اختبار في مادة: الرياضيات **المدة: 3سا و30د**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

I - (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{e^{2n+1}}$.

1 - احسب الحدين u_1 و u_2. هل يمكن اعتبار المتتالية (u_n) هندسية؟ علّل إجابتك.

2 - برهن بالتراجع أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n > 0$.

3 - بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $e^{2n+1} > 1$، استنتج اتجاه تغيّر وتقارب المتتالية (u_n).

II - (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على المجموعة $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 1 + \ln u_n$.

1 - احسب الحدود: v_0، v_1 و v_2. هل يمكن اعتبار المتتالية (v_n) حسابية؟ علّل إجابتك.

2 - بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1} = v_n - 2n - 1$، استنتج اتّجاه تغيّر المتتالية (v_n).

3 - برهن بالتراجع أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = 1 - n^2$، استنتج عبارة u_n بدلالة n و $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4 - من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $P_n = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n$ و $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$.

إذا علمت أنّ: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. احسب الجداء P_n ثم المجموع S_n بدلالة n.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 6 كريات بيضاء تحمل الأرقام 0 ، 0 ، 0 ، 1 ، 1 ، 1 و4 كريات سوداء تحمل الأرقام 2 ، 2 ، 3 ، 3 (كل الكريات لا نفرق بينها عند اللّمس). نسحب من هذا الكيس كريتين في آن واحد بطريقة عشوائية.

1 - نسمي الحادثة A: "سحب كريتين من نفس اللون"، والحادثة C: "سحب كريتين تحملان رقمين فرديين".

احسب الاحتمالات: $p(A)$ ، $p(C)$ ، $p(A \cap C)$ والاحتمال الشرطي $p_C(A)$. هل الحدثان A و C مستقلان؟

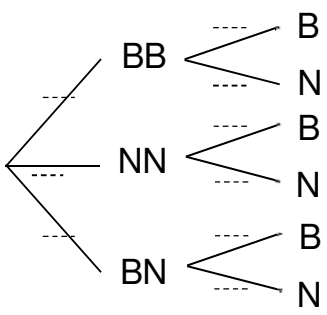
2 - نسمي a و b ترقيم الكريتين المسحوبتين، وX المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب العدد a^b في الحالة التي يكون فيها $a < b$، والعدد $a \times b$ في الحالة التي يكون فيها $a = b$.

أ) برّر أنّ مجموعة قيم X هي $\{0;1;4;8;9\}$، ثم بيّن أنّ $p(X=1) = \dfrac{1}{3}$.

ب) عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X، ثم احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

3 - بعد السحب الأول لكريتين في آن واحد، نُرجع البيضاء المسحوبة للكيس ونضع السوداء المسحوبة جانبا، ثم نسحب من جديد كرية واحدة.

نعتبر الحادثتين: N: سحب كرية سوداء. B: سحب كرية بيضاء.



أ) بيّن أنّ: $p_{NN}(B) = \dfrac{3}{4}$ ، $p_{BB}(B) = \dfrac{3}{5}$ و $p_{BN}(B) = \dfrac{2}{3}$.

ب) انقل واملأ شجرة الاحتمالات المقابلة لنمذجة هذه العملية ثم احسب $p(B)$ والاحتمال الشرطي $p_B(BB)$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

I - 1 - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $\left(z+2i\sqrt{3}\right)\left(z^2-6z+12\right)=0$.

2 - اكتب حلول هذه المعادلة على الشكل الأسي.

II - المستوي مزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. لتكن النقط A ، B ، C و I لاحقاتها:

$z_A=3+i\sqrt{3}$ ، $z_B=3-i\sqrt{3}$ ، $z_C=-2i\sqrt{3}$ و $z_I=2$.

1 - أنشئ النقط A ، B ، C و I . (وحدة الطول 1cm)

2 - بيّن أنّ النقط A ، C و I على استقامة واحدة.

3 - بيّن أنّ النقط A، B و O تنتمي إلى دائرة $\mathscr{C}$ مركزها I، يطلب تحديد نصف قطرها. ارسم الدائرة $\mathscr{C}$.

4 - بيّن أنّ: $\dfrac{z_B}{z_B-z_A}=e^{i\frac{\pi}{3}}$. استنتج طبيعة المثلث OAB والرباعي OABC ثم مثّلهما.

5 - عيّن وأنشئ المجموعة Γ للنقط M من المستوي التي تحقّق: $\left\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right\|$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]-\infty;+\infty[$ بـ: $f(x)=(x^2-4x+4)e^x$.

وليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 - احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، وبيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ ، ثم فسّر بيانيا هذه النتيجة.

2 - أ) أثبت أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإنّ: $f'(x)=(x^2-2x)e^x$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f.

ب) بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيين فاصلة كل منهما.

3 - أ) اكتب معادلة لـ (Δ) مماس المنحني $(\mathscr{C})$ عند النقطة ذات الفاصلة 1.

ب) $(\mathscr{C}')$ المنحني الممثل للدالة $g:x\mapsto e^x$. احسب $g(2)$ و $f(2{,}7)$ ثم ارسم (Δ) ، $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$.

ج) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $(x-2)^2e^{x-m}=1$ ثلاثة حلول متمايزة.

4 - أ) ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمنحني $(\mathscr{C}')$ مع تحديد نقاط تقاطعهما.

ب) عيّن العدد الحقيقي a حتى تكون الدالة $h:x\mapsto(x+a)^2e^x$ أصلية للدالة $(f-g)$ على $\mathbb{R}$.

5 - λ عدد حقيقي سالب تماما. نعتبر $\mathscr{A}(\lambda)$ مساحة الحيّز من المستوي المحدّد بالمنحني $(\mathscr{C})$، المنحني $(\mathscr{C}')$ والمستقيمين اللّذين معادلتاهما: $x=0$ و $x=\lambda$. احسب $\mathscr{A}(\lambda)$ و $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}\mathscr{A}(\lambda)$.

6 - M نقطة من $(\mathscr{C})$ فاصلتها x_M و N نقطة من $(\mathscr{C}')$ فاصلتها x_N حيث $x_M>x_N>1$ و $f(x_M)=g(x_N)$.

أ) باستعمال المسطرة، مثّل تقريبيا على الرسم القطعة المستقيمة [MN] إذا علمت أنّ المسافة $MN=1$.

ب) اكتب عبارة المسافة MN بدلالة x_M و x_N ثم احسب x_M إذا علمت أنّ المسافة $MN=1$.

7 - (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_n=\ln\left[f(n)\right]$، حيث n عدد طبيعي أكبر تماما من 2.

بيّن أنّ $u_n=n+2\ln(n-2)$ ، ثم احسب بدلالة n المجموع: $S_n=u_3+u_4+\ldots+u_n$.

انتهى الموضوع الأول

تصحيح البكالوريا التجريبي 2025م

الموضوع الأول

عبد المطلب

تمرين 1:

(I-1) $u_1 = \frac{u_0}{e} = \frac{1}{e}$ ، $u_2 = \frac{u_1}{e^3} = \frac{1}{e^4}$

$\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$ ومنه: (u_n) ليست هندسية

(2) $n=0$: $u_0 = 1 > 0$ محققة.

نفرض أن $u_n > 0$ ونبرهن صحة $u_{n+1} > 0$ (n كيفي)

لدينا: $u_n > 0$ ؛ $e^{2n+1} > 0$ ، ومنه: $\frac{u_n}{e^{2n+1}} > 0$ ومنه: $u_{n+1} > 0$

ومنه: $(u_n > 0)$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

(3) $n=0$: $e^{2n+1} > 1$ محققة كذلك $n > 0$.

يمكن استعمال البرهان بالتراجع.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{e^{2n+1}} - u_n = \frac{u_n}{e^{2n+1}}\left(1 - e^{2n+1}\right) < 0$$

لأن $e^{2n+1} - 1 > 0$ ، ومنه: (u_n) متناقصة.

(II-1) (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة

$V_0 = 1 + \ln u_0 = 1$ ، $V_1 = 0$ ، $V_2 = -3$

$V_2 - V_1 \neq V_1 - V_0$ ومنه: (V_n) ليست حسابية.

(2) $V_{n+1} = 1 + \ln u_{n+1} = 1 + \ln \frac{u_n}{e^{2n+1}} = 1 + \ln u_n - (2n+1)$

$V_{n+1} = V_n - 2n - 1$ أي $V_{n+1} - V_n = -2n - 1 < 0$

ومنه (V_n) متناقصة.

(3) $n=0$: $V_0 = 1$ محققة

نفرض أن $V_n = 1 - n^2$ ونبرهن صحة: $V_{n+1} = 1 - (n+1)^2$

$V_{n+1} = V_n - 2n - 1 = 1 - n^2 - 2n - 1 = 1 - (n+1)^2$ (محققة)

ومنه: $(V_n = 1 - n^2)$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

$V_n = 1 + \ln u_n$ ، ومنه $(u_n = e^{V_n - 1})$ ، ومنه $(u_n = e^{-n^2})$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

(4) $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n = e^{-0^2} \times e^{-1^2} \times \dots \times e^{-n^2}$

$P_n = e^{-(0^2 + 1^2 + \dots + n^2)} = e^{\frac{-n(n+1)(2n+1)}{6}}$

$P_n = e^{V_0 - 1} \times e^{V_1 - 1} \dots e^{V_n - 1} = e^{V_0 + V_1 + \dots + V_n - 1(n+1)}$

$e^{V_0 + V_1 + \dots + V_n} = P_n \cdot e^{n+1} = e^{\frac{-n(n+1)(2n+1)}{6}} \cdot e^{n+1}$

ومنه: $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n = \frac{(n+1)(n+2)(-2n+3)}{6}$

تمرين 2:

(1) $P(A) = \frac{C_6^2 + C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{7}{15}$ ؛ $P(C) = \frac{C_5^2}{C_{10}^2} = \frac{2}{9}$

$P(A \cap C) = \frac{C_3^2 + C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{4}{45}$ ، $P_C(A) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{2}{5}$

$P_C(A) \neq P(A)$ أي $P(A \cap C) \neq P(A) \times P(C)$

ومنه: A و C غير مستقلتان

(2) $(a=b=0)\ a \times b = 0$ أو $(a=0\ ;\ b=1;2;3)\ a^b = 0 : X = 0$ P

$(a=b=1)\ a \times b = 1$ و $(a=1\ ;\ b=2;3)\ a^b = 1 : X = 1$

$(a=b=2)\ a \times b = 4 : X = 4$

$(a=2\ ;\ b=3)\ a^b = 8 : X = 8$

$(a=b=3)\ a \times b = 9 : X = 9$

$$P(X=1) = \frac{C_3^1 \times C_4^1 + C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{3}$$

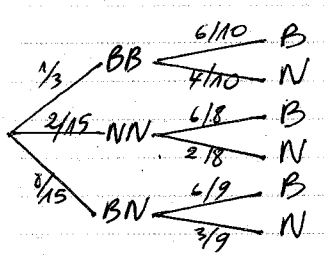
(ب) $$P(X=0) = \frac{C_3^1 \times C_7^1 + C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{8}{15}$$

$$P(X=8) = \frac{C_2^1 \cdot C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{4}{45} \quad P(X=4) = P(X=9) = \frac{C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{45}$$

x_i	0	1	4	8	9
$P(X=x_i)$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{45}$	$\frac{4}{45}$	$\frac{1}{45}$

$$E(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{45} + \frac{32}{45} + \frac{9}{45} = \frac{4}{3}$$

(3) P عند سحب BB يبقى 4N و 6B ، وعند سحب NN يبقى 6B و 2N وعند سحب BN يبقى 6B و 3N.



$P_{BB}(B) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$P_{NN}(B) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

$P_{BN}(B) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

(ب) $P(B) = P(BB \cap B) + P(NN \cap B) + P(BN \cap B)$

$$P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{15} \times \frac{3}{4} + \frac{8}{15} \times \frac{2}{3} = \frac{59}{90}$$

$$P_B(BB) = \frac{P(BB \cap B)}{P(B)} = \frac{18}{59}$$

تمرين 3:

(I-1) $z^2 + 2i\sqrt{3} = 0$ يعني: $z_1 = -2i\sqrt{3}$

$\Delta = -12 = (\pm 2\sqrt{3}i)^2$: $z^2 - 6z + 12 = 0$

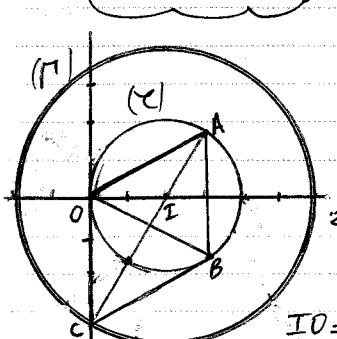
$z_2 = \frac{6 - 2\sqrt{3}i}{2} = 3 - \sqrt{3}i$ ؛ $z_3 = \frac{6 + 2\sqrt{3}i}{2} = 3 + \sqrt{3}i$

(2) $z_1 = 2\sqrt{3}e^{i(-\frac{\pi}{2})}$ $\begin{cases} \cos\theta_1 = 0 \\ \sin\theta_1 = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} |z_1| = 2\sqrt{3} \\ \theta_1 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$

$z_2 = 2\sqrt{3}e^{i(-\frac{\pi}{6})}$ $\begin{cases} \cos\theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} |z_2| = 2\sqrt{3} \\ \theta_2 = -\frac{\pi}{6} \end{cases}$

$z_3 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$ $\begin{cases} \cos\theta_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} |z_3| = 2\sqrt{3} \\ \theta_3 = \frac{\pi}{6} \end{cases}$

(II-1) نشاء (Γ) و (C):



(2) $\frac{z_C - z_A}{z_I - z_A} = \frac{-3 - 3\sqrt{3}i}{-1 - \sqrt{3}i} = 3$

$z_C - z_A = 3(z_I - z_A)$

$\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AI}$ استقامية I ، C ، A في

(3) $IA = |z_A - z_I| = 2$

$IO = |z_I| = 2$ و $IB = |z_B - z_I| = 2$

ومنه O ، A ، B تنتمي للدائرة (C) مركزها I و $r = 2$

ومنه $IA = IO = IB$

(4) $\frac{z_B}{z_B - z_A} = \frac{3 - i\sqrt{3}}{-2i\sqrt{3}} = \frac{(3 - i\sqrt{3})2i\sqrt{3}}{(-2i\sqrt{3})2i\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{\pi}{3}}$

المثلث OAB متقايس الأضلاع $\begin{cases} OB=AB \text{ أي } \left|\frac{z_B}{z_B-z_A}\right|=1 \\ (\vec{AB},\vec{OB})=\frac{\pi}{3} \text{ أي } \arg\left(\frac{z_B}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{3} \end{cases}$

لدينا: $z_B-z_C=z_A$ أي $\vec{CB}=\vec{OA}$ وسابقا $OB=AB$

إذن الرباعي OABC معيّن.

5) $\|\vec{MI}+\vec{IO}+\vec{MI}+\vec{IA}+\vec{MI}+\vec{IB}\|=2\|\vec{CM}+\vec{MA}\|$

I مرجح الجملة $(O,1),(A,1),(B,1)$

$\|3\vec{MI}+\vec{IO}+\vec{IA}+\vec{IB}\|=2\|\vec{CA}\|$

$MI=\frac{2}{3}AC=4$ هي دائرة مركزها I ونصف قطرها $r=4$.

تمرين 4:

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x(x-4)e^x+4e^x\right]=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^2e^x-4xe^x+4e^x\right)=0$

(C) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=0$

2) $f'(x)=(2x-4)e^x+e^x(x^2-4x+4)=(x^2-2x)e^x$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	0	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

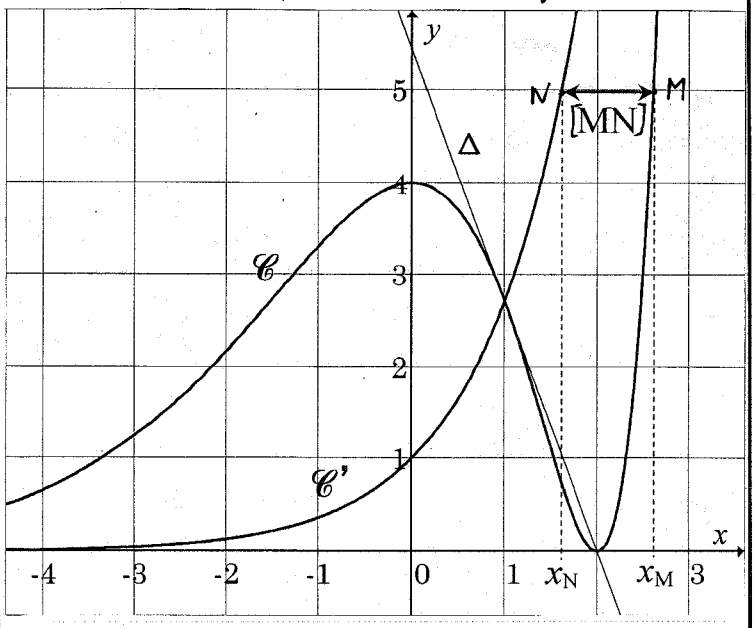
ب) $f''(x)=(2x-2)e^x+e^x(x^2-2x)=(x^2-2)e^x$

f'' تنعدم وتغير إشارتها $-\sqrt{2}$ و $\sqrt{2}$.

$x_1=-\sqrt{2}$ و $x_2=\sqrt{2}$.

3) $y=f'(1)(x-1)+f(1)=-ex+2e$

ب) $f(2,7)\simeq 7,3$ و $g(2)\simeq 7,4$



ج) $(x-2)^2e^x=e^m$ يعني $(x-2)^2e^x\cdot e^{-m}=1$

حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C) مع المستقيمات ذات المعادلة $(y=e^m)$. 3 حلول متمايزة:

أي: $0<e^m<4$ أي $m<\ln 4$

4) $f(x)-e^x=(x^2-4x+3)e^x$

x		1		3	
x^2-4x+3	+	0	−	0	+

$x\in]1;3[$: (C) أسفل (C')

$]-\infty;1[\cup]3;+\infty[$: (C) أعلى (C').

عند $A(1;e)$ و $B(3;e^3)$: (C) يقطع (C').

ب) $h(x)=(x+a)^2e^x$ دالة أصلية لـ $f(x)-g(x)$:

$h'(x)=f(x)-g(x)$

$h'(x)=2(x+a)e^x+e^x(x+a)^2$

$h'(x)=(x^2+(2a+2)x+a^2+2a)e^x$

بالمطابقة مع $(x^2-4x+3)e^x$.

$\begin{cases} 2a+2=-4 \\ a^2+2a=3 \end{cases}$ في فقط التي تحقق $a=-3$ هذه الجملة

ومنه: $h(x)=(x-3)^2e^x$

5) $A(\lambda)=\int_\lambda^0 (f(x)-g(x))\,dx=\left[(x-3)^2e^x\right]_\lambda^0$

$A(\lambda)=9-(\lambda-3)^2e^\lambda$ u.a

$\lim_{\lambda\to-\infty} A(\lambda)=\lim_{\lambda\to-\infty}\left(9-\lambda^2e^\lambda+6\lambda e^\lambda-9e^\lambda\right)=9$ u.a

6) تمثيل القطعة [MN] على الرسم.

ب) $MN=x_M-x_N$

$x_M-x_N=1$ يعني $MN=1$

ولدينا: $f(x_M)=g(x_N)$ ومنه: $x_N=x_M-1$

أي: $f(x_M)=g(x_M-1)$

$(x_M-2)^2e^{x_M}=e^{x_M-1}$ ، $(x_M-2)^2=e^{-1}$

ومنه: $x_M=\frac{1}{\sqrt{e}}+2$ ($x_M>2$) و $|x_M-2|=\frac{1}{\sqrt{e}}$

$x_M\simeq 2,6$

7) $u_n=\ln(n-2)^2e^n=\ln(n-2)^2+\ln e^n$

ومنه: $u_n=2\ln(n-2)+n$

$S_n=u_3+u_4+\cdots+u_n=3+2\ln 1+4+2\ln 2+\cdots+n+2\ln(n-2)$

$S_n=3+4+\cdots+n+2\left(\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln(n-2)\right)$

$S_n=\underbrace{3+4+\cdots+n}_{\text{متتالية حسابية}}+2\ln(1\times 2\times\cdots\times(n-2))$

$S_n=\frac{n-2}{2}(3+n)+2\ln(n-2)!$

ومنه: $S_n=\frac{(n+3)(n-2)}{2}+2\ln(n-2)!$

عبد المطلب "

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

I - 1 - عيّن على الشكل الجبري الجذرين التربيعيين لكل من العددين المركبين $3-4i$ و $-3+4i$.

2 - استنتج في مجموعة الأعداد المركبة حلول المعادلة: $(z+i)^4=16(3-4i)^2$.

II - في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. لتكن النقط A ، B ، C و D من هذا المستوي التي لاحقاتها: $z_A=2+3i$ ، $z_B=-4+i$ ، $z_C=-2-5i$ و $z_D=4-3i$.

1 - أنشئ النقط A ، B ، C و D، وبيّن أنّ الرباعي ABCD متوازي الأضلاع ثم مثّله.

2 - بيّن أنّ: $\frac{z_B-z_D}{z_A-z_C}=e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، ثم استنتج طبيعة الرباعي ABCD.

3 - عيّن لاحقة النقطة I مركز ثقل الرباعي ABCD.

4 - بيّن أنّ النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة $\mathscr{C}$ يطلب حساب نصف قطرها ورسمها.

5 - لتكن النقطة E نظيرة النقطة C بالنسبة لحامل محور الفواصل. بيّن أنّ المستقيم (AE) مماسي للدائرة $\mathscr{C}$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

زهرة نرد بيضاء D_1 مكعبة أوجهها تحمل الأرقام 1، 1، 2، 2، 3، 3. زهرة نرد خضراء D_2 مكعبة أوجهها تحمل الأرقام 1، 1، 2، 2، 3، 4. نرمي النردين في آن واحد ونسجل الرقمين الظاهرين على الوجهين العلويين، حيث a الرقم الظاهر للنرد الأبيض D_1 و b الرقم الظاهر للنرد الأخضر D_2. جميع الأوجه لها نفس حظوظ الظهور.

I - نسمي الحادثة A: $a+b=3$ ، الحادثة B: $a\times b=4$ ، والحادثة C: $a=1$.

احسب الاحتمالات: $p(A)$ ، $p(B)$ ، $p(C)$ ، $p(B\cap C)$ و $p(A\cap C)$ ثم بيّن أنّ الحدثان B و C مستقلان.

II - نعتبر اللّعبة التالية: عند رمي النردين، إذا كان $a>b$ اللّعبة مربحة وإذا كان $a<b$ اللّعبة خاسرة، أما إذا كان $a=b$ فإنّ اللّعبة متعادلة.

D_1 / D_2	1	1	2	2	3	3
1						3
1						
2			0			
2						
3						
4						7

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمية جداء الرقمين الظاهرين عندما تكون اللّعبة مربحة، ومجموع الرقمين الظاهرين عندما تكون اللّعبة خاسرة، والفرق بين الرقمين الظاهرين عندما تكون اللّعبة متعادلة.

1 - برّر أنّ مجموعة قيم X هي $\{0;2;3;4;5;6;7\}$.

2 - انقل واملأ الجدول المقابل ثم بيّن أنّ $p(X=3)=\frac{2}{9}$.

3 - عيّن قانون الاحتمال واحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$.

4 - احسب $p_G(E)$ احتمال $a=2$ علما أنّ اللّعبة مربحة؟

(في كل التمرين، تُعطى النتائج على شكل كسور غير قابلة للاختزال)

التمرين الثالث: (04 نقاط)

I - (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{1}{4}\left(u_n + \frac{3}{2^n}\right)$.

1 - برهن بالتراجع أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n > 0$.

2 - برهن بالتراجع أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n > \frac{1}{2^n}$، استنتج اتجاه تغيّر وتقارب المتتالية (u_n).

II - (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على المجموعة $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n - \frac{3}{2^n}$.

1 - أثبت أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$، يطلب حساب حدها الأول v_0.

2 - اكتب عبارة كل من v_n و u_n بدلالة n ثم واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3 - عيّن أكبر قيمة للعدد n الذي يحقّق $v_n > 2025^{-24}$.

4 - من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$. بيّن أنّ: $S_n = 10 - 3\times 2^{-n} - 2^{-2n}$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I - نعتبر الدالة g المعرّفة على المجال $]0\,;+\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 - x - 3 + \ln x$

1 - احسب $g'(x)$، ثم بيّن أنّ الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0\,;+\infty[$.

2 - بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2 < \alpha < 2{,}1$، ثم استنتج إشارة $g(x)$.

II - نعتبر الدالة f المعرّفة على المجال $]0\,;+\infty[$ بـ: $f(x) = x - 2 + (2 - \ln x)\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 - أثبت أنّه من أجل كل $x > 0$ فإنّ: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$. استنتج اتّجاه تغيّر الدالة f.

2 - احسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ (أعط تفسيرا بيانيا) وبيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f.

3 - أ) ادرس وضعية $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x - 2$ مع تحديد نقطة تقاطعهما.

ب) هل يمكن اعتبار (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ $(\mathscr{C})$؟ علّل إجابتك.

ج) اكتب معادلة لـ (Δ') مماس المنحني $(\mathscr{C})$ عند النقطة ذات الفاصلة 1.

4 - أ) بيّن أنّ $f(\alpha) + 3 = \frac{(\alpha-1)(\alpha+1)^2}{\alpha}$. استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

ب) ارسم (Δ)، (Δ') و $(\mathscr{C})$ في المجال $]0\,;13]$. نأخذ $f(\alpha) \simeq 2$ وسلم الرسم $1cm$.

5 - أ) باستعمال التكامل بالتجزئة، بيّن أنّ: $\int_1^{e^2} (2 - \ln x)\left(1 + \frac{1}{x}\right)dx = e^2 - 1$، ثم استنتج حساب مساحة الحيّز المستوي $\mathscr{A}$ المحدّد بـ $(\mathscr{C})$، (Δ) والمستقيمين اللّذين معادلتاهما: $x = 1$ و $x = e^2$.

ب) عيّن a ارتفاع مستطيل قاعدته $e^2 - 1$ ومساحته تساوي المساحة $\mathscr{A}$.

ج) $\mathscr{A}'$ مساحة الحيّز المحدّد بـ(Δ) والمستقيمات: $y = 0$، $x = 0$ و $x = b$ $(b > 2)$. عيّن b بحيث $\mathscr{A}' = \mathscr{A} + 3$.

انتهى الموضوع الثاني

تصحيح البكالوريا التجريبي 2025م

الموضوع 2:

تمرين 1:

عبد المطلب

I - 1) لنحل المعادلة: $z^2 = 3-4i$

أي $(x+iy)^2 = 3-4i$ أي $x^2 - y^2 + 2xyi = 3-4i$

بجمع المعادلة الأولى و الثانية: $x^2 = 4$ نجد: $x=2$ أو $x=-2$

نعوض في المعادلة الثالثة: $y=-1$ و $y=1$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \\ 2xy = -4 \end{cases}$$

ومنه الجذرين التربيعيين لـ $3-4i$: $(2-i)$ و $(-2+i)$

بالمثل الجذرين التربيعيين لـ $-3+4i$: $(1+2i)$ و $(-1-2i)$

2) يعني: $(z+i)^4 = 16(3-4i)^2$

$(z+i)^2 = 4(3-4i)$ أو $(z+i)^2 = 4(-3+4i)$

$z_1 + i = 2(2-i)$ ، أو $z_2 + i = 2(-2+i)$

$z_3 + i = 2(1+2i)$ و $z_4 + i = 2(-1-2i)$

$z_1 = 4-3i$ ، $z_2 = -4+i$ ، $z_3 = 2+3i$ ، $z_4 = -2-5i$

II - 1) $z_B - z_A = z_C - z_D = -6-2i$

ومنه $\vec{AB} = \vec{DC}$ ABCD متوازي الأضلاع.

2) $\frac{z_B - z_D}{z_A - z_C} = \frac{-8+4i}{4+8i} = i$

$\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $\begin{cases} \cos\theta = 0 \\ \sin\theta = 1 \end{cases}$ ، $|i| = 1$

$\frac{z_B - z_D}{z_A - z_C} = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$

$[CA]$ و $[BD]$ متقايسان ومتعامدتان ومنه: ABCD مربع.

$$\begin{cases} \left|\frac{z_B - z_D}{z_A - z_C}\right| = \frac{DB}{CA} = 1 \\ \arg\left(\frac{z_B - z_D}{z_A - z_C}\right) = (\vec{CA}, \vec{DB}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

3) $z_I = \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4} = -i$

4) $IA = |z_A - z_I| = |2+4i| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$IB = |z_B - z_I| = |-4+2i| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$IC = |z_C - z_I| = |-2-4i| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$ID = |z_D - z_I| = |4-2i| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$IA = IB = IC = ID$ ، A, B, C و D تنتمي إلى الدائرة (ح) ذات المركز I ونصف القطر $r = 2\sqrt{5}$

5) $\frac{z_C - z_A}{z_E - z_A} = \frac{-4-8i}{-4+2i} = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$ و $z_E = -2+5i$

أي $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_E - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}$ ومنه: $(AE) \perp (AC)$ مماس لـ (ح).

تمرين 2:

I $P(A) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$ ، $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ ، $P(C) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

$P(B \cap C) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ ، $P(A \cap C) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

ومنه: $P(B \cap C) = P(B) \times P(C)$ و B و C مستقلتان

II - 1)

D_2 \ D_1	1	1	2	2	3	3
1	0	0	2	2	3	3
1	0	0	2	2	3	3
2	3	3	0	0	6	6
2	3	3	0	0	6	6
3	4	4	5	5	0	0
4	5	5	6	6	7	7

2) ملء الجدول: $P(X=3) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

3)

x_i	0	2	3	4	5	6	7
$P(X=x_i)$	$\frac{10}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{2}{36}$

$E(X) = \frac{8}{36} + \frac{24}{36} + \frac{8}{36} + \frac{20}{36} + \frac{36}{36} + \frac{14}{36} = \frac{55}{18}$

$P_G(E) = \frac{P(E \cap G)}{P(G)} = \frac{4/36}{12/36} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ أو مباشرة $\frac{4}{12}$

تمرين 3:

I - 1) $n=0$: $u_0 = 6$ محققة $(u_0 > 0)$

نفرض أن $u_n > 0$ و نبرهن صحة $u_{n+1} > 0$ (كيفي)

لدينا: $u_n > 0$ ، $\frac{3}{2^n} > 0$ ، $\frac{1}{4}\left(u_n + \frac{3}{2^n}\right) > 0$

أي: $u_{n+1} > 0$ ومنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 0$

2) $n=0$: $u_0 > 1$ و $\frac{1}{2^0} = 1$ محققة.

نفرض أن $u_n > \frac{1}{2^n}$ و نبرهن صحة: $u_{n+1} > \frac{1}{2^{n+1}}$

لدينا: $u_n > \frac{1}{2^n}$ ، $u_n + \frac{3}{2^n} > \frac{1}{2^n} + \frac{3}{2^n}$

$u_{n+1} > \frac{1}{2^n} > \frac{1}{2 \cdot 2^n}$ ؛ $\frac{1}{4}\left(u_n + \frac{3}{2^n}\right) > \frac{1}{4} \times \frac{4}{2^n}$

ومنه: من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} > \frac{1}{2^{n+1}}$: $u_n > \frac{1}{2^n}$

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4 \cdot 2^n} - u_n = \frac{-3}{4}\left(u_n - \frac{1}{2^n}\right) < 0$

(u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة.

II - 1) $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{3}{2^{n+1}} = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4 \cdot 2^n} - \frac{3}{2^{n+1}}$

$v_{n+1} = \frac{1}{4}u_n - \frac{3}{4 \cdot 2^n} = \frac{1}{4}\left(u_n - \frac{3}{2^n}\right) = \frac{1}{4}v_n$

$v_0 = 6-3 = 3$ و $q = \frac{1}{4}$: ومنه (v_n) متتالية هندسية

2) الحد العام لـ (v_n): $v_n = v_0 \cdot q^n = 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$

الحد العام لـ (u_n): $u_n = v_n + \frac{3}{2^n} = 3\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{3}{2^n}$

$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$ لأن $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ و $\lim_{n \to +\infty} \frac{3}{2^n} = 0$

3) $\frac{3}{4^n} > 2025^{-24}$ ، $\ln\left(\frac{3}{4^n}\right) > \ln 2025^{-24}$

$\ln 3 - \ln 4^n > -24 \ln 2025$ ، $\ln 4^n < 24 \ln 2025 + \ln 3$

ومنه $n < 132,6$ ، $n < \frac{24 \ln 2025 + \ln 3}{\ln 4}$: $n = 132$

4) $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = v_0 + \frac{3}{2^0} + v_1 + \frac{3}{2^1} + \cdots + v_n + \frac{3}{2^n}$

$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n + 3\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) = 3\left(\frac{1-(1/4)^{n+1}}{1-1/4}\right) + 3\left(\frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2}\right)$

$S_n = 4\left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right) + 6\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 10 - \frac{1}{2^{2n}} - \frac{3}{2^n} = 10 - 3 \cdot 2^{-n} - 2^{-2n}$

تمرين 4 :

I - 1) $g'(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - x + 1}{x} > 0$

مميز $2x^2 - x + 1$ سالب وإشارته من إشارة 2

g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

2) g مستمرة ومتزايدة تماما على $]0;+\infty[$

$g(2) \simeq -0,3 < 0$ و $g(2,1) \simeq 0,05 > 0$. $]2;2,1[$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2 < \alpha < 2,1$.

إشارة $g(x)$:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

II - 1) $f'(x) = 1 + \left(\frac{-1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{-1}{x^2}\right)(2 - \ln x)$

$f'(x) = 1 + \frac{-x-1}{x^2} + \frac{-2+\ln x}{x^2} = \frac{x^2 - x - 1 - 2 + \ln x}{x^2}$

$f'(x) = \frac{x^2 - x - 3 + \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

f متزايدة تماما على $[\alpha;+\infty[$.

f متناقصة تماما على $]0;\alpha]$.

2) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty + \infty = +\infty$ ($x=0$ مقارب عمودي)

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left[1 - \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right] = +\infty$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

3) $f(x) - (x-2) = (2 - \ln x)\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

$0 < x < e^2$ و $2 - \ln x > 0$ و $\left(1 + \frac{1}{x}\right) > 0$

x	0		e^2		$+\infty$
$f(x) - (x-2)$	‖	$+$	0	$-$	

$(\mathcal{C})$ أسفل (Δ) : $0 < x < e^2$.

$(\mathcal{C})$ أعلى (Δ) : $x > e^2$.

(Δ) يقطع $(\mathcal{C})$ عند $A(e^2; e^2 - 2)$

ب) $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x-2)] = -\infty$

لا يمكن اعتبار (Δ) مستقيم مقارب لـ $(\mathcal{C})$

ج) $y = f'(1)(x-1) + f(1) = -3x + 6$

4) $f(\alpha) = \alpha - 2 + (2 - \ln\alpha)\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$

لدينا $g(\alpha) = 0$ أي $-\ln\alpha = \alpha^2 - \alpha - 3$

$f(\alpha) = \alpha - 2 + \frac{2 - \ln\alpha}{\alpha} = \alpha - 2 + \frac{\alpha^2 - \alpha - 3}{\alpha}$

$f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha - 4 - \frac{1}{\alpha} = \alpha^2 - 1 + \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha} - 3$

$3 + f(\alpha) = (\alpha^2 - 1)\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{(\alpha^2-1)(\alpha+1)}{\alpha} = \frac{(\alpha-1)(\alpha+1)^2}{\alpha}$

$f(\alpha) + 3 = \frac{(\alpha-1)(\alpha+1)^2}{\alpha}$

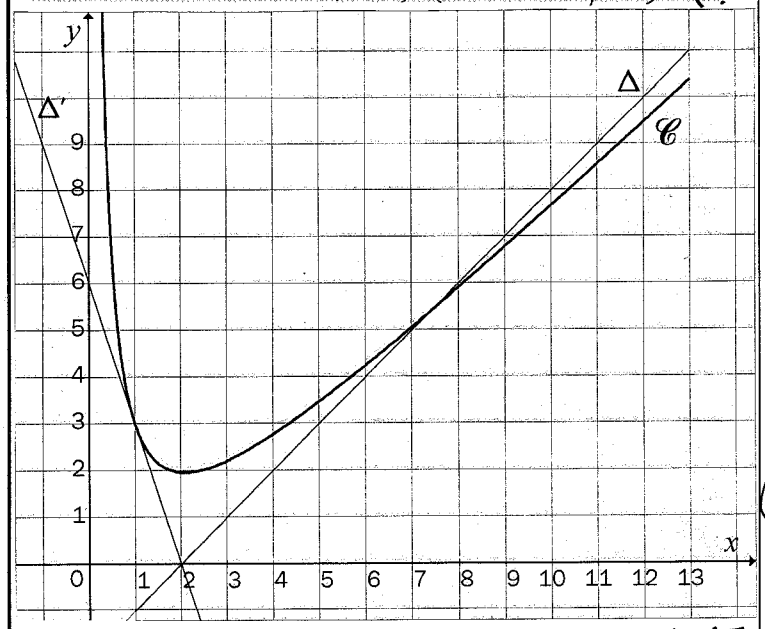
$3 < \alpha + 1 < 3,1$; $2 < \alpha < 2,1$

$9 < (\alpha+1)^2 < 9,61$; $1 < \alpha - 1 < 1,1$

$\frac{1}{2,1} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{2}$; $9 < (\alpha+1)^2(\alpha-1) < 10,571$

$1,3 < f(\alpha) < 2,3$ $\quad 4,3 < \frac{(\alpha+1)^2(\alpha-1)}{\alpha} < 5,3$

ب) رسم : $(\mathcal{C})$ ، (Δ) و (Δ')



P(5

$\begin{cases} u'(x) = -\frac{1}{x} \\ v(x) = x + \ln x \end{cases}$ ← $\begin{cases} u(x) = 2 - \ln x \\ v'(x) = 1 + \frac{1}{x} \end{cases}$

$\int_1^{e^2} (2 - \ln x)\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = \left[(x + \ln x)(2 - \ln x)\right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \left(-1 - \frac{\ln x}{x}\right) dx$

$= \left[(x + \ln x)(2 - \ln x) + x + \frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^{e^2} = e^2 - 1$

$A = \int_1^{e^2} f(x) - (x-2)\, dx = \int_1^{e^2} (2 - \ln x)\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = (e^2 - 1)\,u.a$

ب) $a \times (e^2 - 1) = e^2 - 1$ ومنه $a = 1$

ج) $A' = \int_0^2 -(x-2)\, dx + \int_2^b (x-2)\, dx$

$A' = \left[\frac{-x^2}{2} + 2x\right]_0^2 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_2^b = \frac{b^2 - 4b + 8}{2}$

$\frac{b^2 - 4b + 8}{2} = e^2 - 1 + 3$ يعني $A' = A + 3$

$b^2 - 4b + 4 = 2e^2$ ، $(b-2)^2 = 2e^2$

$b - 2 = \sqrt{2}e$ أي $b > 2$

ومنه : $b = \sqrt{2}e + 2 \simeq 5,8$

"عبد المطلب"