الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية | مديرية التربية لولاية المسيلة
إمتحان بكالوريا تجريبي التعليم الثانوي | ثانوية العلامة عبد ا بن غانم الدراجي
الشعبة علوم تجريبية | دورة ماي 2025

بكالوريا تجريبية في مادة الرياضيات | المدة :03 سا و 30د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأوّل :

التمرين الأول: (04 نقاط)

صندوق U_1 يحتوي على 6 كريات حمراء و4 سوداء.

و صندوق U_2 يحتوي على 3 كريات حمراء و 1 كرية سوداء و 1 كرية زرقاء، جميع الكريات متماثلة.

1. نسحب عشوائيا ثلاث كريات على التوالي وبدون إرجاع من الصندوق U_1.
   أ- شكل شجرة الإحتمال المناسبة لهذه الوضعية.
   ب- أحسب إحتمال الحصول على 3 كريات من نفس اللون.
   ج- أحسب إحتمال الحصول على كرية حمراء على الأقل.
2. نسحب عشوائيا كريتين في آن واحد من الصندوق U_1 وكرية واحدة من الصندوق U_2.
   ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات السوداء المسحوبة.
   أ- عين قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X.
   ب- أحسب أمله الرياضياتي ، التباين و الإنحراف المعياري.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{1 + u_n} \quad \text{و} \quad v_n = \frac{u_n + 3}{u_n - 2}$$

1. أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 2$.
   ب- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم إستنتج أنها متقاربة.
2. أ- بين أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{5}{3}$ ثم عبر عن حدها العام v_n بدلالة n.
   ب- إستنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim_{n \to +\infty} u_n$.
3. أحسب بدلالة n المجموع: $S_n = \frac{1}{u_0 - 2} + \frac{1}{u_1 - 2} + ... + \frac{1}{u_n - 2}$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z التالية: $(z+3+2i)(z^2 - z + 5) = 0$

II) نعتبر في المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

النقط A ، B ، C و D لواحقها على الترتيب $z_A = 1-2i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = -3+2i$ و $z_D = -1$

1. أ- أحسب $|z_A - z_D|$ ، $|z_B - z_D|$ و $|z_C - z_D|$.

ب- إستنتج أن النقط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة، يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

2. أكتب العدد المركب $\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ على الشكل الأسي، ثم إستنتج طبيعة المثلث ABC.

3. أ- عين z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;-1),(C;1)\}$.

ب- بين أن الرباعي $ABCG$ مربع.

التمرين الرابع: (08 نقاط)

1. g دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = \dfrac{\ln x}{x} + e$

أ- أدرس تغيرات الدالة g.

ب- أحسب $g\left(\dfrac{1}{e}\right)$ ثم إستنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

2. f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \dfrac{1}{2}(\ln x)^2 + ex - e$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.

أ- بين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = g(x)$ ، إستنتج إتجاه تغير الدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

ب- عين نهايات الدالة f عند 0 و $+\infty$ ثم شكل جدول تغيراتها.

3. اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

4. أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T).

5. ارسم (T) والمنحنى (C_f).

6. h الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $h(x) = x\left[(\ln x)^2 + a\ln x + b\right]$ ، حيث a و b عددان حقيقيان.

أ- عين a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $x \mapsto (\ln x)^2$.

ب- أحسب بـ cm^2 المساحة A للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها $x = \dfrac{1}{e}$ ، $x = 1$ و $y = ex - e$.

7. لتكن k الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $k(x) = e^{2x+1} + 2x^2 - e$

أ- أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $k(x) = f(e^{2x})$.

ب- بإستعمال مشتقة دالة مركبة عين إتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها.

الموضوع الثّاني :

التمرين الأول: (05 نقاط)

يحتوي كيس غير شفاف على ثلاث كريات بيضاء تحمل الأرقام: 0، 1، 1 وثلاث كريات حمراء تحمل الأرقام 1، 2، 2 وكريتين سوداوين تحملان الرقمين 0، 2 . كل الكريات متماثلة و لا نفرق بينها عند اللمس.

نسحب عشوائيا من الكيس ثلاث كريات على التوالي دون إرجاع.

1. أحسب إحتمال الأحداث التالية:
   - A :" الكريات المسحوبة من نفس اللون"
   - B :" ظهور الرقم 1 مرة واحدة فقط في السحبات الثلاث"
   - C :" ظهور الرقم 1 مرتين فقط في السحبات الثلاث"
   - D :" الكرية المسحوبة ثانيا حمراء"
2. بين أن: $P(B \cap D) = \dfrac{17}{84}$
3. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكريات السوداء المتبقية في الكيس.
   - أ- عين قيم المتغير العشوائي X واكتب قانون إحتماله.
   - ب- أحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$.
4. ننزع الآن من الكيس الكريتان السوداوتان فتبقى فيه ثلاث كريات بيضاء وثلاث كريات حمراء.
   نسحب من الكيس كرية واحدة n مرة على التوالي مع الإرجاع في كل مرة.
   - أ- عبر بدلالة n عن إحتمال أن تكون كل الكريات المسحوبة من نفس اللون.
   - ب- أحسب إحتمال أن تكون في كل السحبات على الأقل كرية واحدة حمراء.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(u_n) المتتالية المعرفة بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{1+u_n}$.

1. أ- أحسب u_1 و u_2 ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 3$.
2. لتكن (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n}$.
   - أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{4}$.
   - ب- اكتب v_n ثم u_n بدلالة n ثم أحسب نهاية المتتالية (u_n).
3. (w_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = \dfrac{3}{u_n}$ ، نضع $S_n = w_0 + w_1 + w_2 + ... + w_n$
   - أ- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = 1 - v_n$
   - ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = n + 1 + \dfrac{8}{3}\left(1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$
   - ج- أحسب نهاية: $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{S_n}{n}$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1. عين العددين المركبين α و β حيث: $\begin{cases} \alpha+\beta=-1 \\ 2\overline{\alpha}+\beta=6i \end{cases}$

2. المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ نعتبر النقط I ، A و B لواحقها على الترتيب $z_I=1$ ، $z_A=1-2i$ و $z_B=-2+2i$.

أ- أنشئ النقط I ، A و B.

ب- عين z_w لاحقة النقطة w مركز الدائرة (C) ذات القطر $[AB]$.

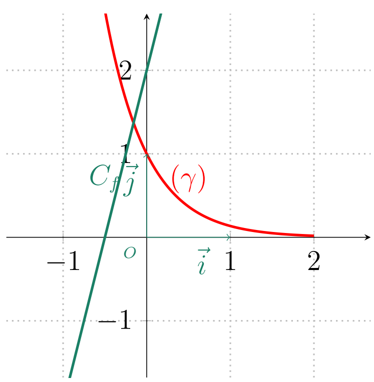
3. D نقطة لاحقتها $z_D=\dfrac{3+9i}{4+2i}$ ، اكتب z_D على الشكل الجبري ثم بين أن النقطة D تنتمي إلى الدائرة (C).

4. E نقطة من الدائرة (C) لاحقتها z_E حيث $z_E=e^{i\frac{\pi}{4}}z_I+\left(1-e^{i\frac{\pi}{4}}\right).z_w$

أ- اكتب العدد $z_E+\dfrac{1}{2}$ على الشكل الأسي.

ب- إستنتج أن $z_E=\dfrac{3\sqrt{2}-2}{4}+\dfrac{3\sqrt{2}}{4}i$

التمرين الرابع: (07 نقاط)



1. (γ) التمثيل البياني للدالة $x\mapsto e^{-2x}$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=4x+2$ ، α هي فاصلة نقطة تقاطع (γ) و (Δ).

g الدالة المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=e^{-2x}-4x-2$

أ- بقراءة بيانية حدد وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) على $\mathbb{R}$ ثم إستنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

ب- تحقق أن: $-0,16<\alpha<-0,15$

2. لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x+3-2xe^{2x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ وحدة الطول $2cm$.

أ- أحسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.

ب- برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $f'(x)=e^{2x}g(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

3. بين أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (D) يطلب تعيين معادلة له ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (D).

4. بين أن: $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha^2+6\alpha+3}{2\alpha+1}$.

5. ارسم المستقيم (D) والمنحنى (C_f) (نأخذ $f(\alpha)=3,07$).

6. أ- أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا موازيا للمستقيم (D) يطلب تعيين معادلة له.

ب- عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلين متمايزين.

7. أ- x عدد حقيقي، بإستعمال التكامل بالتجزئة جد $\displaystyle\int_0^x 2te^{2t}dt$

ب- λ عدد حقيقي أصغر تماما من 0، أحسب بدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) المستقيمات التي معادلاتها $x=0$ و $x=\lambda$ و $y=x+3$ ، ثم جد $\displaystyle\lim_{\lambda\to-\infty}A(\lambda)$.