الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية الشهيد النوي بن عمار ابن الصالح – فسديس -

المستوى والشعبة: 3 علوم تجريبية السنة الدراسية: 2025/2024

اختبار الثلاثي الثاني في مادة: الرياضيات المدة: 3 ساعات

التمرين الأول: (05 نقاط)

(u_n) متتالية معرّفة بحدّها الاوّل $u_0 = 2$ و من أجل كلّ عدد طبيعي n بـ: $u_{n+1} = \frac{3+2u_n}{4+u_n}$.

1) أ) بَرهِنْ بالتّراجع من أجل كلّ عدد طبيعي n أنَّ: $u_n \geq 1$.

ب) أُدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).ثم استنتج أنها متقاربة.

2) أ) برهن أنه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{5}(u_n - 1)$.

ب) برهن أنه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{5}\right)^n$.

جـ) استنتج نهاية المتتالية (u_n).

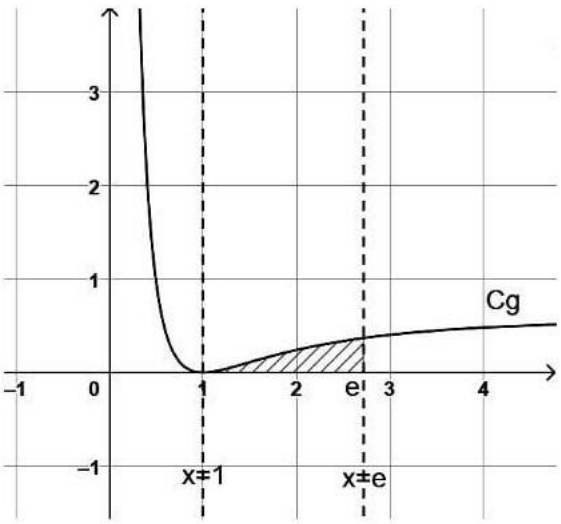
3) نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots\cdots + u_{n-1}$

أ) برهن أنه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $n \leq S_n \leq n + \frac{5}{4}\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$.

ب) استنتج كلا من $\lim S_n$ و $\lim \frac{S_n}{n}$.

التمرين الثاني: (06 نقاط)

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x) = \frac{\ln^2(x)}{x}$ و (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ كما هو مبين في **الشكل المقابل**



1) أحسب كلا من: $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim_{\substack{x>0 \\ x\to 0}} g(x)$ مع تفسير النتائج هندسيا.

2) أحسب A مساحة الجزء المظلل في الرسم.

3) (I_n) المتتالية المعرّفة من أجل كلّ عدد طبيعي غير معدوم n بـ:

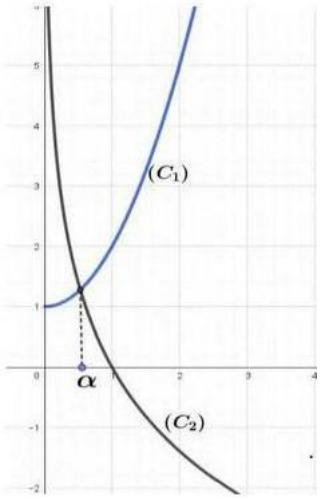
$I_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx$.

أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن: $I_1 = 1 - \frac{2}{e}$.

ب) بين أن المتتالية موجبة تماما ومتناقصة.

ج) استنتج أن المتتالية (I_n) متقاربة.

4) برهن أنه من أن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $I_{n+1} = \frac{-1}{e} + (n+1)I_n$



التمرين الثالث: (09 نقاط)

الجزء الأول: في الشكل المقابل (C_1) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto x^2+1$ و (C_2) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto -2\ln x$.

α هي فاصلة نقطة تقاطعهما.

1) **بقراءة بيانية:** حدّد وضعية (C_1) بالنسبة إلى (C_2) على المجال $]0;+\infty[$.

2) g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+1+2\ln x$

- استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ ثم تحقّق أنّ: $0,5<\alpha<0,6$.

الجزء الثاني:

f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=-x+\dfrac{3+2\ln x}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أحسب كلا من $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x>0\\ x\to 0}} f(x)$ مع تفسير النتيجة هندسيا.

2) أثبت أنّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{x^2}$.

3) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثمّ شكل جدول تغيراتها.

4) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x$ مقارب لـ (C_f).

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ).

5) بيّن أنّ (C_f) يقبل مماس (T) موازٍ لـ (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

6) ارسم كلا من (T) و (Δ) ثم أنشئ (C_f) (نأخذ $f(\alpha)\simeq 2,7$ و $f(2)=f(0.2)\simeq 0$)

7) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $3+2\ln x=mx$.

8) أحسب القيمة المضبوطة للعدد الحقيقي S حيث: $S=\int_1^e \big(f(x)+x\big)dx$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

انتهى الموضوع