

ماي 2025

المستوى: الثالثة علوم تجريبية

المدة : 3 سا و نصف.

امتحان بكالوريا تجريبي في مادة الرياضيات /

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين :

الموضوع الأول

التمرين 1 (5 ن) لعبة تقتضي سحب 4 كرات في آن واحد من كيس غير شفاف يحتوي على كرة سوداء و تسع كرات بيضاء ثم يتم رمي زهرة نرد متزنة و مرقمة من 1 الى 6.

- إذا كانت الكرة السوداء موجودة في السحب فينبغي الحصول على عدد زوجي لكي نربح.
- إذا لم تكن الكرة السوداء في السحب فينبغي الحصول على الرقم 6 لكي نربح

نعتبر الحادثتين: N " الكرة السوداء موجودة في السحب " R " اللاعب يربح "

(1 أ) احسب احتمال الحادثة N .

(ب) شكل شجرة الاحتمالات ثم بين أن $P(R) = \frac{3}{10}$

(2) لكي نلعب هذه اللعبة ندفع في البداية المبلغ m دينار (m عدد طبعي)

- إذا ربح اللاعب يتحصل على 4 و إذا لم يربح لكن سحب الكرة السوداء يرد إليه المبلغ m و إذا لم يربح و لم يسحب الكرة السوداء فإنه يخسر المبلغ m .

نسمي X المتغير العشوائي الذي يعبر عن الربح الجبري للاعب.

(أ) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

(ب) عبر بدلالة m الأمل الرياضي $E(X)$.

(ج) عين قيمة m التي تكون من اجلها اللعبة عادلة.

التمرين 2 (4 ن)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_0 = 2$ و من اجل كل عدد طبعي n : $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2u_n - 1}$

f دالة معرفة على المجال $[\frac{1}{2}; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة f .

(2 أ) برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبعي n : $u_n > 1$

(ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) . ماذا تستنتج ؟

(3) لتكن (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \ln\left(\frac{u_{n-1}}{u_n}\right)$

(أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

(ب) بين أنه من أجل كل عدد طبعي n : $u_n = \frac{1}{1 - (\frac{1}{2})^{2n}}$ ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(4) أحسب بدلالة n المجموعين S_n و T_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$

$T_n = \ln(e^{u_0} - e) + \ln(e^{u_1} - e) + \dots + \ln(e^{u_n} - e) - \ln(u_0) - \ln(2u_1) - \dots - \ln((n+1)u_n)$

التمرين 3 (4 ن) عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات التالية مع التعليل :

(1) Z عدد مركب حيث $Z = \sin(\frac{\pi}{8}) + i \cos(\frac{\pi}{8})$ ، الشكل المثلثي للعدد المركب Z هو :

(أ) $-\cos(\frac{\pi}{8}) + i \sin(\frac{\pi}{8})$ (ب) $\cos(\frac{\pi}{8}) + i \sin(\frac{\pi}{8})$ (ج) $\cos(\frac{3\pi}{8}) + i \sin(\frac{3\pi}{8})$

(2) الشكل الأسّي للعدد المركب $\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$ هو : (أ) $\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{7\pi}{12}i}$ (ب) $\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{7\pi}{12}i}$ (ج) $\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi}{12}i}$

(3) الجذرين التربيعين للعدد المركب $3 + 4i$ هما : (أ) $3 + i$ و $-3 - i$ (ب) $2 + i$ و $-2 - i$ (ج) $1 + i$ و $-1 - i$

(4) الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{1+\sqrt{3}+i}{1-i}$ هو : (أ) $\frac{\sqrt{3}}{2} + i(\frac{2+\sqrt{3}}{2})$ (ب) $\frac{\sqrt{3}}{2} - i(\frac{2+\sqrt{3}}{2})$ (ج) $\frac{\sqrt{3}}{2} + i(\frac{-2+\sqrt{3}}{2})$

التمرين 4 (7 ن)

لتكن الدالة f المعرفة على $]0; 2[\cup]2; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{1}{x-2} + \ln(x)$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$

(1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ ثم فسر النتائج بيانياً.

(ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) أدرس إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) تسمى (Γ) المنحنى البياني للدالة " $\ln$ " في المعلم السابق .

(أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln(x))$ ثم فسر النتيجة بيانياً.

(ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة الى المنحنى (Γ) .

(4) أرسم (Γ) ثم (C_f) .

(5) H دالة معرفة على $[3; +\infty[$ بـ: $H(x) = \int_3^x \ln t \, dt$ حيث t متغير حقيقي موجب تماماً.

(أ) بإستعمال المكاملة بالتجزئة عين عبارة $H(x)$ بدلالة x .

(ب) احسب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل و المستقيمين الذين معادلاتهما: $x=3$, $x=4$

(6) g الدالة المعرفة على $]0; 1[\cup]1; +\infty[$ بـ: $g(x) = f(-2x)$

ادرس تغيرات الدالة g

انتهى الموضوع الاول

الموضوع الثاني

التمرين 1 (4 ن)

يحتوي كيس على 8 كريات لا نفرق بينها عند اللمس موزعة كما يلي : أربع كريات حمراء مرقمة بـ : 0، 1، 1 و 2 و ثلاث كريات خضراء مرقمة بـ : 0، 1، 1 و كرية واحدة زرقاء تحمل الرقم 2 .

(1) نسحب عشوائيا كرتين و في آن واحد . احسب احتمال الحوادث التالية:

" A الكرتان المسحوبتان من لونين مختلفين " . " B الكرتان المسحوبتان تحمل رقمين فرديين " C " سحب كرة حمراء على الأكثر " .

(2) بين أن احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتين تحمل رقمين زوجيين علما أنها من نفس اللون هو $\frac{1}{9}$

(3) ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل نتيجة سحب القيمة المطلقة للفرق بين الرقمين المحصل عليها.

(أ) عين قيم المتغير العشوائي X ثم عرف قانون احتماله .

(ب) احسب احتمال الحادثة $e^X - 1 > 0$

(ج) احسب $E(X)$ الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X. ثم عين قيمة α حتى يكون $E(2025X + \alpha) = 1446$

التمرين 2 (4 ن)

(I) الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1)^2$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}; \vec{j})$

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 3$ و من اجل كل عدد طبيعي n $u_{n+1} = f(u_n)$

(1) أ) انقل الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 مبرزا

خطوط التمثيل

(ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها

(2) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq 4$

(3) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، استنتج انها متقاربة ثم احسب نهايتها.

(4) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \ln\left(\frac{u_n-1}{3}\right)$

(أ) اثبت أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 2 يطلب تعيين حدها الأول .

(ب) اكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 3e^{2^n \ln(\frac{2}{3})} + 1$ ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(5) نضع من اجل كل عدد طبيعي n $T_n = \frac{(u_0-1) \times (u_1-1) \times \dots \times (u_n-1)}{3^n}$ بين أن : $T_n = 3e^{(2^{n+1}-1)\ln(\frac{2}{3})}$

التمرين 3 (5 ن)

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول Z : $(\bar{Z} - 2 + 2i)(Z^2 - 4Z + 16) = 0$

(II) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C و لواحقها على الترتيب :

$$Z_C = \overline{Z_B} \quad , \quad Z_B = 2\sqrt{3} - 2i \quad , \quad Z_A = 2 + 2i$$

(1) اكتب الأعداد Z_A, Z_B و Z_C على الشكل الأسّي .

(2) أ) اكتب العدد المركب $\frac{Z_A}{Z_B}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسّي ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

(3) اكتب العدد المركب $\frac{Z_A - Z_C}{Z_B - Z_C}$ على الشكل الأسّي . ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

(4) أ) اوجد قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{Z_B}{Z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا .

$$\left(\frac{Z_B}{Z_C}\right)^{2024} + \left(\frac{Z_C}{4}\right)^{2006} = 0 \quad \text{ب) تحقق أن:}$$

(5) عين Z_G لاحقة G مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

$$(6) \quad \text{أ) عين } (E_1) \text{ مجموعة النقط } M \text{ من المستوي ذات اللاحقة } z \text{ التي تحقق: } \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 12$$

$$\text{ب) عين } (E_2) \text{ مجموعة النقط } M \text{ من المستوي ذات اللاحقة } z \text{ التي تحقق: } |\overline{Z} - 2\sqrt{3} + 2i| = |iz + 2 - 2i|$$

التمرين 4 (7 ن)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x) = 2x + \frac{1}{e^x - 1}$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
ب) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا

(2) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيمين $(\Delta_1): y = 2x$ و $(\Delta_2): y = 2x - 1$

(3) أ) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$: $f'(x) = \frac{(2e^x - 1)(e^x - 2)}{(e^x - 1)^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(4) من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$ احسب $f(-x) + f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

(5) أرسم (Δ_1) و (Δ_2) و (C_f) . (يعطى $f(-\ln 2) = -\ln 4 - 2$ و $f(\ln 2) = \ln 4 + 1$)

(6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد و اشارة حلول المعادلة : $\frac{1}{e^x - 1} - m = 0$

(7) أ) بين ان الدالة $x \mapsto -x + \ln(e^x - 1)$ هي دالة اصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{e^x - 1}$ على المجال $]0; +\infty[$

ب) أحسب $\int_{\ln 2}^1 \frac{dx}{e^x - 1}$ و فسر النتيجة بيانيا

(8) h دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $h(x) = |f(x)|$

اشرح كيفية رسم منحنى الدالة h انطلاقا من (C_f) ثم ارسمه في نفس المعلم

انتهى الموضوع الثاني

التصحيح النموذجي

الموضوع الاول

تمرين 1

$$(1) \quad P(N) = \frac{2}{5}$$

(ب) شجرة الاحتمالات

$$P(R) = \left(\frac{2}{5} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{5} \times \frac{1}{6}\right) = \frac{3}{10}$$

(أ) قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

$$X = \{ 4-m ; -m ; 0 \}$$

$X=x_i$	$4-m$	$-m$	0
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$

$$(ب) \quad E(X) = \frac{12-8m}{10}$$

(ج) قيمة m التي تكون من اجلها اللعبة عادلة. $m = \frac{3}{2}$

تمرين 2

(1) دالة f متزايدة تماما على $[1 ; +\infty[$ و متناقصة تماما على المجال $]\frac{1}{2} ; 1]$

(2) (أ) البرهان بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$

(ب) أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) .

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1 - u_n)}{2u_n - 1}$$

و منه $u_{n+1} - u_n < 0$ إذن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة

(3) (أ) متتالية هندسية أساسها $q=2$ وحدها الأول $v_0 = \ln \frac{1}{2}$

$$v_n = \ln \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} \text{ و منه } v_n = \ln \frac{1}{2} \times 2^n \text{ إذن}$$

(ب) نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{1}{1 - (\frac{1}{2})^{2^n}}$

$$\text{لدينا } u_n = \frac{1}{1 - e^{v_n}} \text{ إذن } u_n = \frac{1}{1 - (\frac{1}{2})^{2^n}}$$

ثم استنتاج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

(4) حساب بدلالة n المجموعين S_n و T_n :

$$S_n = \ln 2 (1 - (2)^{n+1})$$

$$T_n = (n+1) - \ln (n+1)! + \ln 2 (1 - (2)^{n+1})$$

التمرين 3 (4 ن)

(1) Z عدد مركب حيث $Z = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) + i \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ ، الشكل المثلثي للعدد المركب Z هو : (ج) $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

(2) الشكل الأسّي للعدد المركب $\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$ هو : (أ) $\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{-7\pi}{12}i}$

(3) الجذرين التربيعين للعدد المركب $3 + 4i$ هما : (ب) $2 + i$ و $-2 - i$

(4) الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{1+\sqrt{3}+i}{1-i}$ هو : (أ) $\frac{\sqrt{3}}{2} + i(\frac{2+\sqrt{3}}{2})$

التمرين 4 (7 ن):

(1) (أ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$

تفسير النتائج بيانياً.

(C_f) يقبل مستقيمين مقاربين عموديين معادلتها $x = 0$ و $x = 2$

(ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

(2) إتجاه تغير الدالة f . حساب $f'(x) = \frac{x^2-5x+4}{x(x-2)^2}$

إشارة $f'(x)$:

x	0	1	2	4	$+\infty$
$f'(x)$	 +	0 -		- 0	+

و منه f دالة متزايدة تماماً على المجالين $]0 ; 1[$ و $]4 ; +\infty[$

و متناقصة تماماً على المجالين $]1 ; 2[$ و $]2 ; 4]$

جدول التغيرات

x	0	1	2	4	$+\infty$
$f'(x)$	 +	0 -		- 0	+
$f(x)$	 -∞	↗ -1	↘ -∞	 +∞ ↘ $\frac{1}{2} + \ln 2$	↗ +∞

(أ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln(x)) = 0$

تفسير النتيجة بيانياً.

المنحنيين (C_f) و (Γ) متقاربان عند $+\infty$

(ب) وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة الى المنحنى (Γ).

(C_f) يقع تحت (Γ) على المجال $]0 ; 2[$

(C_f) يقع فوق (Γ) على المجال $]2 ; +\infty[$

(4) رسم (Γ) ثم (C_f) .

(5) أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة تعيين عبارة $H(x)$ بدلالة x .

$$H(x) = x \ln x - x - 3 \ln 3 + 3$$

ب) أحسب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل و المستقيمين الذين معادلاتهما:

$$x = 4, x = 3$$

$$A = \int_3^4 f(x) dx = (9 \ln 2 - 3 \ln 3 - 1) u a$$

(6) تغيرات الدالة g

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty \quad \text{النهايات}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = +\infty, \quad \text{اتجاه تغير الدالة } f, \text{ ثم شكل جدول تغيراتها.}$$

$$g'(x) = -2f'(-2x) \quad \text{حساب}$$

إشارة $g'(x)$:

x	$-\infty$	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0
$g'(x)$	-	0	+	0	-

و منه g دالة متناقصة تماما على المجالين $[-\infty; -2]$ و $[-\frac{1}{2}; 0[$

و متزايدة تماما على المجالين $[-1; -\frac{1}{2}]$ و $[-2; -1[$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	$\frac{1}{2} + 2 \ln 2$	$+\infty$	-1	$-\infty$

الموضوع الثاني

تمرين 1

(1)

$$p(A) = \frac{C_4^1 C_1^1 + C_3^1 C_1^1 + C_3^1 C_4^1}{C_8^2} = \boxed{\frac{19}{28}}$$

$$p(B) = \frac{C_4^2}{C_8^2} = \boxed{\frac{6}{28}}$$

$$p(C) = \frac{C_4^2 + C_4^1 C_4^1}{C_8^2} = \boxed{\frac{22}{28}}$$

(2) نبين أن احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتين تحمل رقمين زوجيين علما أنها من نفس اللون هو $\frac{1}{9}$

$$p_{\bar{A}}(\bar{B}) = \frac{p(\bar{A} \cap \bar{B})}{p(\bar{A})} = \frac{\frac{C_2^2}{C_8^2}}{1 - p(A)} = \frac{\frac{1}{28}}{1 - \frac{19}{28}} = \boxed{\frac{1}{9}}$$

(3) أ) قيم المتغير العشوائي X ثم قانون احتماله .

$$X = \{0; 1; 2\}$$

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{8}{28}$	$\frac{16}{28}$	$\frac{4}{28}$

(ب) $P(e^X - 1 > 0) = \frac{20}{28}$

(ج) الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X .

$$E(X) = \frac{6}{7}$$

قيمة α حتى يكون $E(2025X + \alpha) = 1446$

$$\alpha = -\frac{2028}{7}$$

التمرين 2

(1) أ) التمثيل على حامل محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3

(ب) التخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها

المتتالية (u_n) متناقصة تماما و متقاربة.

(2) البرهان بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n: 1 \leq u_n \leq 4$

(3) اتجاه تغير المتتالية (u_n)

من اجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{3}(U_n - 1)^2 + 1 - U_n = \frac{U_n^2 - 5U_n + 4}{3} = \frac{1}{3}(U_n - 1)(U_n - 4)$$

لدينا $1 \leq U_n \leq 4$ ومنه $(U_n - 1)(U_n - 4) \leq 0$ أي $U_{n+1} - U_n \leq 0$ ومنه المتتالية (U_n) متناقصة.

المتتالية (U_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 1 وبالتالي فهي متقاربة ،

وبالتالي يوجد عدد حقيقي L بحيث $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = L$ وهو حل للمعادلة $f(x) = x$ أي $\frac{1}{3}(L-1)^2 + 1 = L$

ومنه $\frac{1}{3}(L-1)(L-4) = 0$ ومنه إما $L = 1$ أو $L = 4$ ومنه $L = 1$ لأن المتتالية متناقصة و $U_0 = 3$ وبالتالي $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$.

(4) أ) إثبات أن (v_n) متتالية هندسية مع تعيين أساسها و حدها الأول .

$$v_{n+1} = \ln\left(\frac{U_{n+1}-1}{3}\right) = \ln\left[\left(\frac{U_n-1}{3}\right)^2\right] = 2\ln\left(\frac{U_n-1}{3}\right) = 2v_n \quad \text{لدينا}$$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 و حدها الأول v_0 حيث $v_0 = \ln\left(\frac{U_0-1}{3}\right) = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$.

ب) كتابة v_n بدلالة n ، ثم استنتاج انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 3e^{2^n \ln(\frac{2}{3})}$ ثم حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$\text{لدينا } v_n = v_0 \times q^n = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \times 2^n \quad \text{ولدينا: } U_n = 3e^{v_n} + 1 \quad \text{ومنه } U_n = 3e^{2^n \ln(\frac{2}{3})} + 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3e^{2^n \ln(\frac{2}{3})} + 1 = 1$$

(5) نضع من اجل كل عدد طبيعي n $T_n = \frac{(u_0-1)(u_1-1)\dots(u_n-1)}{3^n}$ نبين أن: $T_n = 3e^{2^{n+1} \ln(\frac{2}{3})}$

$$\begin{aligned} W_n &= \frac{(U_0-1)(U_1-1)(U_2-1) \times \dots \times (U_n-1)}{3^n} \\ &= \frac{\left(3 \times e^{2^0 \ln(\frac{2}{3})}\right) \left(3 \times e^{2^1 \ln(\frac{2}{3})}\right) \left(3 \times e^{2^2 \ln(\frac{2}{3})}\right) \times \dots \times \left(3 \times e^{2^n \ln(\frac{2}{3})}\right)}{3^n} \\ &= \frac{3^{n+1} \times e^{\ln(\frac{2}{3})(2^0 + 2^1 + \dots + 2^n)}}{3^n} \\ &= 3e^{\ln(\frac{2}{3})(2^{n+1}-1)} \end{aligned}$$

$$\text{ومنه: } \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3e^{\ln(\frac{2}{3})(2^{n+1}-1)} = 0$$

التمرين 3

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(\bar{Z} - 2 + 2i)(Z^2 - 4Z + 16) = 0$

$$S = \{2+2i ; 2+2\sqrt{3}i ; 2-2\sqrt{3}i\}$$

(II)

(1) كتابة العددين Z_A و Z_B على الشكل الأسّي .

$$Z_B = 4e^{-\frac{\pi}{6}i} ; \quad Z_A = 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$$

(2) أ) كتابة العدد المركب $\frac{Z_A}{Z_B}$ على الشكل الجبري

$$\frac{Z_A}{Z_B} = \frac{\sqrt{3}-1}{4} + i \frac{\sqrt{3}+1}{4}$$

استنتاج القيمة المضبوط لكل من $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

(3) كتابة العدد المركب $\frac{Z_A-Z_C}{Z_B-Z_C}$ على الشكل الأسّي

$$\frac{Z_A - Z_C}{Z_B - Z_C} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} e^{\frac{3\pi}{2}i}$$

. طبيعة المثلث ABC قائم في C

(4) أ) قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{Z_B}{Z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا.

$$n = 3 + 6k ; k \in \mathbb{N}$$

(ب) التحقق أن: $\left(\frac{Z_B}{Z_C}\right)^{2024} + \left(\frac{Z_C}{Z_B}\right)^{2006} = 0$

(5) عين Z_G لاحقة G مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

$$Z_G = \frac{2 + 4\sqrt{3}}{3} + \frac{2}{3}i$$

(6) أ) (E_1) هي الدائرة التي مركزها G و نصف قطرها $r = 4$

(ب) (E_2) هي محور القطعة المستقيمة $[AC]$

التمرين 4 (7 ن)

(2) أ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

(3)

(ب) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$

(C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=0$

(2) أ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x + 1) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 0$

(C_f) يقبل مستقيين مقاربين معادلتهما $y=2x$ و $y=2x-1$ بجوار $+\infty$ و $-\infty$ على الترتيب

(ب) الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم $y=2x$: (Δ_1)

• على المجال $] -\infty ; 0[$: (C_f) يقع تحت (Δ_1)

• على المجال $] 0 ; +\infty [$: (C_f) يقع فوق (Δ_1)

الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم $y=2x-1$: (Δ_2)

• على المجال $] -\infty ; 0[$: (C_f) يقع تحت (Δ_1)

• على المجال $] 0 ; +\infty [$: (C_f) يقع فوق (Δ_1)

(3) أ) نبين انه من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$: $f'(x) = \frac{(2e^x-1)(e^x-2)}{(e^x-1)^2}$

(ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

• إشارة $f'(x)$:

x	$-\infty$	$-\ln 2$	0	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$		$+ \quad 0$	$-$	$- \quad 0$	$+$

و منه f دالة متزايدة تماما على المجالين $]-\infty; -\ln 2]$ و $[\ln 2; +\infty[$

و متناقصة تماما على المجالين $]-\ln 2; 0[$ و $]0; \ln 2[$

• جدول التغيرات

x	$-\infty$	$-\ln 2$	0	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$		$+ \quad 0$	$-$	$- \quad 0$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$-2-\ln 4$	$-\infty$	$+\ln 4$	$+\infty$

(4) من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$

$$\text{حساب } f(-x) + f(x) = -1$$

تفسير النتيجة بيانيا.

النقطة $(-\frac{1}{2}; 0)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f)

(5) انشاء (Δ_1) و (Δ_2) و (C_f) . (يعطى $f(-\ln 2) = -\ln 4 - 2$ و $f(\ln 2) = \ln 4 + 1$)

(6) المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد و اشارة حلول المعادلة : $\frac{1}{e^x-1} - m = 0$

$$\text{لدينا } \frac{1}{e^x-1} - m = 0 \text{ و منه } f(x) = 2x + m$$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) و المستقيم ذو المعادلة $y = 2x + m$

- لما $m \in]-\infty; -1[$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا

- لما $m \in [-1; 1]$ فإن المعادلة لا تقبل حلول.

- لما $m \in]1; +\infty[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا.

(7) أ) نبين ان الدالة $x \mapsto -x + \ln(e^x - 1)$ هي دالة اصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{e^x-1}$

$$[-x + \ln(e^x - 1)]' = \frac{1}{e^x-1}$$

$$\int_{\ln 2}^1 \frac{dx}{e^x-1} = -1 + \ln(2e-2) \quad (\text{ب})$$

تفسير النتيجة بيانيا

تمثل مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل و المستقيمين $x=1$ و $x=\ln 2$

(8) كيفية رسم منحنى الدالة h انطلاقا من (C_f)

لما $x \in]0; +\infty[$ منحنى الدالة h ينطبق على (C_f)

لما $x \in]-\infty; 0[$ منحنى الدالة h نظير الجزء الغير منطبق بالنسبة إلى محور الفواصل