - v(x)$ ، ثم حدد تبعا لقيم x اشارة $g(x)$.

II. نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$f(x) = x + 1 - (x^2 + x)e^{-x+1}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب

إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. (أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، ثم بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

(ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(-x)$.

(ج) بين أن الدالة f متزايدة تماما على كل من $[-\infty, -\alpha]$ و $[1, +\infty[$ ومتناقصة تماما على $[-\alpha, 1]$ ثم شكل جدول تغيراتها.

2. (أ) بين أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

(ب) أدرس الوضع النسبي للمستقيم (d) و المنحنى (C_f) .

3. ارسم المستقيم (d) و المنحنى (C_f) . نأخذ $(f(-\alpha) \approx 1.62)$.

4. حدّد قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماما m حتى تقبل المعادلة $f(x) = \ln(m)$ حلان موجبان تماما و حل سالب تماما .

5. الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = 1 - |x| - (x^2 - |x|)e^{|x|+1}$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

(أ) بين أن الدالة h زوجية ثم بين أنه من أجل كل $x \in]-\infty; 0]$ ، $h(x) = f(x)$.

(ب) إشرح طريقة رسم المنحنى (C_h) إنطلاقا من (C_f) ، ثم ارسمه .

إنتهى الموضوع الثاني