الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

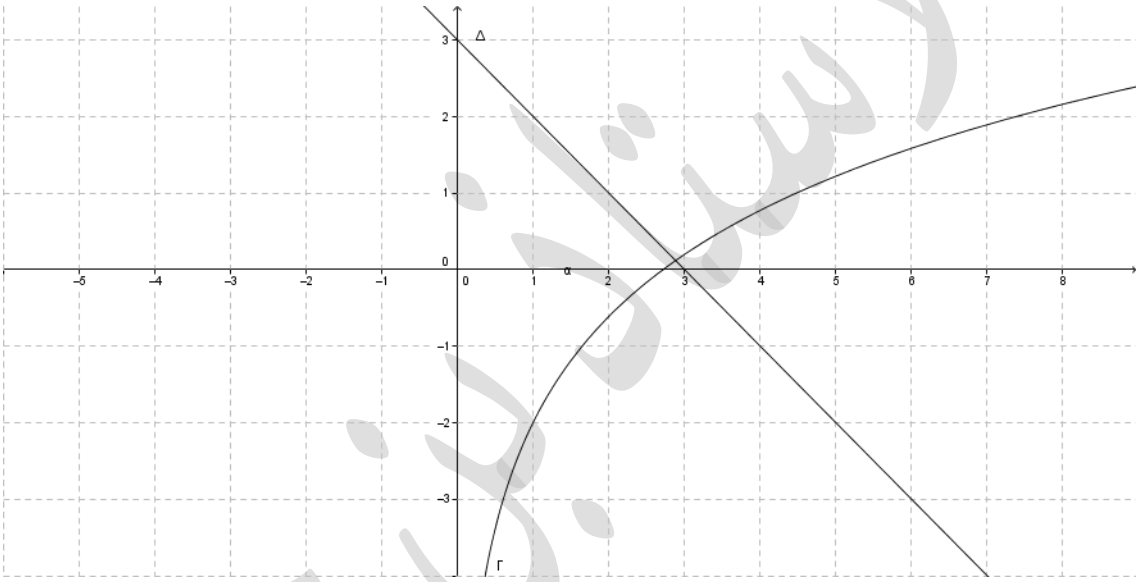
مديرية التربية لولاية غليزان **الشعبة : 3 علوم تجريبية**

ثانوية المجاهد بقادة بلمهل – مازونة- **التاريخ : 02-12- 2024**

اختبار في مادة :الرياضيات **المدة :02 سا**

التمرين الأول :

لتكن الدالة h المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $h(x)=x-5+2\ln x$.الرسم المقابل يوضح المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=3-x$ والمنحنى (Γ) ذو المعادلة $y=2\ln x-2$. (Γ) و (Δ) يتقاطعان في النقطة ذات الفاصلة β



1) بقراءة بيانية : شكل جدول اشارة $h(x)$
2) تحقق أن $2\ln\beta=5-\beta$

لتكن الدالة العددية g المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=x-2+\ln x$

1) أدرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.
2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $1,5<\alpha<2$
3) استنتج اشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$

لتكن الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\left(2-\frac{2}{x}\right)(\ln x-1)$. (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب للمعلم المتعامد $(o;\vec{i};\vec{j})$. (حيث $\|\vec{j}\|=2cm$)

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ وفسر النتيجة الأخيرة بيانيا
2) بين أن (Γ) مقارب ل (C_f) بجوار $+\infty$
- أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Γ)

الأستاذ بن حميد

3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $0 < x$ ، $f'(x) = \frac{2g(x)}{x^2}$

- استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

4) بين أن $f(\alpha) = \frac{-2(\alpha-1)^2}{\alpha}$ ثم أعط حصرا ل $f(\alpha)$.

5) جد نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل

6) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $0 < x$ ، $f''(x) = \frac{-2h(x)}{x^3}$

- استنتج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف احداثياها $\left(\beta; 4 - \frac{3}{\beta} - \beta\right)$

- بين أن معادلة المماس (T) عندها تعطى $y = \left(\frac{\beta+1}{\beta^2}\right)x + 3 - \beta - \frac{4}{\beta}$

7) أرسم (Γ) و (C_f) (تعطى $\alpha = 1,75$ و $f(\alpha) = -0,6$)

8) لتكن الدالة k المعرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي : $k(x) = \frac{2 + 2x\ln(x+1)}{x+1}$

- جد العددان الحقيقيان a و b حيث $k(x) = f(x+a) + b$

- اشرح كيفية رسم (C_k) انطلاقا من (C_f)

التمرين الثاني :

اختر الاقتراح الصحيح الوحيد في كل مما يلي :

1) منحنى الدالة f المعرفة على $\Re$ كما يلي : $f(x) = -x + \ln\left(e^{2x+1} + e^x\right)$ يقبل مستقيم مقارب بجوار $+\infty$ معادلته :

أ) $y = x + 1$ ب) $y = -x$ ج) $y = 2x + 1$

2) h دالة وهي الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $\log(e)y' - \log(5)y - \log(25) = 0$ منحناها يقبل عند نقطة تقاطعه مع محور التراتيب مماس يوازي المنصف الثاني . عبارة $h(x)$ تعطى :

أ) $h(x) = 2 - \frac{5^x}{\ln 5}$ ب) $h(x) = -\left(2 + \frac{5^x}{\ln 5}\right)$ ج) $h(x) = 2 - \frac{5^x}{\log 5}$

3) g دالة عددية تمثيلها البياني (C_g) يقبل المستقيم $y = -1$ مقارب له بجوار $+\infty$ والنقطة $(-1;1)$ مركز تناظر له .اذا:

أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$ ج) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$

4) حلول المتراجحة $\left(1 - e^{1-x}\right)\left(4\log^3 x - 6\log^2 x + 2\log x\right) \le 0$ هي :

أ) $S = \left[\sqrt{10};10\right]$ ب) $S = \left[\sqrt{10};+\infty\right[$ ج) $S =]0;1] \cup \left[\sqrt{10};10\right]$

تصحيح اختبار الفصل الأول لشعبة العلوم التجريبية - الأستاذ بن حميد -

1) جدول اشارة $h(x)$

$h(x) \ge 0$ أي $x - 5 + 2\ln x \ge 0$ أي $x - 3 - 2 + 2\ln x \ge 0$ أي $-2 + 2\ln x \ge 3 - x$ أي لما يكون (Γ) فوق (Δ) وذلك على المجال $[\beta;+\infty[$

x	$-\infty$	β	$+\infty$
$h(x)$	$-$	0	$+$

2) التحقق أن $2\ln\beta = 5-\beta$

(Γ) و (Δ) يتقاطعان في النقطة ذات الفاصلة β أي β حل للمعادلة $2\ln x - 2 = 3 - x$ أي $2\ln\beta - 2 = 3 - \beta$

اذا $2\ln\beta = 5-\beta$

$g(x) = x - 2 + \ln x$; $D_g =]0;+\infty[$

1) دراسة اتجاه تغير الدالة g وتشكيل جدول تغيراتها.

نلاحظ أن g عبارة عن مجموع دالتين $x \mapsto \ln x$ و $x \mapsto x-2$ متزايدتان على $]0;+\infty[$

اذا g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

- جدول التغيرات :

x	$-\infty$		$+\infty$
g		↗	

2) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $1,5 < \alpha < 2$

لدينا g مستمرة ورتيبة تماما (متزايدة تماما) و $g(1,5)\times g(2) < 0$ كون $g(2)=0,$; $g(1,5)=-0,$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $1,5 < \alpha < 2$

3) استنتاج اشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

$f(x) = \left(2 - \frac{2}{x}\right)(\ln x - 1)$; $D_f =]0;+\infty[$

1) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ وتفسير النتيجة الأخيرة بيانيا

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{2}{x}\right)(\ln x - 1) = +\infty$ (لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x} = 0$)

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}\left(2-\frac{2}{x}\right)(\ln x - 1) = +\infty$ (لأن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}\ln x = -\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} -\frac{2}{x} = -\infty$)

التفسير البياني : المنحنى (C_f) يقبل المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (محور التراتيب) مقارب له

2) تبيان أن (Γ) مقارب ل (C_f) بجوار $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-y=\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{2}{x}\right)(\ln x-1)-(2\ln x-2)=\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{2}{x}\right)(\ln x-1)-2(\ln x-1)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{2}{x}-2\right)(\ln x-1)=\lim_{x\to+\infty}-\frac{2}{x}(\ln x-1)=\lim_{x\to+\infty}-2\left(\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}\right)=0$$

(لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$)

ومنه (Γ) مقارب ل (C_f) بجوار $+\infty$

- دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Γ)

ندرس اشارة الفرق $f(x)-y$

$$f(x)-y=-\frac{2}{x}(\ln x-1)=\frac{2(1-\ln x)}{x}$$

نلاحظ أن $x>0$ ومنه اشارة الفرق من اشارة $1-\ln x$

$$1-\ln x\geq 0 \rightarrow 1\geq \ln x \rightarrow e\geq x$$

3) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي $0<x$ ، $f'(x)=\frac{2g(x)}{x^2}$

f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة f' حيث :

$$f'(x)=\left(2-\frac{2}{x}\right)'(\ln x-1)+\left(2-\frac{2}{x}\right)(\ln x-1)'=\frac{2}{x^2}(\ln x-1)+\left(2-\frac{2}{x}\right)\frac{1}{x}=\frac{2\ln x-2}{x^2}+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}$$

$$=\frac{2\ln x-2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}-\frac{2}{x^2}=\frac{2\ln x-2+2x-2}{x^2}=\frac{2\ln x+2x-4}{x^2}=\frac{2(x-2+\ln x)}{x^2}=\frac{2g(x)}{x^2}$$

- استنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها

أ- اشارة المشتقة :

لدينا $f'(x)=\frac{2g(x)}{x^2}$ نلاحظ أن $x^2>0$ ومنه اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

ب- اتجاه التغير

f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$ و متزايدة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$

- جدول التغيرات :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

4) تبيان أن $f(\alpha)=\frac{-2(\alpha-1)^2}{\alpha}$ حصرا ل $f(\alpha)$.

$$f(\alpha)=\left(2-\frac{2}{\alpha}\right)(\ln\alpha-1)$$

لدينا α حل للمعادلة $g(x)=0$ أي $g(\alpha)=0$ أي $\alpha-2+\ln\alpha=0$ اذا $\ln\alpha=2-\alpha$

بتعويض قيمة $\ln\alpha$ في عبارة $f(\alpha)$ نجد :

$$f(\alpha)=\left(2-\frac{2}{\alpha}\right)(\ln\alpha-1)=\left(2-\frac{2}{\alpha}\right)(2-\alpha-1)=\left(2-\frac{2}{\alpha}\right)(1-\alpha)=-2\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)(\alpha-1)$$

$$=-2\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)(\alpha-1)=\frac{-2(\alpha-1)^2}{\alpha}$$

- حصرا ل $f(\alpha)$.

لـــدينا $1,5<\alpha<2$ أي $\begin{cases}0,5<\alpha-1<1\\ \frac{1}{1,5}>\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{2}\end{cases}$ أي $\begin{cases}0,25<(\alpha-1)^2<1\\ \frac{1}{2}<\frac{1}{\alpha}<\frac{1}{1,5}\end{cases}$ بالضـــرب طـــرف لطـــرف نجـــد

$\frac{0,25}{2}<\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}<\frac{1}{1,5}$ أي $-0,25>\frac{-2(\alpha-1)^2}{\alpha}>-\frac{2}{1,5}$ اذا $-1,34<f(\alpha)<-0,25$

5) ايجاد نقط تقاطع (C_f)مع محور الفواصل

نحل المعادلة $f(x)=0$

$$f(x)=0\rightarrow\left(2-\frac{2}{x}\right)(\ln x-1)=0\rightarrow\begin{cases}2-\frac{2}{x}=0\\ \ln x-1=0\end{cases}\vee\rightarrow\begin{cases}2=\frac{2}{x}\\ \ln x=1\end{cases}\vee\rightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}=\frac{x}{2}\\ x=e\end{cases}\vee\rightarrow\begin{cases}x=1\\ x=e\end{cases}\vee$$

$$(C_f)\cap(xx')=\{(1;0);(e;0)\}$$

6) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي $0<x$ ، $f''(x)=\frac{-2h(x)}{x^3}$

f' قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة f'' حيث :

$$f''(x)=\frac{2\left(g'(x)\times x^2-\left(x^2\right)'g(x)\right)}{\left(x^2\right)^2}=\frac{2\left((x-2+\ln x)'\times x^2-2x(x-2+\ln x)\right)}{x^4}=\frac{2x\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)\times x-2(x-2+\ln x)\right)}{x^4}$$

$$=\frac{2(x+1-2x+4-2\ln x)}{x^3}=\frac{2(-x+5-2\ln x)}{x^3}=\frac{-2(x-5+2\ln x)}{x^3}=\frac{-2h(x)}{x^3}$$

- استنتاج أن (C_f)يقبل نقطة انعطاف احداثياها $\left(\beta;4-\frac{3}{\beta}-\beta\right)$

- ندرس اشارة $f''(x)$ لدينا $f''(x)=\frac{-2h(x)}{x^3}$ نلاحظ أن $x^3>0$ ومنه اشارة $f''(x)$ من اشارة $-2h(x)$

x	$-\infty$	β	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

$f''(x)$ انعدمت عند β وغيرت من اشارتها اذا النقطة $(\beta;f(\beta))$ هي نقطة انعطاف ل (C_f)

لدينا $f(\beta)=\left(2-\frac{2}{\beta}\right)(\ln\beta-1)$ ولدينا سابقا $2\ln\beta=5-\beta$

$$f(\beta)=\left(2-\frac{2}{\beta}\right)(\ln\beta-1)=\left(1-\frac{1}{\beta}\right)(2\ln\beta-2)=\left(1-\frac{1}{\beta}\right)(5-\beta-2)$$

اذا

$$=\left(1-\frac{1}{\beta}\right)(3-\beta)=3-\beta-\frac{3}{\beta}+1=4-\beta-\frac{3}{\beta}$$

ومنه النقطة $\left(\beta;4-\frac{3}{\beta}-\beta\right)$ هي نقطة انعطاف ل (C_f)

- تبيان أن معادلة المماس (T) عندها تعطى $y=\left(\frac{\beta+1}{\beta^2}\right)x+3-\beta-\frac{4}{\beta}$

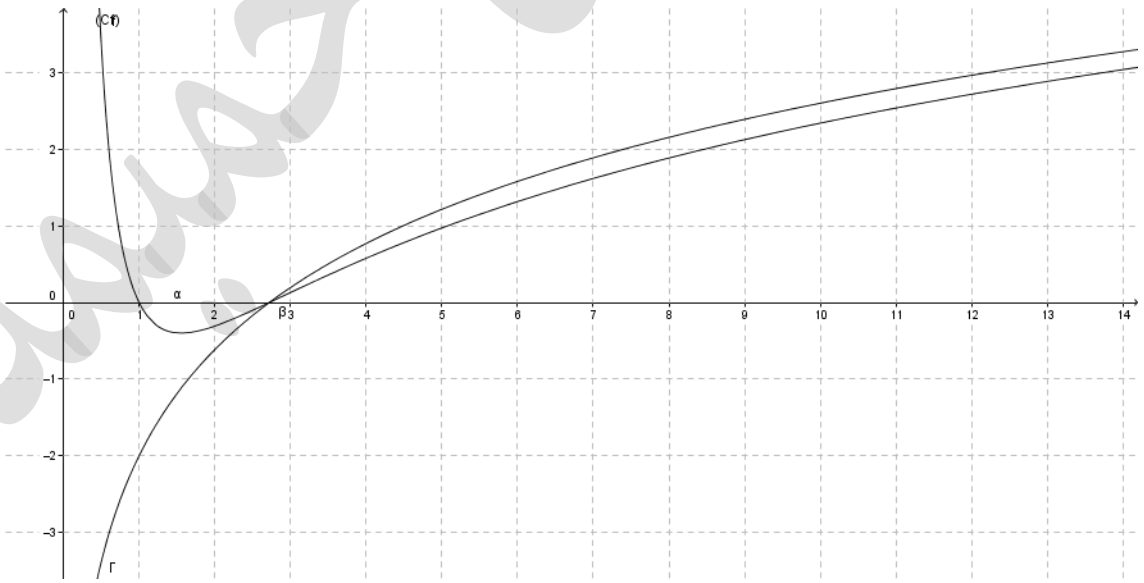
$$(T):\ y=f'(\beta)(x-\beta)+f(\beta)$$

$$\begin{cases} f'(\beta)=\dfrac{2g(\beta)}{\beta^2}=\dfrac{2\beta-4+2\ln\beta}{\beta^2}=\dfrac{2\beta-4+5-\beta}{\beta^2}=\dfrac{\beta+1}{\beta^2} \\ f(\beta)=4-\dfrac{3}{\beta}-\beta \end{cases}$$

$$y=\frac{\beta+1}{\beta^2}(x-\beta)+4-\frac{3}{\beta}-\beta=\frac{\beta+1}{\beta^2}x-\frac{\beta+1}{\beta}+4-\frac{3}{\beta}-\beta=\frac{\beta+1}{\beta^2}x-1-\frac{1}{\beta}+4-\frac{3}{\beta}-\beta$$

$$y=\frac{\beta+1}{\beta^2}x+3-\frac{4}{\beta}-\beta$$

7) الرسم



8) $k(x)=\frac{2+2x\ln(x+1)}{x+1}$; $D_k=]-1;+\infty[$

- ايجاد العددان الحقيقيان a و b حيث $k(x)=f(x+a)+b$

الأستاذ بن حميد

$$k(x)=f(x+a)+b \rightarrow \frac{2+2x\ln(x+1)}{x+1}=\left(2-\frac{2}{x+a}\right)\left(\ln(x+a)-1\right)+b$$

$$\rightarrow \frac{2+2x\ln(x+1)}{x+1}=\left(\frac{2x+2a-2}{x+a}\right)\left(\ln(x+a)-1\right)+b \rightarrow \frac{2+2x\ln(x+1)}{x+1}=\frac{(2x+2a-2)\left(\ln(x+a)-1\right)}{x+a}+\frac{bx+ab}{x+a}$$

$$\rightarrow \frac{2+2x\ln(x+1)}{x+1}=\frac{(2x+2a-2)\left(\ln(x+a)-1\right)+bx+ab}{x+a}$$

بالمطابقة نجد $a=1$ وعليه يكون :

$$\frac{2+2x\ln(x+1)}{x+1}=\frac{2x\left(\ln(x+1)-1\right)+bx+b}{x+} \quad \text{أي} \quad \frac{2+2x\ln(x+1)}{x+1}=\frac{2x\ln(x+1)-2x+bx+b}{x+1}$$

اذا $b=2$

وبالتالي : $k(x)=f(x+1)+2$

- شرح كيفية رسم (C_k) انطلاقا من (C_f)

(C_k) هو صورة (C_f) بواسطة انسحاب شعاعه $-\vec{i}+2\vec{j}$

التمرين الثاني :

اختر الاقتراح الصحيح في كل مما يلي :

1) منحنى الدالة f المعرفة على $\Re$ كما يلي : $f(x)=-x+\ln\left(e^{2x+1}+e^{x}\right)$ يقبل مستقيم مقارب بجوار $+\infty$ معادلته

الاقتراح الصحيح : أ) $y=x+1$

$$f(x)=-x+\ln\left(e^{2x+1}+e^{x}\right)=-x+\ln\left[e^{2x+1}\left(1+\frac{e^{x}}{e^{2x+1}}\right)\right]=-x+\ln\left[e^{2x+1}\left(1+\frac{1}{e^{x+1}}\right)\right]$$

التبرير : $=-x+\ln\left(e^{2x+1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{e^{x+1}}\right)=-x+2x+1+\ln\left(1+\frac{1}{e\times e^{x}}\right)=x+1+\ln\left(1+\frac{1}{e\times e^{x}}\right)$

$$\begin{cases} f(x)=x+1+\ln\left(1+\dfrac{1}{e\times e^{x}}\right) \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{e\times e^{x}}\right)=0 \end{cases}$$

اذا المستقيم ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب بجوار $+\infty$

2) h دالة وهي الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $\log(e)\,y'-\log(5)\,y-\log(25)=0$ منحناها يقبل عند نقطة تقاطعه مع محور التراتيب مماس يوازي المنصف الثاني . عبارة $h(x)$ تعطى :

الاقتراح الصحيح : ب) $h(x)=-\left(2+\frac{5^{x}}{\ln 5}\right)$

التبرير :

الحل العام :

$$\log(e)\,y' - \log(5)\,y - \log(25) = 0 \to \frac{\ln e}{\ln 10}y' - \frac{\ln 5}{\ln 10}y - \frac{\ln 25}{\ln 10} = 0 \to \ln(e)\,y' - \ln(5)\,y - \ln(25) = 0$$

$$\to y' - \ln(5)\,y - \ln(5)^2 = 0 \to y' = \ln(5)\,y + 2\ln(5) \qquad (a = \ln 5 \;;\; b = 2\ln 5)$$

$$y = ce^{ax} - \frac{b}{a} = ce^{x\ln 5} - \frac{2\ln 5}{\ln 5} = ce^{\ln 5^x} - 2 = c \times 5^x - 2$$

الحل الخاص :

منحنى h يقبل عند نقطة تقاطعه مع محور التراتيب مماس يوازي المنصف الثاني أي $h'(0) = -1$

$$y' = c\ln 5 \times e^{x\ln 5}$$

$$h'(0) = -1 \to c\ln 5 = -1 \to c = \frac{-1}{\ln 5} \to h(x) = \frac{-1}{\ln 5}5^x - 2 = -\left(2 + \frac{5^x}{\ln 5}\right)$$

3) g دالة عددية تمثيلها البياني (C_g) يقبل المستقيم $y = -1$ مقارب له بجوار $+\infty$ والنقطة $(-1;1)$ مركز تناظر له .اذا:

الاقتراح الصحيح : ج) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$

التبرير :

(C_g) يقبل المستقيم $y = -1$ مقارب له بجوار $+\infty$ يعني : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -1$

(C_g) يقبل النقطة $(-1;1)$ مركز تناظر له أي $g(x) = 2 - g(-2-x)$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} 2 - g(-2-x) = \lim_{x\to-\infty} (2 - g(x)) \circ (-2-x)$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} -2-x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2 - g(x) = 2-(-1) = 3 \end{cases} \to \lim_{x\to-\infty} g(x) = 3$$

4) حلول المتراجحة هي : أ) $S = \left[\sqrt{10};10\right]$

$$(1-e^{1-x})(4\log^3 x - 6\log^2 x + 2\log x) \le 0 \to (1-e^{1-x})\log x(4\log^2 x - 6\log x + 2) \le 0$$

$$\to (1-e^{1-x})4\log x(\log x - 1)\left(\log x - \frac{1}{2}\right) \le 0$$

$$\begin{cases} 1-e^{1-x} \ge 0 \\ \log x \ge 0 \\ \log x - 1 \ge 0 \\ \log x - \frac{1}{2} \ge 0 \end{cases} \to \begin{cases} 1 \ge e^{1-x} \\ 10^{\log x} \ge 10^0 \\ \log x \ge 1 \\ \log x \ge \frac{1}{2} \end{cases} \to \begin{cases} \ln 1 \ge \ln e^{1-x} \\ x \ge 1 \\ 10^{\log x} \ge 10^1 \\ 10^{\log x} \ge 10^{\frac{1}{2}} \end{cases} \to \begin{cases} 0 \ge 1-x \\ x \ge 1 \\ x \ge 10 \\ x \ge \sqrt{10} \end{cases} \to \begin{cases} x \ge 1 \\ x \ge 1 \\ x \ge 10 \\ x \ge \sqrt{10} \end{cases}$$

x	0		1		$\sqrt{10}$		10		$+\infty$
$1-e^{1-x}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\log x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\log x - 1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\log x - \frac{1}{2}$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	