الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية سطيف
امتحان البكالوريا التجريبي
المستوى : 03 الرياضيات

ثانويات سطيف المقاطعة –02–
دورة : ماي 2025

اختبار في مادة : الرياضيات
المدة : 04 ساعات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأوّل :

التمرين الأول: (05 نقاط)

I) 1) (U_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ حيث $U_1 = \frac{1}{e}$ بـ: $U_{n+1} = \frac{n+1}{e \cdot n} U_n$

أ) أثبت بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $U_n > 0$

ب) قارن بين $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ و 1 ثمّ استنتج أنّ المتتالية (U_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}^*$ ، برر تقاربها .

2) (V_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}^*$ ب: $V_n = \frac{U_n}{e \cdot n}$

أ) أثبت أنّ المتتالية (V_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{e}$, جد حدها الأول V_1 ثمّ جد عبارة V_n بدلالة n .

ب) استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = n \cdot e^{-n}$ ، ثمّ احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

3) أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = U_1 + \frac{1}{2}U_1 + \frac{1}{3}U_3 + \cdots + \frac{1}{n}U_n$ ، ثمّ أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

4) أكتب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع T_n حيث: $T_n = \frac{U_1}{V_1} + \frac{U_2}{V_2} + \frac{U_3}{V_3} + \cdots + \frac{U_n}{V_n}$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

I) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول (x,y) ، حيث x و y عددان صحيحان.

$$11x - 24y = 1 \cdots\cdots (E)$$

1) تحقق أنّ (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

2) باستخدام خوارزمية عين حلا خاصا للمعادلة (E) . ثمّ حل المعادلة (E)

II) نعتبر العددين $a = 10^{11} - 1$ و $b = 10^{24} - 1$

1) بيّن انّ 9 يقسم كلا من a و b .

2) بين أنه مهما كان الحل (x,y) للمعادلة (E) فإنّ :

$$(10^{11x} - 1) - 10(10^{24y} - 1) = 9$$

3) بين أنّ : $10^{11} - 1$ يقسم $10^{11x} - 1$ ثم استنتج أنه يوجد عددان صحيحان M و N حيث: $aM + bN = 9$.

4) بين أنّ كل قاسم للعددين a و b هو قاسم لـ 9 .

5) إستنتج مما سبق : $PGCD(a,b)$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

I) 1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z-1)(z^2-2z+2)=0$

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب $z_A=1+i$ ، $z_B=1-i$ و $z_C=-1-i$

أ) بيّن انّ العدد $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2028}$ عدد حقيقي.

ب) أكتب على الشكل الأسي العدد المركب $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$ ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC .

ج) عيّن z_D لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع .ماهي طبيعته؟

II) يحتوي كيس غير شفاف على أربع كريات تحمل الأرقام $i,-i,5,-5$ وثلاث كريات تحمل الأرقام $2+i,-i,2$ ، و كرتين تحملان الرقمين $5i,5$ نسحب في آن واحد من الكيس كريتين .

أ) أحسب احتمال الأحداث التالية :

A : " الحصول على كريتين تحملان عددين مترافقين "

B : " الحصول على كريتين تحملان عددين أحدهما تخيلي صرف و الآخر حقيقي "

C : " الحصول على كريتين تحملان عددين متعاكسين في الإشارة "

التمرين الرابع: (05 نقاط)

I) f الدّالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x)=x-e+\ln(1+2e^{-2(x-e)})$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. ($\|\vec{i}\|=1$ الوحدة cm.)

1)أ) تحقق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=-x+e+\ln(2+e^{2(x-e)})$

ب) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ج) أدرس اتّجاه تغيّر الدّالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2)أ) بيّن انّ (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (D) و (D') معادلتيهما: $y=x-e$ و $y=-x+e+\ln(2)$ عند $+\infty$ و $-\infty$ على الترتيب .

ب) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (D) و (D') .

ج) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=\ln(\sqrt{2})+e$ محور تناظر لـ (C_f) .

3) أنشىء المنحنى (C_f) و المستقيمات (D) ، (D') و (Δ) .

4) (D_m) هي المستقيمات التي معادلاتها $y=mx-m\left(e+\frac{\ln(2)}{2}\right)+\frac{\ln(2)}{2}$ ، m وسيط حقيقي.

أ) بيّن أنّ جميع المستقيمات تشمل النقطة الثابتة $A(\frac{\ln(2)}{2}+e;\frac{\ln(2)}{2})$

ب) ناقش حسب القيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x)=mx-m\left(e+\frac{\ln(2)}{2}\right)+\frac{\ln(2)}{2}$

إنتهى الموضوع الاول

الموضوع الثّاني :

التمرين الأول: (05 نقاط)

I) 1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$$

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A,B و C التي لاحقاتها z_A, z_B و z_C على الترتيب, حيث:

$z_A = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$ و $z_C = \overline{z_B}$.

1) اكتب z_A و z_B على الشكل الأسي ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

2) تحقق أن: $\frac{z_B}{z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ وحدد طبيعة المثلث OBC .

3) استنتج أن: B هي صورة C بدوران r يطلب تعيين عناصره المميزة .

III) نسمي (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق : $|z| = \left|\overline{z} - \frac{\sqrt{3}+i}{2}\right|$

4) عين طبيعة المجموعة (Γ) .

التمرين الثاني: (05 نقاط)

I) نعتبر المعادلة $(E)\cdots\cdots 21x - 12y = 6$ ، حيث : x و y عددين صحيحين .

أ) بيّن أنّ المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

ب) أثبت أنّه إذا كانت (x,y) حلولا للمعادلة (E) فإنّ: $y \equiv 3[7]$ ، ثمّ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) .

ج) استنتج جميع الثائيات (x,y) حلول المعادلة (E) ، التي تحقق: $x+y$ من مضاعف لـ 9 .

II) n عدد طبيعي و $d = PGCD(a,b)$ القاسم المشترك الأكبر للعددين $a = 4n+2$ و $b = 7n+3$.

أ) بيّن انّ : $PGCD(a,b) = PGCD(n+1;2)$

ب) عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n القيم الممكنة لـ d .

ج) استنتج : $PGCD(4\times 2025^{1446}+2 \quad ; \quad 7\times 2025^{1446}+3)$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

I) يحتوي كيس غير شفاف على خمس كريات بيضاء تحمل الأرقام $3,2,2,1,0$ ، و أربع كريات حمراء تحمل الأرقام $2,2,1,1$ و كرتين خضراوين تحملان الرقمين $3,2$ (كل الكريات متماثلة و لا يمكن التمييز بينها باللمس) . نسحب عشوائيا في آن واحد من الكيس ثلاث كريات و نعتبر الأحداث:

A : " الحصول على ثلاث كريات من نفس اللّون "

B : " الحصول على ثلاث كريات من نفس الرّقم "

C : " الحصول على ثلاث كريات تحمل ألوان العلم الجزائري "

1) أحسب الاحتمالات التالية : $P(C\cap B), P(B\cup C), P(C), P(B), P(A)$

2) نعتبر المتغيّر العشوائي X ، الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات الحمراء المتبقية في الكيس .

أ) عيّن قيم المتغيّر العشوائي X .

ب) عرّف قانون احتمال المتغيّر العشوائي X و احسب أمله الرياضياتي .

التمرين الرابع: (05 نقاط)

I) f الدّالة المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=4xe^{-x^2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ($\|\vec{i}\|=\|\vec{i}\|=2$, الوحدة (cm))

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) أدرس اتّجاه تغير الدّالة f على المجال $]0;+\infty[$. ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) عيّ معادلة نصف المماس (Δ) للمنحنى (C_f) في المبدأ . ثمّ انشىء (C_f) .

4) جد قيمة العدد a حيث: $a=\int_0^1 f(x)dx$ ثمّ استنتج بـ (cm^2) مساحة الحيز $\mathcal{A}$ من المستوي المحدد بـ (C_f) و حاملي محوري الاحداثيات و المستقيم الذي معادلته $x=1$.

II) n عدد طبيعي حيث: $n\geq 2$. نعتبر الدّالة العددية f_n المعرّفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي : $f_n(x)=4x^ne^{-x^2}$

1) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x حيث: $x>1$ لدينا: $e^{-x^2}<e^{-x}$, ثمّ استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$

2) ادرس اتّجاه تغيّر الدّالة f_n ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) بيّن أنّه يوجد عدد حقيقي U_n من المجال $]0,1[$ بحيث: $f_n(U_n)=1$.

4) تحقق انّ: $f_{n+1}(U_n)=U_n$.

5) بيّن أن : $\dfrac{-\ln(4)}{n}<\ln(U_n)<\dfrac{1}{n}-\dfrac{\ln(4)}{n}$

6) استنتج قيمة L نهاية (U_n) .

إنتهى الموضوع الثاني

التصحيح النموذجي لامتحان بكالوريا التجريبي
شعبة الرياضيات
Bac 2025

الموضوع الأول :

التمرين الأول :

أ- البرهان باستدلال بالتراجع أن من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $U_n > 0$

نضع : $P(n) : "U_n > 0 , n \in \mathbb{N}^*"$

نتحقق من صحة $P(1)$: لدينا :

$P(1) : "U_1 > 0"$

$: "\frac{1}{e} > 0"$

إذن : $P(1)$ صحيحة. نفرض $P(n)$ صحيحة ونثبت صحة $P(n+1)$ أي أن

$P(n+1) : "U_{n+1} > 0 , n \in \mathbb{N}^*"$

لدينا من فرضية التراجع :

$P(n)$ $\quad U_n > 0$

معناه : $\frac{n+1}{e.n} U_n > 0$

إذن : $U_{n+1} > 0$

ومنه $P(n+1)$ صحيحة. حسب مبدأ الاستدلال (البرهان) بالتراجع $P(n)$ صحيحة من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$

ب - المقارنة بين $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ و 1 ثم استنتاج اتجاه تغير (U_n) وتبرير تقاربها :

من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ لدينا :

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} - 1 = \frac{n+1}{e.n} - 1 = \frac{n+1-en}{e.n}$$

$$= \frac{n(1-e)+1}{e.n}$$

من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ $e.n > 0$

لدينا : $n \in \mathbb{N}^*$ معناه : $n \geq 1$

بالتكافؤ : $(1-e)n \leq 1-e$

إذن : $(1-e)n+1 \leq 1-e+1$

أي $(1-e)n+1 \leq 2-e < 0$

إذن : $(1-e)n+1 \leq 0$

أي : $\frac{U_{n+1}}{U_n} - 1 \leq 0$

ومنه : $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1$

نستنتج أن : (U_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}^*$

بما أن (U_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة.

ج) (V_n) معرفة بالعبارة : $V_n = \frac{U_n}{e.n}$

أ- إثبات أن (V_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{e}$

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم لدينا :

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1}}{e(n+1)} = \frac{(n+1)}{e.n} U_n \times \frac{1}{e(n+1)}$$

$$= \frac{1}{e^2} \frac{U_n}{n} = \frac{1}{e}\left(\frac{U_n}{e.n}\right)$$

$$= \frac{1}{e} V_n$$

إذن : (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{e}$

حدها الأول : $V_1 = \frac{U_1}{e} = \frac{\frac{1}{e}}{e}$

$$= \frac{1}{e^2}$$

عبارة V_n بدلالة n :

لدينا : $V_n = V_1 . q^{n-1} = \frac{1}{e^2} \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}$

$$= \frac{1}{e^2} \cdot \frac{1}{e^{n-1}} = \frac{1}{e^{n+1}} = \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}$$

Scanné avec CamScanner

ب) استنتاج عبارة U_n بدلالة n :

لدينا : $V_n = \frac{U_n}{e.n}$ تكافئ :

$U_n = e.n\, V_n$

$= e.n.\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}$

$= \frac{n.e}{e^{n+1}} = \frac{n}{e^n} = n e^{-n}$

إذن : $\boxed{U_n = n e^{-n}}$.

⊙ حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$:

لدينا :

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{e^n} = 0$

③ حساب S_n بدلالة n :

لدينا :

$S_n = U_1 + \frac{1}{2}U_1 + \frac{1}{3}U_3 + \cdots + \frac{1}{n}U_n$

من جهة أخرى :

$V_n = \frac{U_n}{e.n}$

معناه : $e\,V_n = \frac{1}{n}U_n$

ومنه : $\sum_{k=1}^{n} e.V_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}U_k$

إذن : $S_n = e\sum_{k=1}^{n} V_k$

$= e\left(\frac{1}{e^2}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{e}\right)^n}{1-\frac{1}{e}}\right)\right)$

$= \frac{\frac{1}{e}}{\left(1-\frac{1}{e}\right)}\left(1-\left(\frac{1}{e}\right)^n\right)$

$= \frac{\frac{1}{e}}{\frac{e-1}{e}}\left(1-\left(\frac{1}{e}\right)^n\right)$

$= \frac{1}{e-1}\left(1-\left(\frac{1}{e}\right)^n\right) = \frac{1}{(e-1)}(1-e^{-n})$

$= \frac{1-e^{-n}}{e-1}$

ومنه :

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-e^{-n}}{e-1} = \frac{1}{e-1}$

لأن : $-1 < \frac{1}{e} < 1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^n = 0$

④ تبيان أن T_n بدلالة n :

لدينا :

$T_n = \frac{U_1}{V_1} + \frac{U_2}{V_2} + \cdots + \frac{U_n}{V_n}$

أيضا :

$\frac{U_n}{V_n} = e.n$ بحيث $V_n = \frac{U_n}{e.n}$

إذن : $\sum_{k=1}^{n} \frac{U_k}{V_k} = e\sum_{k=1}^{n} k$

ومنه :

$T_n = e(1+2+3+\cdots+n)$

$= e\left(\frac{n}{2}(n+1)\right)$

$= \frac{e.n}{2}(n+1) = \frac{en^2+e}{2}$

$= \frac{e}{2}n^2 + \frac{e}{2}$.

التمرين الثاني :

لدينا : $11x - 24y = 1 \ldots (E)$

① التحقق أن (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$:

بما أن : $PGCD(11,24) = 1$ إذن : (E)

تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$

Scanné avec CamScanner

إيجاد الحل الخاص (x_0, y_0) للمعادلة (E):

خوارزمية اقليدس:

الباقي	2	24
	11	2
1	2	5

إذن: $1 = 11 - 5(2)$

$= 11 - 5(24 - 2\times 11)$

$= 11 - 5\times 24 + 10\times 11$

$= 11\times 11 - 5\times 24$

$= 11(11) - 24(5)$

إذن: $(x_0, y_0) = (11, 5)$

حلول المعادلة (E) في $\mathbb{Z}^2$:

لدينا:

$$\begin{cases} 11x - 24y = 1 \\ 11(11) - 24(5) = 1 \end{cases}$$

ومنه: $11x - 24y = 11(11) - 24(5)$

بحذف نجد: $11(x-11) = 24(y-5)$ ... $(*)$

لدينا: $24 \wedge 11 = 1$ ، $24 \mid 11(x-11)$

حسب غوص $24 \mid (x-11)$ إذن يوجد $k \in \mathbb{Z}$ بحيث: $x - 11 = 24k$ ومنه:

$x = 24k + 11$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

بالتعويض في $(*)$ نجد: $11 - x$ بـ $24k$

$11(24k) = 24(y-5)$

إذن: $y - 5 = 11k$

ومنه: $k \in \mathbb{Z}$ مع $y = 11k + 5$

ومنه:

$S = \{(24k+11, 11k+5) \mid k \in \mathbb{Z}\}$

③ لدينا: $a = 10^{11} - 1$ ، $b = 10^{24} - 1$

بيان أن a و b يقبلان القسمة على 9:

لدينا: $10 \equiv 1 [9]$ ومنه: $10^{11} \equiv 1 [9]$

إذن: $10^{11} - 1 \equiv 0 [9]$ ومنه:

$9 \mid a$ أي $a \equiv 0 [9]$

أيضا، $10 \equiv 1 [9]$ ومنه

إذن: $10^{24} \equiv 1 [9]$: $10^{24} - 1 \equiv 0 [9]$

$9 \mid b$ أي $b \equiv 0 [9]$: ومنه،

④ بيان أنه إذا كان (x, y) حلا للمعادلة (E) فإن: $(10^{11x} - 1) - 10(10^{24y} - 1) = 9$

لدينا:

$(10^{11x} - 1) - 10(10^{24y} - 1) =$

$10^{11(24k+11)} - 1 - 10(10^{24(11k+5)} - 1)$

$= 10^{264k+121} - 1 - 10^{264k+121} + 10$

$= 10 - 1 = 9$

⑤ بيان أن: $10^{11} - 1 \mid 10^{11x} - 1$:

لدينا $10^{11} - 1 \equiv 0 [10^{11} - 1]$

ومنه: $10^{11} \equiv +1 [10^{11} - 1]$

نستنتج: $10^{11x} \equiv 1 [10^{11} - 1]$

إذن: $10^{11x} - 1 \equiv 0 [10^{11} - 1]$

ومنه: $10^{11} - 1 \mid 10^{11x} - 1$ ومنه يوجد $M \in \mathbb{Z}$ بحيث: $10^{11x} - 1 = M(10^{11} - 1)$

Scanné avec CamScanner

بالمثل: $10^{24} \equiv 1 \equiv 0 [10^{24}-1]$

معناه: $10^{24} \equiv 1 [10^{24}-1]$

اذن: $10^{24x} \equiv 1 [10^{24}-1]$

ومنه، $10^{24x} - 1 \equiv 0 [10^{24}-1]$

اذن يوجد $N' \in \mathbb{Z}$ بحيث:

$10^{24x} - 1 = N'(10^{24}-1)$

بالتعويض في المعادلة السابقة نجد:

$(10^{11x}-1) - 10(10^{24y}-1) = 9$

نكافئ:

$M(\underbrace{10^{11}-1}_{=a}) - 10N'(\underbrace{10^{24}-1}_{=b}) = 9$

معناه $Ma + (-10N')b = 9$

اذن $Ma + Nb = 9$

مع: $N = -10N'$

6) لدينا:

$\begin{cases} d/Ma \\ d/Nb \end{cases}$ معناه: $\begin{cases} d/a \\ d/b \end{cases}$

اذن: $d/Ma+Nb$

ومنه: $d/9$ ..... (2)

معناه: $d \in D_9 = \{1,3,9\}$

من (3 سؤال) معناه: $\begin{matrix} 9/a \\ 9/b \end{matrix}$

معناه: $9/PGCD(a,b)$ ، $9 \in D_{a,b}$

7) استنتاج d: ..... (1)

من (1) و (2)

اذن: $d/9$ ، $9/d$ $\boxed{d=9}$

لأن: a و b أعداد طبيعية.

التمرين الثالث:

1) حلول المعادلة في $\mathbb{C}$:

لدينا: $(z-1)(z^2-2z+2)=0$

نكافئ:

$\begin{cases} z-1=0 \\ \text{أو} \\ z^2-2z+2=0 \end{cases}$

اذن: $z_1 = 1$ ، حلول المعادلة $z^2-2z+2=0$

$\Delta = 4-4(1)(2) = 4-8 = -4$

$= (2i)^2$

اذن:

$\begin{cases} z_3 = \frac{2-2i}{2} = 1-i \\ \text{و} \\ z_4 = \frac{2+2i}{2} = 1+i \end{cases}$

اذن: $S = \{1, 1+i, 1-i\}$

2) بيان أن $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2025} \in \mathbb{R}$

نكتب z_A و z_B على الشكل الأسي:

$z_A = 1+i$ ، $|z_A| = \sqrt{2}$

$\theta = \arg(z_A)$

$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

اذن: $\theta \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$: ومنه،

$z_A = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$

أيضا: $z_B = 1-i$: لأن $z_B = \overline{z_A}$

$= \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4}i}$

Scanné avec CamScanner

$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$: ومنه

$$\frac{z_A}{z_B} = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$: ج1

$$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2028} = e^{\frac{i\pi}{2}(2028)}$$: ج1

$$= e^{i1014\pi}$$

$$= \cos(1014\pi) + i\sin(1014\pi)$$

$$= 1 \in \mathbb{R}$$

ب) نبين أن $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ عدد حقيقي

لدينا :

$$\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{-1-i-1+i}{1+i-1+i} = \frac{-2}{2i}$$

$$= -\frac{1}{i} = +i$$

$$= e^{i\frac{\pi}{2}}$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC

لدينا :

$$\left|\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right| = \left|e^{i\frac{\pi}{2}}\right| = 1$$

ج1 :

$BC = AB$

إذن المثلث متساوي الساقين

$$\text{Arg}\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$k \in \mathbb{Z}$

ج1 : المثلث ABC قائم في B

ومنه : المثلث ABC قائم في B ومتساوي الساقين

ج) تعيين الموقع D : رباعي الأضلاع ABCD متوازي أضلاع

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$$

بما أن : $z_A - z_B = z_D - z_C$

ج1 :

$$z_D = z_A - z_B + z_C$$

ومنه

$$z_D = 1+i-1+i-1-i$$

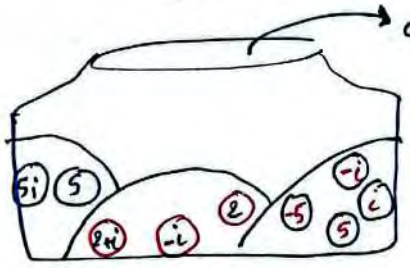
$$= i - 1 = -1 + i$$

ج1 : $D(-1,1)$

بما أن : $\hat{B} = \frac{\pi}{2}$, $AB = BC$

إذن : ABCD مربع .

(3) ؟



السحب لا تحوي على مادتين مختلفتين

عدد الحالات الممكنة هي : $C_9^2 =$

إذن : توجد إمكانية للسحب .

حساب : P(A) ، P(B) ، P(C)

A : "سحب كرتين من الكرتين $(5,5)$ ، $(-i,i)$"

$$P(A) = \frac{C_2^1 \times C_1^1 + C_2^1 \times C_1^1}{C_9^2}$$

$$= \frac{2+2}{36} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

B : "سحب كرتين من الكرتين $(2+i)$ ، $(-i)$"

$$P(B) = \frac{C_4^1 \times C_4^1}{C_9^2} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

Scanné avec CamScanner

حساب $P(C)$:

الحدث C معناه :

$(i,-i)$ أو $(5,-5)$.

$$P(C) = \frac{C_1^1 \times C_2^1 + C_1^1 \times C_2^1}{C_9^2}$$

$$= \frac{2+2}{36} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

التمرين الرابع :

لدينا :

$$f(x) = x - e + \ln(1 + 2e^{-2(x-e)})$$

$D_f = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$.

① التحقق أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = -x + e + \ln(2 + e^{2(x-e)})$$

لدينا :

$$f(x) = x - e + \ln(1 + 2e^{-2(x-e)})$$

$$= x - e + \ln\left(1 + \frac{2}{e^{2(x-e)}}\right)$$

$$= x - e + \ln\left(\frac{e^{2(x-e)} + 2}{e^{2(x-e)}}\right)$$

$$= x - e + \ln(2 + e^{2(x-e)}) - \ln(e^{2(x-e)})$$

$$= x - e + \ln(2 + e^{2(x-e)} - 2(x-e)$$

$$= -x + e + \ln(2 + e^{2(x-e)}) .$$

ب - حساب النهايتين :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x + e + \ln(1 + 2e^{-2(x-e)})$$

$$= +\infty$$

لأن : $\lim_{x \to +\infty} e^{-2(x-e)} = 0$ ، و $\lim_{x \to 1} \ln(x) = 0$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} -x + e + \ln(2 + e^{2(x-e)})$$

$$= +\infty$$

لأن : $\begin{cases} \lim_{x \to -\infty} e^{2(x-e)} = 0 \\ \lim_{x \to -\infty} -x = +\infty \end{cases}$ ،

ج) دراسة اتجاه تغير f + جدول تغيراتها :

f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 1 + \frac{-4e^{-2(x-e)}}{1 + 2e^{-2(x-e)}}$$

$$= \frac{2e^{-2(x-e)} - 4e^{-2(x-e)} + 1}{1 + 2e^{-2(x-e)}}$$

$$= \frac{-2e^{-2(x-e)} + 1}{1 + 2e^{-2(x-e)}}$$

لدينا : $1 + 2e^{-2(x-e)} > 0$ من أجل كل $x \in \mathbb{R}$

إذن إشارة $f'(x)$ من إشارة $1 - 2e^{-2(x-e)}$

لدينا : $f'(x) = 0$ يكافئ :

$$2e^{-2(x-e)} = 1$$

أي أن : $e^{-2(x-e)} = \frac{1}{2}$

أي أن : $-2(x-e) = -\ln(2)$

أي أن : $x - e = \frac{\ln(2)}{2}$

ومنه ، $\boxed{x = e + \frac{\ln(2)}{2}}$

Scanné avec CamScanner

ومنه: جدول تغيرات f:

x	$-\infty$	$\frac{\ln(2)}{2}+e$	$+\infty$
$-f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f\left(\frac{\ln(2)}{2}+e\right)$	↗ $+\infty$

② بيان أن (D) و (D') مقاربين لـ $(\mathcal{C}_f)$:

لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-e) = \lim_{x\to+\infty} \ln(1+2e^{-2(x-e)})$$

$$= \ln(1) = 0$$

إذن: $y = x+e$ معادلة مستقيم مقارب لـ $(\mathcal{C}_f)$ مائل بجوار $+\infty$

من جهة أخرى:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-(-x+e+\ln(2)) =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \ln(2+e^{2(x-e)}) - \ln(2)$$

$$= \ln(2)-\ln(2) = 0$$

إذن: $y = -x+e+\ln(2)$ معادلة مقارب لـ $(\mathcal{C}_f)$ مائل بجوار $-\infty$.

ب) الوضع النسبي لـ $(\mathcal{C}_f)$ و (D):

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$:

لدينا $f(x)-y = \ln(1+2e^{2(x-e)})$

$f(x)-y=0$ تعني:

$1+2e^{-2(x-e)} = 1$

إذن: $2e^{-2(x-e)} = 0$ مستحيل

إذن: $(\mathcal{C}_f)\cap(D) = \emptyset$

$f(x)-y>0$ تعني:

$\ln(1+2e^{-2(x-e)}) > 0$

إذن: $1+2e^{-2(x-e)} > 1$

لأن: $2e^{-2(x-e)} > 0$ مستحيل دوما

إذن: $(\mathcal{C}_f)$ فوق (D) على $\mathbb{R}$

بالمثل $(\mathcal{C}_f)$ فوق (D') على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	
الوضع	$(\mathcal{C}_f)$ فوق (D)	

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	
الوضع	$(\mathcal{C}_f)$ فوق (D')	

ج) بيان أن: $y = \ln(\sqrt{2})+e$ محور تناظر لـ $(\mathcal{C}_f)$:

لدينا: $\forall x\in\mathbb{R}$ و $2(\ln(\sqrt{2})+e)-x \in \mathbb{R}$

$$f(2a-x) =$$

$$f(\ln(2)+2e-x) =$$

$$-\ln(2)-2e-x+e+\ln(2+e^{2(\ln(2)+2e-x-e)})$$

$$= -\ln(2)+x-e+\ln(2+4e^{-2(x-e)})$$

$$= -\ln(2)+x-e+\ln(2)+\ln(1+e^{-2(x-e)})$$

$$= x-e+\ln(1+e^{-2(x-e)})$$

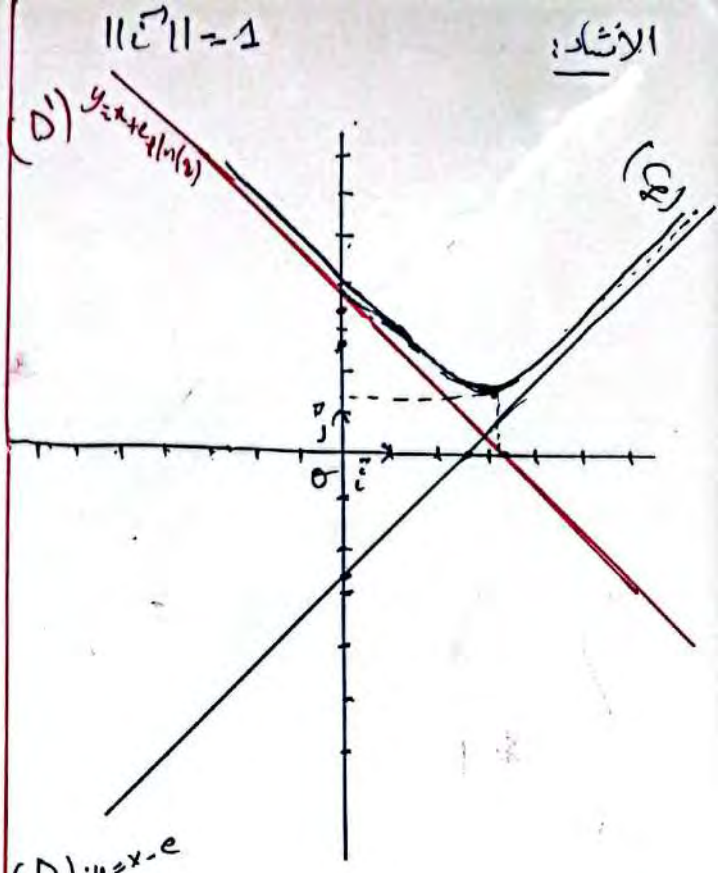
$$= f(x)$$

إذن: (D) محور تناظر لـ $(\mathcal{C}_f)$.

د)

Scanné avec CamScanner

الإنشاء:



(4)

$(D_m) : y = mx - m\left(e + \frac{\ln(2)}{2}\right) + \frac{\ln(2)}{2}$

إيجاد إحداثيات النقطة الثابتة: A

لدينا:

$$y - mx + m\left(e + \frac{\ln(2)}{2}\right) - \frac{\ln(2)}{2} = 0$$

معناه:

$$\left(y - \frac{\ln(2)}{2}\right) + m\left(-x + e + \frac{\ln(2)}{2}\right) = 0$$

معناه:

$$\begin{cases} y - \frac{\ln(2)}{2} = 0 \\ -x + e + \frac{\ln(2)}{2} = 0 \end{cases}$$

أي:

$$\begin{cases} y = \frac{\ln(2)}{2} \\ x = e + \frac{\ln(2)}{2} \end{cases}$$

أي: $A\left(\frac{\ln(2)}{2} + e, \frac{\ln(2)}{2}\right)$

(8)

المناقشة:

$m \in [-1, 1]$ ، $S = \phi$

$m \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

حلان مختلفان

Scanné avec CamScanner

الموضوع ②

التمرين الأول:

1) حلول المعادلة z ∈ ℂ:

لدينا: $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$

حساب: $\Delta = 3 - 4(1)(1) = 3 - 4 = -1$

إذن: $\sqrt{\Delta} = i$

ومنه:

$$\begin{cases} z_1 = \frac{\sqrt{3} - i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\ \text{و} \\ z_2 = \frac{\sqrt{3} + i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \end{cases}$$

$$S = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \,;\, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right\}$$

1) كتابة z_A و z_B على الشكل الأسي:

$|z_A| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = \sqrt{1} = 1$

نضع: $\theta = \arg(z_A)$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

حساب: $\theta \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

إذن: $z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}$

من جهة أخرى:

$z_B = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

حساب:

$|z_B| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1$

$\arg(z_B) = \theta'$

$$\begin{cases} \cos\theta' = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta' = \frac{1}{2} \end{cases} \longrightarrow \theta' \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$$

إذن: $z_B = e^{i\frac{\pi}{6}}$

تعيين قيم n:

لدينا:

$$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}}\right)^n = e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)n}$$

$$= e^{i\frac{\pi}{6}n}.$$

بما أن: $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ فإن: $e^{i\frac{\pi}{6}n} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

تكافئ: $\frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

حساب:

$\frac{n}{6} = \frac{1}{3} + 2k$

إذن:

$n = 2 + 12k \quad , k \in \mathbb{N}$

② لدينا:

$$\frac{z_B}{z_C} = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{i\frac{\pi}{2}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= e^{i\frac{\pi}{3}}$$

إذن: $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

و $(OB = OC)$

إذن: OBC مثلث متقايس الأضلاع.

③ تعيين الكتابة المركبة للدوران R:

لدينا: $\frac{z_B}{z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

حساب:

$z_B - z_O = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_C - z_O)$

إذن B هي صورة C بالدوران R الذي مركزه المبدأ O، وزاويته $\theta = \frac{\pi}{3}$

④ طبيعة المجموعة (Γ):

لدينا: $|z| = |z - z_B|$ ⑰

حساب: $z_B = \overline{z_C}$ و $\overline{z_B} = z_C$

بمكافئ: $|z| = |\overline{z - z_C}|$

بمكافئ: $|z - z_0| = |z - z_C|$

معناه: $OM = CM$

أي (Γ) هي المستقيم المحوري للقطعة $[OC]$.

التمرين الثاني:

لدينا: $(E) \dots 21x - 12y = 6$

① لدينا: $PGCD(21,12) = 3$

بما أن $3 \mid 6$ فإن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$،

3	1	1	
3	9	12	21
0	3	9	

ومنه، المعادلة (E) تكافئ: $7x - 4y = 2$

ب) (x,y) حل للمعادلة (E) معناه:

$4y \equiv -2 \ [7]$

إذن: $y \equiv -4 \ [7]$.

معناه: $y \equiv 3 \ [7]$

أي: $y = 7k + 3 \ , k \in \mathbb{Z}$

بالتعويض نجد:

$$x = \frac{2 + 4y}{7}$$

$$= \frac{2 + 4(7k+3)}{7}$$

$$= \frac{2 + 28k + 12}{7}$$

$$= \frac{14 + 28k}{7} = 2 + 4k$$

ومنه،

$$S = \{ (4k+2, 7k+3) \ , k \in \mathbb{Z} \}$$

ج) طبيعة المجموعة التي تحقق $x + y \equiv 0 \ [9]$:

لدينا: $x + y = 4k + 2 + 7k + 3$

معناه: $x + y = 11k + 5$

ومنه، $x + y \equiv 0 \ [9]$ معناه:

$11k + 5 \equiv 0 \ [9]$

إذن: $11k \equiv -5 \ [9]$

بما أن: $2k \equiv -5 \ [9]$

أي: $2k \equiv 4 \ [9]$

ومنه: $k \equiv 2 \ [9]$

ومنه: $k = 9p + 2 \ , p \in \mathbb{Z}$

ومنه: $(x,y) = (4(9p+2)+2, 7(9p+2)+3) \ , p \in \mathbb{Z}$

أي: $(x,y) = (36p + 10, 63p + 17) \ / p \in \mathbb{Z}$

بما أن: $k = 9p + 2$

فإن:

$$x + y = 11(9p+2) + 5$$

$$= 99p + 27 = 9(11p + 3)$$

$$= 11q \ / q \in \mathbb{Z}$$

إذن: $x + y$ من مضاعفات 9.

② لدينا:

$a_n = 4n + 2$

$b_n = 7n + 3$

لدينا: $\begin{cases} d \mid a_n \\ d \mid b_n \end{cases}$ معناه: $\begin{cases} d \mid 4n+2 \\ d \mid 7n+3 \end{cases}$

إذن: $d \mid 28n + 14$

$d \mid 28n + 12$

أي $d \mid 2$

من سبق نجد: $\begin{cases} d \mid 4n+2 \\ d \mid 7n+3 \end{cases}$ معناه: $\begin{cases} d \mid 8n+4 \\ d \mid 9n+3 \end{cases}$

ومنه : $d/n+2$

إذن : $d/2$ أو $d/n+2$ ، ومنه $d/PGCD(n+1,2)$

نضع $PGCD(n+1,2)=d'$

نتيجة أن d/d' --- (1)

أيضا :

$\begin{cases} d'/n+1 \\ d'/2 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} d'/4n+4 \\ d'/2 \end{cases}$

ومنه : $d'/4n+2$

أي d'/a_n

أيضا : $\begin{cases} d'/n+1 \\ d'/2 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} d'/7n+7 \\ d'/4 \end{cases}$

بالطرح : $d'/7n+3$

أي d'/b_n

إذن : $d' \in D_{a_n,b_n}$ أي $\begin{cases} d'/a_n \\ d'/b_n \end{cases}$

ومنه $d'/PGCD(a_n,b_n)$ أي d'/d --- (2)

من (1) و (2) نتج :

$|d| = |d'|$

وهذه : $d=d'$.

إذن : $PGCD(a_n,b_n) = PGCD(n+1,2)$

خوارزمية الخطوات المتتالية لحساب $PGCD(a,b)$

ب) استنتاج قيم d (المسألة) :

المسألة : $\begin{cases} d/7n+3 \\ d/4n+2 \end{cases}$

ومنه : $\begin{cases} d/28n+12 \\ d/28n+14 \end{cases}$ أي :

$d \in \{1,2\}$ أي $d/2$

ج) استنتاج $PGCD(4\times 2025^{1446}+2 ; 7\times 2025^{1446}+3)$:

نضع : $n = 2025^{1446}$ من أجل

$PGCD(4n+2, 7n+3) =$

$PGCD(n+1,2) = PGCD(2025^{1446}+1,2)$

بما أن :

$2025 \equiv 1 [2]$

ومنه : $2025^{1446} \equiv 1 [2]$

أي : $2025^{1446}+1 \equiv 2 [2]$

$\equiv 0 [2]$

إذن : $2025^{1446}+1$ عدد زوجي

أي :

$PGCD(2025^{1446}+1,2)$

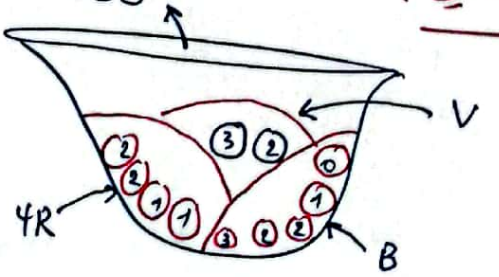
$= 2\ PGCD(K,1) = 2$

$PGCD(K,1)=1$ ومنه $1/K$

أي :

التمرين الثاني :

؟؟ 000



عدد الحالات الممكنة :

$C_{11}^3 = 165$

إمكانية السحب .

أ) قيم X :

$X(\{(\bar{R}\bar{R}\bar{R})\}) = 4$

$X(\{(R\bar{R}\bar{R})\}) = 3$

$X(\{(RR\bar{R})\}) = 2$

$X(\{(RRR)\}) = 1$

إذن: $X(\Omega) = \{1,2,3,4\}$

أي:

$$P(X=4) = \frac{C_7^3}{C_{11}^3} = \frac{35}{165}$$

$$P(X=3) = \frac{C_4^1 \times C_7^2}{C_{11}^3} = \frac{84}{165}$$

$$P(X=2) = \frac{C_4^2 \times C_7^1}{C_{11}^3} = \frac{42}{165}$$

$$P(X=1) = \frac{C_4^3 \times C_7^0}{C_{11}^3} = \frac{4}{165}$$

ومنه قانون احتمال X :

x_i	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{165}$	$\frac{42}{165}$	$\frac{84}{165}$	$\frac{35}{165}$

ومنه:

$$E(X) = \frac{4+2\times42+3\times84+4\times35}{165}$$

$$= \frac{480}{165} \approx 2,91$$

حساب: $P(A), P(B), P(C)$

① الحدث A : "سحب 3R أو 3B"

إذن:

$$P(A) = \frac{C_5^3 + C_4^3}{C_{11}^3} = \frac{10+4}{165} = \frac{14}{165}$$

② الحدث B : "سحب $3_①$ أو $3_②$"

أي:

$$P(B) = \frac{C_5^3 + C_3^3}{C_{11}^3} = \frac{1+10}{165} = \frac{11}{165}$$

③ الحدث C : "سحب 1R, 1B, 1V"

أي:

$$P(C) = \frac{C_2^1 \times C_4^1 \times C_5^1}{C_{11}^3} = \frac{40}{165} = \frac{8}{33}$$

$P(A \cap B) = ?$

$1_{②V}$ ، $1_{②R}$ ، $1_{②B}$

$$P(B \cap C) = \frac{C_2^1 \times C_2^1 \times C_1^1}{C_{11}^3} = \frac{4}{165}$$

$P(B \cup C) = ?$

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$$

$$= \frac{11}{165} + \frac{40}{165} - \frac{4}{165}$$

$$= \frac{47}{165}$$

التمرين الرابع :

$f(x) = 4xe^{-x^2}$, $D_f = [0; +\infty[$: لدينا

① حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$:

$\lim\limits_{x \to +\infty} 4xe^{-x^2} = ?$

بوضع : $u = x^2$

ومنه : $x = \sqrt{u}$

لما $x \to +\infty$ فإن $u \to +\infty$

إذن :

$$\lim_{x \to +\infty} 4xe^{-x^2} = \lim_{u \to +\infty} \frac{4\sqrt{u}}{e^u} = \lim_{u \to +\infty} \frac{4}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{e^u} = \lim_{u \to +\infty} \frac{4}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{e^u}{u}\right)} = 0 \cdot 0 = 0$$

② دراسة اتجاه تغير f على $\mathbb{R}^+$ وجدول تغيراتها :

من أجل كل $x \in \mathbb{R}^+$ لدينا f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^+$ و :

$$f'(x) = 4e^{-x^2} + (-2xe^{-x^2}) \times 4x$$

$$= 4e^{-x^2}(1 - 2x^2)$$

بما أن $4e^{-x^2} > 0$ من أجل كل $x \in \mathbb{R}^+$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $1 - 2x^2$ على $\mathbb{R}^+$ إذن :

$f'(x) = 0$ تكافئ $1 - 2x^2 = 0$

ومنه $x^2 = \frac{1}{2}$ إذن $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \in \mathbb{R}^+\right)$

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

إذن : f متزايدة تماما على المجال $[0; \frac{\sqrt{2}}{2}]$ ومتناقصة تماما على المجال $[\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty[$ ومنه جدول تغيرات f :

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{e}}$	↘	0

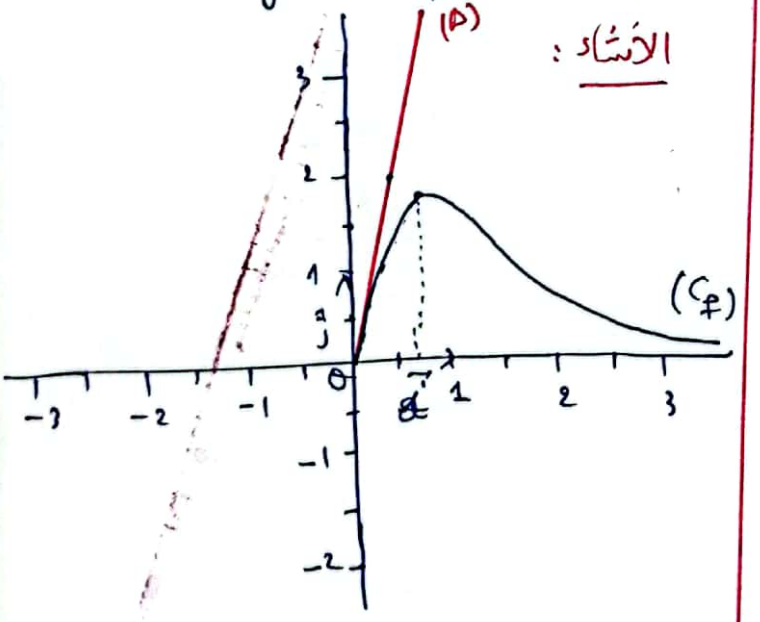
$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{e}} \approx 1{,}71$$

③ معادلة (Δ) المماس لـ (C_f) عند 0 :

$$(\Delta) : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

إذن : $(\Delta) : y = 4x$, $x \geq 0$

الإنشاء :



حساب a :

$$a = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 4xe^{-x^2}\,dx = 4\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx$$

لدينا : $(e^{-x^2})' = -2xe^{-x^2}$ إذن :

$$a = -2\left[e^{-x^2}\right]_0^1 = -2\left(e^{-1} - 1\right)$$

$$= -2e^{-1} + 2$$

على المجال $[0,1]$ أن $(\mathcal{C})$ تقع تحت محور الفواصل

أي:

$$A_0 = \int_0^1 f(x)\,dx \times u.a$$

$$= \int_0^1 4xe^{-x^2}\,dx \cdot u.a$$

$$= 2(1-e^{-1}) \times (2cm)^2$$

$$= 8(1-e^{-1})\ cm^2$$

II) لتكن f_n المعرفة على $[0,+\infty[$ بـ:

$n \geq 2$ و $f_n(x) = 4x^n e^{-x^2}$

5) من أجل N عدد طبيعي $x > 1$ لدينا:

$x > 1$ معناه $x^2 > x$

أي: $-x^2 < -x$

ومنه: $e^{-x^2} < e^{-x}$

من أجل N من $x > 1$.

1. حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$

لدينا:

$$0 < e^{-x^2} < e^{-x}$$

أي: من أجل N من $x > 1$:

$$0 < 4x^n e^{-x^2} < 4x^n e^{-x}$$

و

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

حسب مبرهنة الحصر:

$$\lim_{x \to +\infty} 4x^n e^{-x^2} = 0$$

أي:

$$\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$$

6) (تبيان تغير f_n + جدول تغيراتها:

لدينا f_n تقبل الاشتقاق على $[0,+\infty[$، لدينا:

$$f_n'(x) = 4\left(nx^{n-1}e^{-x^2} + (-2x)e^{-x^2}x^n\right)$$

$$= 4e^{-x^2}x^{n-1}(n-2x^2)$$

بما أن: من أجل N من $x > 1$ فإن $4e^{-x^2}x^{n-1} > 0$

إذن: $f_n'(x)$ من إشارة $n-2x^2$

$f_n'(x) = 0$ معناه $2x^2 = n$

$$x = \sqrt{\frac{n}{2}}$$

$x \in \left[\sqrt{\frac{n}{2}}; +\infty\right[$ معناه $f_n'(x) < 0$

$x \in \left]-\infty; \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$ معناه $f_n'(x) > 0$

جدول التغيرات:

x	0		$\sqrt{\frac{n}{2}}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	↗	$f_n\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)$	↘	0

7) نضع:

$$g_n(x) = f_n(x) - 1$$

g_n مستمرة ورتيبة تماما على $\left[0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$

ومنه على المجال $]0,1[$ لأن:

$$[0,1] \subset \left[0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$$

لأن: $n \geq 2$ معناه $\frac{n}{2} \geq 1$ أي $\sqrt{\frac{n}{2}} \geq 1$

لدينا:

$$g_n(0) = f_n(0) - 1 = -1$$

$$g_n(1) = f_n(1) - 1 = \frac{4}{e} - 1$$

إذن: $g_n(0) \times g(1) < 0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g_n(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا u_n من المجال $]0,1[$

يحقق $g_n(u_n) = 0$

$f_n(U_n) - 1 = 0$: أي

$$\boxed{f_n(U_n) = 1}$$: ومنه

⑧ التحقق أن : $f_{n+1}(U_n) = U_n$:

لدينا :

$$f_{n+1}(x) = 4x^{n+1} e^{-x^2}$$
$$= x(4x^n e^{-x^2}) = x f_n(x)$$

إذن من أجل $x = U_n$ نجد :

$$f_{n+1}(U_n) = U_n f_n(U_n)$$
$$= U_n \times 1 = U_n$$

إذن :

$$\boxed{f_{n+1}(U_n) = U_n}$$

⑨ بيان أن :

$$-\frac{\ln(4)}{n} < \ln(U_n) < \frac{1}{n} - \frac{\ln(4)}{n}$$

لدينا : $0 < U_n < 1$

و $f_n(U_n) = 1$

إذن $0 < U_n^n < 1$

تكافئ : $1 < e^{U_n^n} < e$

ومنه : $4 < 4U_n^n < 4e$ ... (*)

لأن : $f_n(U_n) = 1$ تكافئ : $4U_n^n e^{-U_n^2} = 1$

إذن :

$$\boxed{e^{U_n^2} = 4U_n^n}$$

من (*) لدينا : $0 < \ln(4U_n^n) < 1$

ومنه : $0 < \ln(4) + n\ln(U_n) < 1$

ومنه :

$$-\ln(4) < n\ln(U_n) < -\ln(4) + 1$$

أي :

$$-\frac{\ln(4)}{n} < \ln(U_n) < \frac{1}{n} - \frac{\ln(4)}{n}$$

$-\frac{\ln(4)}{n} \to 0$ و $\frac{1}{n} - \frac{\ln(4)}{n} \to 0$

إذن :

$$\lim_{n \to +\infty} \ln(U_n) = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} e^{\ln(U_n)} = e^0 = 1$$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية سطيف
امتحان البكالوريا التجريبي
المستوى : 03 الرياضيات

ثانويات سطيف المقاطعة –02–
دورة : ماي 2025

اختبار في مادة : الرياضيات
المدة : 04 ساعات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأوّل :

التمرين الأول: (05 نقاط)

• (U_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ حيث $U_1 = \frac{1}{e}$ بـ: $U_{n+1} = \frac{n+1}{e \cdot n} U_n$

أ) أثبت بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $U_n > 0$

ب) قارن بين $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ و 1 ثمّ استنتج أنّ المتتالية (U_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}^*$ ، برر تقاربها .

2) (V_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $V_n = \frac{U_n}{e \cdot n}$

أ) أثبت أنّ المتتالية (V_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{e}$, جد حدها الأول V_1 ثمّ جد عبارة V_n بدلالة n .

ب) استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = n \cdot e^{-n}$ ، ثمّ احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

3) أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = U_1 + \frac{1}{2}U_1 + \frac{1}{3}U_3 + \cdots + \frac{1}{n}U_n$ ، ثمّ أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

4) أكتب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع T_n حيث: $T_n = \frac{U_1}{V_1} + \frac{U_2}{V_2} + \frac{U_3}{V_3} + \cdots + \frac{U_n}{V_n}$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

• نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول (x, y) ، حيث x و y عددان صحيحان.

$$11x - 24y = 1 \cdots\cdots (E)$$

1) تحقق أنّ (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

2) باستخدام خوارزمية عين حلا خاصا للمعادلة (E) . ثمّ حل المعادلة (E)

• نعتبر العددين $a = 10^{11} - 1$ و $b = 10^{24} - 1$

3) بيّن انّ 9 يقسم كلا من a و b .

4) بين أنه مهما كان الحل (x, y) للمعادلة (E) فإنّ :

$$(10^{11x} - 1) - 10(10^{24y} - 1) = 9$$

5) بين أنّ : $10^{11} - 1$ يقسم $10^{11x} - 1$ ثم استنتج أنه يوجد عددان صحيحان M و N حيث: $aM + bN = 9$.

6) بين أنّ كل قاسم للعددين a و b هو قاسم لـ 9 .

7) إستنتج مما سبق : $PGCD(a, b)$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) حل في C المعادلة : $(z-1)(z^2-2z+2)=0$

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب $z_A=1+i$ ، $z_B=1-i$ و $z_C=-1-i$

أ) بيّن انّ العدد $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2028}$ عدد حقيقي.

ب) أكتب على الشكل الأسي العدد المركب $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$ ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC .

ج) عيّن z_D لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع .ماهي طبيعته؟

3) يحتوي كيس غير شفاف على أربع كريات تحمل الأرقام $-i, i, 5, -5$ وثلاث كريات تحمل الأرقام $2+i, -i, 2$ ، و كرتين تحملان الرقمين $5i, 5$ نسحب في آن واحد من الكيس كريتين . أحسب احتمال الأحداث التالية :

A : " الحصول على كريتين تحملان عددين مترافقين "

B : " الحصول على كريتين تحملان عددين أحدهما تخيلي صرف و الآخر حقيقي "

C : " الحصول على كريتين تحملان عددين متعاكسين في الإشارة "

التمرين الرابع: (05 نقاط)

- f الدّالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x)=x-e+\ln(1+2e^{-2(x-e)})$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. $(\|\vec{i}\|=1$ الوحدة $cm.)$

1)أ) تحقق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=-x+e+\ln(2+e^{2(x-e)})$

ب) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ج) أدرس اتّجاه تغيّر الدّالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2)أ) بيّن انّ (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (D) و (D') معادلتيهما: $y=x-e$ و $y=-x+e+\ln(2)$ عند $+\infty$ و $-\infty$ على الترتيب .

ب) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (D) و (D') .

ج) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=\ln(\sqrt{2})+e$ محور تناظر لـ (C_f) .

3) أنشىء المنحنى (C_f) و المستقيمات (D) ، (D') و (Δ) .

4) (D_m) هي المستقيمات التي معادلاتها $y=mx-m\left(e+\frac{\ln(2)}{2}\right)+\frac{\ln(2)}{2}$ ، m وسيط حقيقي.

أ) بيّن أنّ جميع المستقيمات تشمل النقطة الثابتة $A(\frac{\ln(2)}{2}+e;\frac{\ln(2)}{2})$

ب) ناقش حسب القيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x)=mx-m\left(e+\frac{\ln(2)}{2}\right)+\frac{\ln(2)}{2}$

إنتهى الموضوع الاول

الموضوع الثاني :

التمرين الأول: (05 نقاط)

• حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$$

• المستوى المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A, B و C التي لاحقاتها z_A, z_B و z_C على الترتيب، حيث:

$$z_A = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ، } z_B = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \text{ و } z_C = \overline{z_B} \text{ .}$$

1) اكتب z_A و z_B على الشكل الأسي ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

2) تحقق أن: $\frac{z_B}{z_C} = e^{-i\frac{\pi}{6}}$ وحدد طبيعة المثلث OBC .

3) استنتج أن: B هي صورة C بدوران r يطلب تعيين عناصره المميزة .

• نسمي (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق : $|z| = \left|z - \frac{\sqrt{3}+i}{2}\right|$

4) عين طبيعة المجموعة (Γ) .

التمرين الثاني: (05 نقاط)

1) نعتبر المعادلة $(E) \cdots\cdots 21x - 12y = 6$ ، حيث : x و y عددين صحيحين .

أ) بيّن أنّ المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

ب) أثبت أنه إذا كانت (x,y) حلولا للمعادلة (E) فإنّ: $y \equiv 3[7]$ ، ثمّ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) .

ج) استنتج جميع الثنائيات (x,y) حلول المعادلة (E) ، التي تحقق: $x+y$ من مضاعف لـ 9 .

2) n عدد طبيعي و $d = PGCD(a,b)$ القاسم المشترك الأكبر للعددين $a = 4n+2$ و $b = 7n+3$.

أ) بيّن انّ : $PGCD(a,b) = PGCD(n+1;2)$,

ب) عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n القيم الممكنة لـ d .

ج) استنتج : $PGCD(4\times 2025^{1446}+2 \;;\; 7\times 2025^{1446}+3)$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

• يحتوي كيس غير شفاف على خمس كريات بيضاء تحمل الأرقام $3,2,2,1,0$ ، و أربع كريات حمراء تحمل الأرقام $2,2,1,1$ و كرتين خضراوين تحملان الرقمين $3,2$ (كل الكريات متماثلة و لا يمكن التمييز بينها باللمس) . نسحب عشوائيا في آن واحد من الكيس ثلاث كريات و نعتبر الأحداث:

A : " الحصول على ثلاث كريات من نفس اللّون "

B : " الحصول على ثلاث كريات من نفس الرّقم "

C : " الحصول على ثلاث كريات تحمل ألوان العلم الجزائري "

1) أحسب الاحتمالات التالية : $P(A), P(B), P(C), P(B\cup C), P(C\cap B)$

2) نعتبر المتغير العشوائي X ، الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات الحمراء المتبقية في الكيس .

أ) عيّن قيم المتغيّر العشوائي X .

ب) عرّف قانون احتمال المتغيّر العشوائي X و احسب أمله الرياضياتي .

التمرين الرابع: (05 نقاط)

I) f الدّالة المعرّفة على $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=4xe^{-x^2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ $(\|\vec{i}\|=\|\vec{i}\|=2)$, الوحدة (cm))

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) أدرس اتّجاه تغير الدّالة f على المجال $[0;+\infty[$. ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) عيّ معادلة نصف المماس (Δ) للمنحنى (C_f) في المبدأ . ثمّ انشىء (C_f) .

4) جد قيمة العدد a حيث: $a=\int_0^1 f(x)dx$ ثمّ استنتج بـ (cm^2) مساحة الحيز $\mathcal{A}$ من المستوي المحدد بـ (C_f) و حاملي محوري الاحداثيات و المستقيم الذي معادلته $x=1$.

- n عدد طبيعي حيث: $n\geq 2$. نعتبر الدّالة العددية f_n المعرّفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي : $f_n(x)=4x^ne^{-x^2}$

5) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x حيث: $x>1$ لدينا: $e^{-x^2}<e^{-x}$, ثمّ استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$

6) ادرس اتّجاه تغيّر الدّالة f_n ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

7) بيّن أنّه يوجد عدد حقيقي U_n من المجال $]0,1[$ بحيث: $f_n(U_n)=1$.

8) تحقق انّ: $f_{n+1}(U_n)=U_n$.

9) بيّن أن : $\frac{-\ln(4)}{n}<\ln(U_n)<\frac{1}{n}-\frac{\ln(4)}{n}$

10) استنتج قيمة L نهاية (U_n) .

إنتهى الموضوع الثاني