الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية قسنطينة — **الثانوية: الحرّية**
المادة: الرياضيات — **المستوى: ثالثة ثانوي**
الشعبة: علوم تجريبية — **المعامل:5**
الإثنين 13 ماي 2024

دورة ماي 2024 — **البكالوريا البيضاء** — **المدة:3 ساعات وَنصف ساعة**

على المترشحة أن تختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول (4ن):

1) نرمي قطعة نقدية مزيّفة مرة واحدة، نرمز للظهر بالرمز P وَللوجه بـ F.
أحسبي إحتمال كل من الظهر وَالوجه علمًا أنّ إحتمال ظهور الظهر يُساوي أربع مرات إحتمال ظهور الوجه.

2) نرمي الآن قطعة نقدية n مرة حيث:$n \geq 1$ ،نُسمي الحادثتين:
A :« حادثة الحصول على الوجه مرة واحدة على الأقل خلال n رمية» .
وَ F_n :« حادثة الحصول على الوجه في الرمية n» .

أ- أحسبي الإحتمالين $P(F_3)$ وَ $P(\overline{F_3})$.

ب-بيّني أنّ: $P(A) = \frac{5^n - 4^n}{5^n}$.

3) نفرض في كل مما يلي: $n = 3$.
يضع اللاعب في البداية مبلغ قيمته $30DA$ ثُمّ يرمي القطعة النقدية السابقة، وَمن أجل كل رمية نعتبر:

- ظهور الوجه ثلاث مرات يكسب اللاعب $3kDA$.
- ظهور الوجه مرتين يكسب اللاعب $6kDA$.
- ظهور الوجه مرة واحدة يكسب اللاعب $5kDA$.
- ظهور الظهر ثلاث مرات لا يكسب اللاعب شيئًا.

نعتبر المتغيّر العشوائي X الذي من أجله يربح اللاعب من خلال الفرق بين ما يدفعه وَما يكسبه.

أ- ماهي القيّم الممكنة للمتغيّر العشوائي X؟

ب-عرّفي قانون الإحتمال للمتغيّر العشوائي X.

جـ - إبتداءً من أية قيمة للعدد الطبيعي k تكون اللعبة في صالح منظّم اللعبة؟

التمرين الثاني (4ن):

لتكن المتتالية (u_n) المعرّفة بحدّها الأول:$u_0 = 0$ ،وَمن أجل كل عدد طبيعي n بـ:$u_{n+1} = \sqrt{\frac{{u_n}^2}{3} + 8}$.

1) برهني بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ:$0 \leq u_n \leq 2\sqrt{3}$.

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ:$v_n = 12 - {u_n}^2$.

أ- بيّني أنّ المتتالية (v_n) هندسية، يُطلب تعيين أساسها وَحدّها الأول.

ب-عبّري عن v_n بدلالة n ، ثُمّ إستنتجي عبارة u_n بدلالة n.

جـ- أحسبي $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

3) أحسبي بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = {u_0}^2 + {u_1}^2 + \ldots + {u_n}^2$، ثُمّ أحسبي $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

التمرين الثالث (5ن):

1) نعتبر المعادلة (E) في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ حيث :

$$z^2 - (1+5i)z - 8 + 4i = 0 \ldots\ldots (E)$$

أ- جِدي الجذور التربيعية للعدد المركب $(8-6i)$.

ب-حلّي في $\mathbb{C}$ المعادلة (E).

2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$، نعتبر النقط A، B وَ C ذات اللواحق: $z_A = i$ ، $z_B = 2+2i$ وَ $z_C = -1+3i$.

وَلتكن النقطة M ذات اللاحقة: $z_M = m$، حيث: $m \in \mathbb{C}^*$.

أ- عيّني طبيعة (Γ) مجموعة النقط M حتى تكون النقط O، C وَ M في إستقامية.

ب-عيّني طبيعة (Δ) مجموعة النقط M حتى يكون المثلث OCM قائم في O.

جـ- حدّدي طبيعة المثلث ABC معللةً إجابتك.

3) نعتبر الدوران R الذي مركزه A وَزاويته $\frac{\pi}{2}$ ، وَالتحاكي H ذو المركز A وَالنسبة -2.

أ- أكتبي العبارة المركبة للتحويلين R وَ H .

ب- عيّني طبيعة التحويل النقطي T المعرّف بـ: $T = R \circ H$، ($\circ$: هو رمز التركيب).

جـ- لتكن C' صورة النقطة C بالتحويل T ،برهني أنّ النقط A، B وَ C' في إستقامية.

4) عيّني (Υ) مجموعة النقط M حتى تكون النقط A، B، C وَ M تنتمي إلى نفس الدائرة.

التمرين الرابع (7ن):

I) نعتبر الدالة g المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = x - 2 + \frac{1}{2}lnx$.

1) أدرسي تغيّرات الدالة g وَشكّلي جدول تغيّراتها.

2) بيّني أنّ المعادلة: $g(x) = 0$ تقبل حلًا وحيدًا α حيث: $1.7 < \alpha < 1.8$.

3) إستنتجي إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

II) نعتبر الدالة f المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 lnx$.

وَليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد وَالمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$.

1) أحسبي $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أثبتي أنّه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تمامًا، فإنّ: $f'(x) = xg(\frac{1}{x})$.

3) شكّلي جدول تغيّرات الدالة f.

4) بيّني أنّ: $f(\frac{1}{\alpha}) = \frac{1+4\alpha}{8\alpha^2}$ ،ثُمّ إستنتجي حصرًا للعدد $f(\frac{1}{\alpha})$.(تُدّور النتائج إلى 10^{-2}).

5) أحسبي $f(3)$ ثُمّ أرسمي (C_f) على المجال $]0;3]$.

III) لتكن الدالة h المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $h(x) = x^2 lnx$.

1) بإستعمال المكاملة بالتجزئة، أحسبي بدلالة λ التكامل $\int_2^\lambda h(x)dx$، حيث: $\lambda > 2$.

2) إستنتجي بدلالة λ مساحة الحيّز للمستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) وَحامل محور الفواصل وَالمستقيمين ذو المعادلتين: $x = 2$ وَ $x = \lambda$.

إنتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول (4ن):

D_1 وَ D_2 زهرتي نرد، النرد D_1 مغشوش وَله كل وجهين يحملان نفس الرقم k حيث: $k \in \{1; 2; 3\}$. نرمز بـ u_k إحتمال ظهور الوجه الذي يحمل الرقم k.

1) أحسبي u_1، u_2 وَ u_3 ،علمًا أنّ هذه الأعداد تُشكّل حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها $\frac{1}{4}$.

2) النرد D_2 ليس مغشوش وَله كل ثلاث وجوه تحمل نفس الرقم p حيث: $p \in \{1; 2\}$.
نرمز بـ v_p إحتمال ظهور الوجه الذي يحمل الرقم p.
- أحسبي v_1 وَ v_2.

3) نرمي النردين D_1 وَ D_2 في آنٍ واحد، وَنعتبر المتغيّر العشوائي X الذي يُساوي جداء رقمي الوجهين العلويين للنردين D_1 وَ D_2 بعد السقوط.
أ-عرّفي قانون الإحتمال للمتغيّر العشوائي X.
ب-أحسبي $\sigma(2024 - 1445X)$.

التمرين الثاني (4ن):

لتكن (t_n) متتالية هندسية متزايدة تمامًا معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases} t_0 + t_1 + t_2 = 7\ln 2 \\ t_0 \times t_1 \times t_2 = 8(\ln 2)^3 \end{cases}$.

1) أحسبي الحدود t_1 ثُمّ t_0 وَ t_2.
2) إستنتجي الأساس q للمتتالية (t_n)، ثُمّ أكتبي t_n بدلالة n.
3) جِدي أصغر قيمة للعدد الطبيعي n الذي يُحقق: $t_n \geq \ln 2^{2974}$.
4) أ- أحسبي المجموع S_n بدلالة n وَالجداء P_n بدلالة n حيث: $\begin{cases} S_n = t_0 + t_1 + \ldots + t_n \\ P_n = t_0 \times t_1 \times \ldots \times t_n \end{cases}$.
ب-إستنتجي S'_n بدلالة n حيث: $S'_n = \ln(t_0) + \ln(t_1) + \ldots + \ln(t_n)$.
جـ-أحسبي S''_n بدلالة n حيث: $S''_n = {t_0}^{2024} + {t_1}^{2024} + \ldots + {t_n}^{2024}$.

التمرين الثالث (5ن):

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$،نعتبر النقط A ، B وَ C التي لاحقاتها على الترتيب: $Z_A = -1 + \sqrt{3}i$ ، $Z_B = \overline{Z_A}$ وَ $Z_C = 2$.

1) أ- أكتبي العدد المركب: $\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C}$ على الشكل الأسي.
ب- إستنتجي طبيعة المثلث ABC.
جـ-عيّني ω مركز وَنصف قطر الدائرة (Υ) المحيطة بالمثلث ABC.

2) أ- عيّني طبيعة وَعناصر المجموعة (Γ) للنقط $M(Z)$ التي تُحقق: $Z\bar{Z} + 2(Z + \bar{Z}) = 0$.
ب-تحققي أنّ النقطتين A وَ B تنتميان إلى المجموعة (Γ) .

3) ليكن r الدوران الذي مركزه النقطة A وَزاويته $\frac{\pi}{3}$.
أ- عيّني صورة النقطة B بالدوران r.
ب-عيّني Z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران r.
جـ-إستنتجي طبيعة الرباعي $ABCD$.
د-عيّني صورة النقطة Ω بالدوران r ،ثُمّ إستنتجي صورة المجموعة (Γ) بالدوران r.

التمرين الرابع (7ن):

I) نعتبر الدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 - (x^2 + 1)e^{-x}$.

1) أدرسي تغيّرات الدالة g وَشكّلي جدول تغيّراتها.

2) أحسبي $g(0)$ ،ثُمّ إستنتجي إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة fالمعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x - 1 + (x^2 + 2x + 3)e^{-x}$.

وَليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد وَالمتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$.

1) أ-أحسبي $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

ب-تحققي أنّ المستقيم $(D): y = x - 1$ مستقيم مقارب مائل للبيان (C_f) عند$(+\infty)$.

جـ-أدرسي وضعية البيان (C_f) بالنسبة إلى(D).

2) أ- أثبتي أنّه من أجل كل عدد حقيقي x فإنّ: $f(x) = \frac{x^2+2x+3+xe^x-e^x}{e^x}$.

ب- أحسبي $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

3) أ- أكتبي $f'(x)$ بدلالة $g(x)$ ،حيث:f' هي الدالة المشتقة للدالة f.

ب-إستنتجي إتجاه تغيّر الدالة f ،ثُمّ شكّلي جدول تغيّراتها.

4) لتكن الدالة h المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = f(x) - x$ ،وَالمستقيم $(d): y = x$.

أ- بيّني أنّ المعادلة: $h(x) = 0$ تقبل حلًا وحيدًا α حيث: $2 < \alpha < 3$.

ب-إستنتجي الوضعية النسبية للبيان (C_f) بالنسبة إلى(d).

5) أحسبي $f(-\frac{3}{2})$ ثُمّ أرسمي المستقيمين (D)،(d) وَالبيان (C_f) على $]\frac{-3}{2}; +\infty[$.

6) أ- بيّني أنّ الدالة: $x \longmapsto (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ هي دالة أصلية للدالة: $x \mapsto -x^2e^{-x}$.

ب-بإستعمال التكامل بالتجزئة، أحسبي بدلالة العدد الحقيقي x ، التكامل: $\int xe^{-x}dx$.

جـ- أحسبي بدلالة β ، مساحة الحيّز للمستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) وَالمستقيم (d) وَالمستقيمين ذو المعادلتين: $x = 3$ وَ $x = \beta$ ،حيث: $\beta > 4$.

إنتهى الموضوع الثاني

التصحيح المفصّل لموضوع إختبار مادة الرياضيات /علوم تجريبية/بكالوريا دورة ماي2024

العلامة	الموضوع الأول –التصحيح المفصّل-
(4نقاط)	**التمرين الأول:** نرمي قطعة نقدية مزيّفة مرة واحدة، نرمز للظهر بالرمز P وَللوجه بـ F.
	1) حساب إحتمال كل من الظهر وَالوجه علمًا أنّ إحتمال ظهور الظهر يُساوي أربع مرات إحتمال ظهور الوجه:
(0.25ن)	لدينا: $\begin{cases} P(P) = 4P(F) \\ P(P) + P(F) = 1 \end{cases}$ وَمنه: $4P(F) + P(F) = 1$، وَعليه فإنّ: $5P(F) = 1$
(0.25ن)	أي: $P(F) = \frac{1}{5}$ وَ $P(P) = \frac{4}{5}$.
(0.25ن)	2) نرمي الآن قطعة نقدية n مرة حيث: $n \geq 1$، نُسمي الحادثتين:
	A: «حادثة الحصول على الوجه مرة واحدة على الأقل خلال n رمية».
(0.25ن)	وَ F_n: «حادثة الحصول على الوجه في الرمية n».
(0.25ن)	**أ- حساب الإحتمالين $P(F_3)$ وَ $P(\overline{F_3})$:**
	لدينا: $P(F_3) = P(F) = \frac{1}{5}$ وَ $P(\overline{F_3}) = P(P) = \frac{4}{5}$.
	ب- إثبات أنّ: $P(A) = \frac{5^n - 4^n}{5^n}$:
	لدينا: $P(A) = 1 - P(\bar{A})$، حيث: $\bar{A}$: «حادثة عدم الحصول على الوجه خلال n رمية».
	وَمنه: $P(\bar{A}) = P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \ldots \cap \overline{F_n})$.
	وَبما أنّ الحوادث: $\overline{F_1}$، $\overline{F_2}$،...، $\overline{F_n}$ مستقلة فإنّ: $P(\bar{A}) = P(\overline{F_1}) \times P(\overline{F_2}) \times \ldots \times P(\overline{F_n})$،
	معناه أنّ: $P(\bar{A}) = [P(P)]^n = \left(\frac{4}{5}\right)^n$، وَمنه: $P(A) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n = 1 - \frac{4^n}{5^n}$،
(0.25ن)	إذن: $P(A) = \frac{5^n - 4^n}{5^n}$.
(1ن)	**3) أ-القيّم الممكنة للمتغيّر العشوائي X:**
	القيّم الممكنة لـ X هي: $\{3k-30; 6k-30; 5k-30; -30\}$.
	ب-تعريف قانون الإحتمال للمتغيّر العشوائي X:
(0.25ن)	$P(X = 3k-30) = P(F_1 \cap F_2 \cap F_3) = P^3(F)$، وَمنه: $P(X = 3k-30) = \left(\frac{1}{5}\right)^3$.
	وَ: $P(X = 6k-30) = P(F_1 \cap F_2 \cap \overline{F_3}) + P(F_1 \cap \overline{F_2} \cap F_3) + P(\overline{F_1} \cap F_2 \cap F_3)$
(0.25ن)	أي: $P(X = 6k-30) = 3P^2(F) \times P(P)$. وَمنه: $P(X = 6k-30) = 3\left(\frac{1}{5}\right)^2 \times \frac{4}{5}$.
	وَ: $P(X = 5k-30) = P(F_1 \cap \overline{F_2} \cap \overline{F_3}) + P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap F_3) + P(\overline{F_1} \cap F_2 \cap \overline{F_3})$
(0.25ن)	أي: $P(X = 5k-30) = 3P^2(P) \times P(F)$. وَمنه: $P(X = 5k-30) = 3\left(\frac{4}{5}\right)^2 \times \frac{1}{5}$.
(0.25ن)	وَ: $P(X = -30) = P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \overline{F_3})$ أي: $P(X = -30) = P^3(\overline{F}) = P^3(P)$.
	وَمنه: $P(X = -30) = \left(\frac{4}{5}\right)^3$.

كخلاصة: تعريف قانون الإحتمال للمتغيّر العشوائي X:

X_i	$3k-30$	$6k-30$	$5k-30$	-30	$\sum$
$P(X=X_i)$	$\left(\frac{1}{5}\right)^3$	$3\left(\frac{1}{5}\right)^2\times\frac{4}{5}$	$3\left(\frac{4}{5}\right)^2\times\frac{1}{5}$	$\left(\frac{4}{5}\right)^3$	$\frac{125}{125}=1$
$X_i\times P(X=X_i)$	$(3k-30)\times\left(\frac{1}{5}\right)^3$	$(6k-30)\times3\left(\frac{1}{5}\right)^2\times\frac{4}{5}$	$(5k-30)\times3\left(\frac{4}{5}\right)^2\times\frac{1}{5}$	$(-30)\left(\frac{4}{5}\right)^3$	$\frac{315k-2454}{125}$

(0.25ن)

جـ - إبتداءً من أية قيمة للعدد الطبيعي k تكون اللعبة في صالح منظّم اللعبة؟

تكون اللعبة في صالح اللاعب إذا كان الأمل الرياضياتي موجبًا أي في غير مصلحة منظّم اللعبة.
وَالعكس، تكون اللعبة في صالح منظّم اللعبة إذا كان الأمل الرياضياتي سالبًا.

معناه أنّ: $E(X)=\sum X_i\times P(X=X_i)=\frac{315k-2454}{125}<0$، وَهذا يُكافئ أنّ: $315k-2454<0$. (0.25ن)

أي: $k<\frac{2454}{315}\simeq 7.79$.

وَهذا يعني أنّ اللعبة تكون في صالح منظّمها إذا كان: $k\in\{1;2;3;4;5;6;7\}$. (0.25ن)

التمرين الثاني: (4نقاط)

لدينا: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}:\begin{cases}u_0=0\\ u_{n+1}=\sqrt{\frac{{u_n}^2}{3}+8}\end{cases}$

1) البرهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $0\le u_n\le 2\sqrt{3}$:

من أجل $n=0$ فإنّ: $0\le u_0=0\le 2\sqrt{3}$ ، وَمنه: $P(0)$ محققة. (0.25ن)

لنفرض صحة الخاصية حتى الدرجة n أي: $0\le u_n\le 2\sqrt{3}$.

وَنُحاول إثبات صحة الخاصية من أجل الدرجة $(n+1)$ أي: $0\le u_{n+1}\le 2\sqrt{3}$ ؟

لدينا فرضًا: $0\le u_n\le 2\sqrt{3}\xrightarrow{\text{تُربّع الأطراف الموجبة للمتباينة}}0<{u_n}^2\le 12$.

وَبضرب الأطراف الموجبة لهذه المتباينة في العدد الموجب $\left(\frac{1}{3}\right)$ نجد: $0\le\frac{{u_n}^2}{3}\le 4$، ثُمّ نُضيف 8 لأطرافها (0.25ن)

نحصل على: $8\le\frac{{u_n}^2}{3}+8\le 12$،

وَنجذر الأطراف الموجبة لها فنتحصل على $0\le 2\sqrt{2}=\sqrt{8}\le\sqrt{\frac{{u_n}^2}{3}+8}\le\sqrt{12}=2\sqrt{3}$. (0.25ن)

وَبالتعدي نجد أنّ: $0\le u_{n+1}\le 2\sqrt{3}$.

إذن: $0\le u_n\le 2\sqrt{3}$، من أجل كل عدد طبيعي n.

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=12-{u_n}^2$.

أ- إثبات أنّ المتتالية (v_n) هندسية، يُطلب تعيين أساسها وَحدّها الأول:

(v_n) متتالية هندسية إذا وَفقط إذا كان $(v_{n+1}=v_n\times q)$.

لدينا: $v_n=12-{u_n}^2$،

وَمنه: $v_{n+1}=12-{u_{n+1}}^2=12-\left(\frac{{u_n}^2}{3}+8\right)=4-\frac{{u_n}^2}{3}=\frac{12}{3}-\frac{{u_n}^2}{3}$. (0.25ن)

وَعليه فإنّ: $v_{n+1}=\frac{1}{3}(12-{u_n}^2)$ أي: $v_{n+1}=\frac{1}{3}v_n$. (0.25ن)

مما يدل أنّ: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$. (0.25ن)

وَحدّها الأول: v_0 حيث: $v_0=12-{u_0}^2=12-0^2$، أي: $v_0=12$. (0.25ن)

(0.25ن)	**ب-كتابة v_n بدلالة n:** بما أنّ (v_n) متتالية هندسية، فمن عبارة الحد العام: $v_n = v_0 \times q^n$.
(0.25ن)	وَبالتعويض نجد أنّ: $v_n = 12 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$ ،من أجل كل عدد طبيعي n.
(0.25ن)	• **إستنتاج u_n بدلالة n:**
(0.25ن)	لدينا: $v_n = 12 - {u_n}^2$ ،وَمنه: $u_n = \sqrt{12 - v_n}$ ،إذن: $u_n = \sqrt{12 - 12 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n}$. أي:
(0.25ن)	**جـ-حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:**
(0.25ن)	لدينا: $q = \frac{1}{3} \in]-1;1[$ ،مما يعني أنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$.
(0.25ن)	وَمنه فإنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{12 - 12 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n} = \sqrt{12}$ ،أي: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2\sqrt{3}$.
(0.25ن)	**3)حساب S_n بدلالة n حيث: $S_n = {u_0}^2 + {u_1}^2 + \ldots + {u_n}^2$:**
	لدينا: $v_n = 12 - {u_n}^2$ ،وَمنه: ${u_n}^2 = 12 - v_n$.
	وَعليه فإنّ: $S_n = {u_0}^2 + {u_1}^2 + \ldots + {u_n}^2 = 12 - v_0 + 12 - v_1 + \ldots + 12 - v_n$.
	إذن: $S_n = (12 + 12 + \ldots + 12) - (v_0 + v_1 + \ldots + v_n)$.
(0.25ن)	أي: $S_n = 12 \times (n - 0 + 1) - v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ ، إذن: $S_n = 12 \times (n+1) - 12 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}}$.
(0.25ن)	وَمنه فإنّ: $S_n = 12(n+1) - 12 \times \frac{3}{2} \times \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$
	فينتج: $S_n = 12(n+1) - 18\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$.
	• **حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$:**
(0.25ن)	لدينا: $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 12(n+1) = +\infty \end{cases}$ ،وَمنه فإنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.
(5نقاط)	**التمرين الثالث:** نعتبر المعادلة: $(E) \ldots z^2 - (1+5i)z - 8 + 4i = 0$.
	1) أ- إيجاد الجذور التربيعية للعدد المركب $(8 - 6i)$:
	لنعتبر أنّ: $(x+iy)^2 = 8 - 6i$ ،
(0.25ن)	فهو يُحقق إذن الجملة: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \ldots\ldots (1) \\ 2xy = -6 \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = 10 \ldots (3) \end{cases}$
(0.25ن)	وَبجمع المعادلتين (1) وَ (3) نجد أنّ: $2x^2 = 18$ أي: $x^2 = 9$ ، إذن: إما $(x = -3)$ أَوْ $(x = 3)$.
	وَمن المعادلة (2) نجد أنّ: $y = \frac{-6}{2x} = \frac{-3}{x}$.
(0.25ن)	من أجل $(x = -3)$ فإنّ: $(y = 1)$ وَمن أجل $(x = 3)$ فإنّ: $(y = -1)$.
	إذن: $(3 - i)^2 = 8 - 6i$ أَوْ $(-3 + i)^2 = 8 - 6i$.
	ب-حل المعادلة (E) في $\mathbb{C}$:
(0.25ن)	نحسب المميّز Δ:
	$\Delta = (-1+5i)^2 - 4(1)(-8+4i) = 1 - 10i - 25 + 32 - 16i$.
	وَمنه: $\Delta = 8 - 6i$ ،وَحسب السؤال -أ- فإنّ: $\Delta = (3-i)^2 = (-3+i)^2$.

(0.25ن) (0.25ن)	وَهذا يعني أنّ للمعادلة (E) حلان متمايزان هما: $\begin{cases} z_1 = \frac{1+5i-3+i}{2} = -1+3i \\ z_2 = \frac{1+5i+3-i}{2} = 2+2i \end{cases}$ إذن: $S = \{-1+3i; 2+2i\}$.
(0.25ن)	**2) نعتبر النقط A، B وَ C ذات اللواحق: $z_A = i$ ، $z_B = 2+2i$ وَ $z_C = -1+3i$.** **وَلتكن النقطة M ذات اللاحقة: $z_M = m$، حيث: $m \in \mathbb{C}^*$.** **أ- تعيين طبيعة (Γ) مجموعة النقط M حتى تكون النقط O، C وَ M في إستقامية:** (النقط O، C وَ M في إستقامية) إذا وَفقط إذا ($\frac{z_M - z_O}{z_C - z_O} \in \mathbb{R}$). حيث: $\frac{z_M - z_O}{z_C - z_O} \in \mathbb{R}$ يُكافئ أنّ: $\frac{z_M - z_O}{z_C - z_O} = \frac{\overline{z_M - z_O}}{\overline{z_C - z_O}}$. وَمنه: $\frac{m}{-1+3i} = \frac{\overline{m}}{\overline{-1+3i}}$ أي: $\frac{m}{-1+3i} = \frac{\overline{m}}{-1-3i}$. وَعليه فإنّ: $m(-1-3i) = \overline{m}(-1+3i)$، إذن: $-m-3mi+\overline{m}-3\overline{m}i = 0$. وَمنه: $\overline{m} - m - 3i(\overline{m}+m) = 0$. أي: $-2i \times Im(m) - 3i \times 2Re(m) = 0$.
(0.25ن) (0.25ن)	وَبضرب الطرفين لهذه المعادلة الأخيرة في $\frac{i}{2}$ نجد أنّ: $Im(m) + 3Re(m) = 0$ مع $m \in \mathbb{C}^*$. إذن: (Γ) مجموعة النقط M حتى تكون النقط O، C وَ M في إستقامية هي المستقيم ذو المعادلة: $y = -3x$، ماعدا المبدأ O.
(0.25ن)	**ب- تعيين طبيعة (Δ) مجموعة النقط M حتى يكون المثلث OCM قائم في O:** (المثلث OCM قائم في O) إذا وَفقط إذا ($\frac{z_M - z_O}{z_C - z_O}$ عدد تخيّلي صرف) تُكافئ أنّ مجموعة النقط M تنتمي إلى المستقيم: $(OC): y = -3x$ العمودي على المستقيم: $(\Delta): y = \frac{1}{3}x$، ماعدا المبدأ O.
(0.25ن) (0.25ن)	**جـ- تحديد طبيعة المثلث ABC:** لدينا: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-1+3i-i}{2+2i-i} = \frac{-1+2i}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i} = \frac{-2+i+4i+2}{4+1} = \frac{5i}{5} = i$. وَهذا يُكافئ أنّ: $\left\|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right\| = 1$ وَ $arg(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ مما يعني أنّ: $AB = AC$ وَ $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$. معناه أنّ المثلث ABC متساوي الساقين وَقائم في A.
	2) نعتبر الدوران R الذي مركزه A وَزاويته $\frac{\pi}{2}$، وَالتحاكي H ذو المركز A وَالنسبة -2: **أ- أكتبي العبارة المركبة للتحويلين R وَ H:** $R(z) = z' = a_R z + b_R = e^{\frac{\pi}{2}i} z + b_R = iz + b_R$، حيث: $b_R = z_A(1-a_R) = i(1-i) = i+1 = 1+i$، وَمنه: $R(z) = z' = iz + 1 + i$. (0.25ن) من جهة أخرى، فإنّ: $H(z) = z' = a_H z + b_H = -2z + b_H$، حيث: $b_H = z_A(1-a_H) = i(1-(-2)) = i \times 3 = 3i$، وَمنه: $H(z) = z' = -2z + 3i$. (0.25ن) **ب- تعيين طبيعة التحويل النقطي T المعرّف بـ: $T = R \circ H$:** لدينا: $T(z) = R \circ H(z) = R[H(z)] = R[-2z+3i] = i(-2z+3i) + 1 + i$. وَمنه: $T(z) = i(-2z+3i) + 1 + i = -2iz - 3 + 1 + i = -2iz - 2 + i$. أي: $T(z) = -2iz - 2 + i$. حيث: $a_H = -2i = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$، مما يعني أنّ T عبارة عن تشابه مباشر، نسبته $k = 2$ وَزاويته $\theta = -\frac{\pi}{2}$. (0.25ن) وَمركزه A (لأنّه A هو مركز التحويلين الدوران وَالتحاكي). (0.25ن)

جـ-إثبات أنّ النقط A، B وَ C' في إستقامية علمًا أنّ: C' صورة النقطة C بالتحويل T:

$T(z_C) = -2iz_C - 2 + i = -2i(-1+3i) - 2 + i = 2i + 6 - 2 + i = 4 + 3i$. (0.25ن)

من جهة أخرى فإن: $\frac{z_{C'}-z_B}{z_{C'}-z_A} = \frac{4+3i-2-2i}{4+3i-i} = \frac{2+i}{4+2i} = \frac{2+i}{2(2+i)} = \frac{1}{2}$، وَهذا يعني أنّ: $\overrightarrow{BC'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC'}$. (0.25ن)

وَمنه فإنّ النقط A، B وَ C' في إستقامية.

4)تعيين (Υ) مجموعة النقط M حتى تكون النقط A، B، C وَ M تنتمي إلى نفس الدائرة:

حسب السؤال الأول -جـ- فإنّ: $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ ، أي: $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ تخيّلي صرف. (0.25ن)

وَمن جهة أخرى: $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A} \times \frac{z_C-z_M}{z_B-z_M}$ عدد حقيقي، وَهذا يُكافئ أنّ: $\frac{z_C-z_M}{z_B-z_M}$ تخيّلي صرف، مما يعني أنّ:

$\overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{MC}$ وَهذا يُكافئ أنّ: $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = 0$ ، إذن: مجموعة النقط M هي الدائرة التي قطرها $[BC]$. (0.25ن)

(هي الدائرة المحيطة بالمثلث ABC).

التمرين الرابع: (7نقاط)

I) نعتبر الدالة g المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = x - 2 + \frac{1}{2}\ln x$:

1) دراسة تغيّرات الدالة g :

- **مجموعة التعريف:** من المعطيات: $D_g =]0;+\infty[$.
- **النهايات:**

$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left[x - 2 + \frac{1}{2}\ln x\right] = -\infty$، لأنّ: $\lim\limits_{x\to 0}(x-2) = -2$ وَ $\lim\limits_{x\to 0}\ln x = -\infty$. (0.25ن)

$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left[x - 2 + \frac{1}{2}\ln x\right] = +\infty$ ، لأنّ: $\lim\limits_{x\to +\infty}(x-2) = +\infty$ وَ $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln x = +\infty$. (0.25ن)

-الإشتقاقية: g معرّفة وَقابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ وَدالتها المشتقة:

$g'(x) = 1 + \frac{1}{2x} = \frac{2x+1}{2x}$ ، أما إشارتها فهي موجبة تمامًا على $]0;+\infty[$ لأنّ: $x > 0; 2x > 0$، من (0.25ن)

أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$، إذن: g متزايدة تمامًا على $]0;+\infty[$. (0.25ن)

-جدول تغيّرات الدالة g:

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

(0.25ن)

2)إثبات أنّ المعادلة: $g(x) = 0$ تقبل حلًا وحيدًا α حيث: $1.7 < \alpha < 1.8$:

g معرّفة وَمستمرة وَمتزايدة تمامًا على $]0;+\infty[$ ،(حسب السؤال الأول). $]1.7;1.8[$ كجزء من (0.25ن)

حيث: $g(1.7) \simeq -0.03 < 0$، $g(1.8) \simeq 0.22 > 0$، إذن: $g(1.7) \times g(1.8) < 0$. (0.25ن)

إذن وَحسب مبرهنة القيّم المتوسطة فإنّه يوجد حل وحيد α في $]1.7;1.8[$ يُحقق: $g(\alpha) = 0$.

3) إستنتاج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$: حسب ما سبق، فإنّ: (0.25ن)

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

(ن0.25)	**II) الدالة f المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=-\frac{7}{8}x^2+x-\frac{1}{4}x^2\ln x$:** **1) أحسبي $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$:** $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[-\frac{7}{8}x^2+x-\frac{1}{4}x^2\ln x\right]=0$،
	لأنّ: $\lim\limits_{x\to 0}(-\frac{7}{8}x^2+x)=0$ وَ $\lim\limits_{x\to 0}x^2\ln x=0$.
(ن0.25)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\frac{7}{8}x^2+x-\frac{1}{4}x^2\ln x\right]=-\infty$ وَ،
	لأنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}(-\frac{7}{8}x^2+x)=-\infty$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty}(-\frac{1}{4}x^2\ln x)=-\infty$.
(ن0.25) (ن0.25)	**2) إثبات أنّه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تمامًا، فإنّ: $f'(x)=xg(\frac{1}{x})$:** f معرّفة وَقابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ كمجموع وَجداء دوال قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$، وَدالتها المشتقة هي: $f'(x)=-\frac{7}{4}x+1-\frac{1}{2}x\ln x-\frac{1}{4}x=1-2x-\frac{1}{2}x\ln x=1-2x+\frac{1}{2}x\ln(\frac{1}{x})$.
	أي: $f'(x)=1-2x+\frac{1}{2}x\ln(\frac{1}{x})=x(\frac{1}{x}-2+\frac{1}{2}\ln(\frac{1}{x})=xg(\frac{1}{x})$. وَهو المطلوب.
(ن0.25)	• إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(\frac{1}{x})$ من أجل كل عدد حقيقي موجب تمامًا حيث:
	- $x\in\left]0;\frac{1}{\alpha}\right[$، بمعنى أنّ: $\frac{1}{x}>\alpha$، وَحسب الجزء I) فإنّ: $g(\frac{1}{x})>0$، أي: $f'(x)>0$.
	وَهذا يعني أنّ: f متزايدة تمامًا على $\left]0;\frac{1}{\alpha}\right[$.
(ن0.25)	- $x\in\left]\frac{1}{\alpha};+\infty\right[$، بمعنى أنّ: $\frac{1}{x}<\alpha$، وَحسب الجزء I) فإنّ: $g(\frac{1}{x})<0$، أي: $f'(x)<0$.
	وَهذا يعني أنّ: f متناقصة تمامًا على $\left]\frac{1}{\alpha};+\infty\right[$.
(ن0.25)	**3) تشكيل جدول تغيّرات الدالة f:**

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ 0	↗	$f(\frac{1}{\alpha})$	↘	$-\infty$

	1) إثبات أنّ: $f(\frac{1}{\alpha})=\frac{1+4\alpha}{8\alpha^2}$:
	حسب الجزء I) فإنّ: $g(\alpha)=\alpha-2+\frac{1}{2}\ln\alpha=0$، وَمنه: $\frac{1}{2}\ln\alpha=2-\alpha$، أي: $\ln\alpha=4-2\alpha$.

(0.25ن) وَنعلم أنّ: $-\ln\alpha = \ln(\frac{1}{\alpha}) = 2\alpha - 4$ ،وَبتعويض هذه الأخيرة في عبارة $f(\frac{1}{\alpha}) = \frac{1+4\alpha}{8\alpha^2}$ نجد أنّ:

(0.25ن) $$f(\frac{1}{\alpha}) = -\frac{7}{8\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \times \frac{8\alpha}{8\alpha} - \frac{1}{4\alpha^2}(2\alpha - 4) \times \frac{2}{2} = \frac{-7 + 8\alpha - 4\alpha + 8}{8\alpha^2} = \frac{4\alpha + 1}{8\alpha^2}.$$

- **استنتاج حصرًا للعدد $f(\frac{1}{\alpha})$:**

حسب الجزء I) فإنّ: $1.7 < \alpha < 1.8$ ،وَمنه: $4 \times 1.7 + 1 = 7.8 < 4\alpha + 1 < 4 \times 1.8 + 1 = 8.2$

إذن: $7.8 < 4\alpha + 1 < 8.2$.

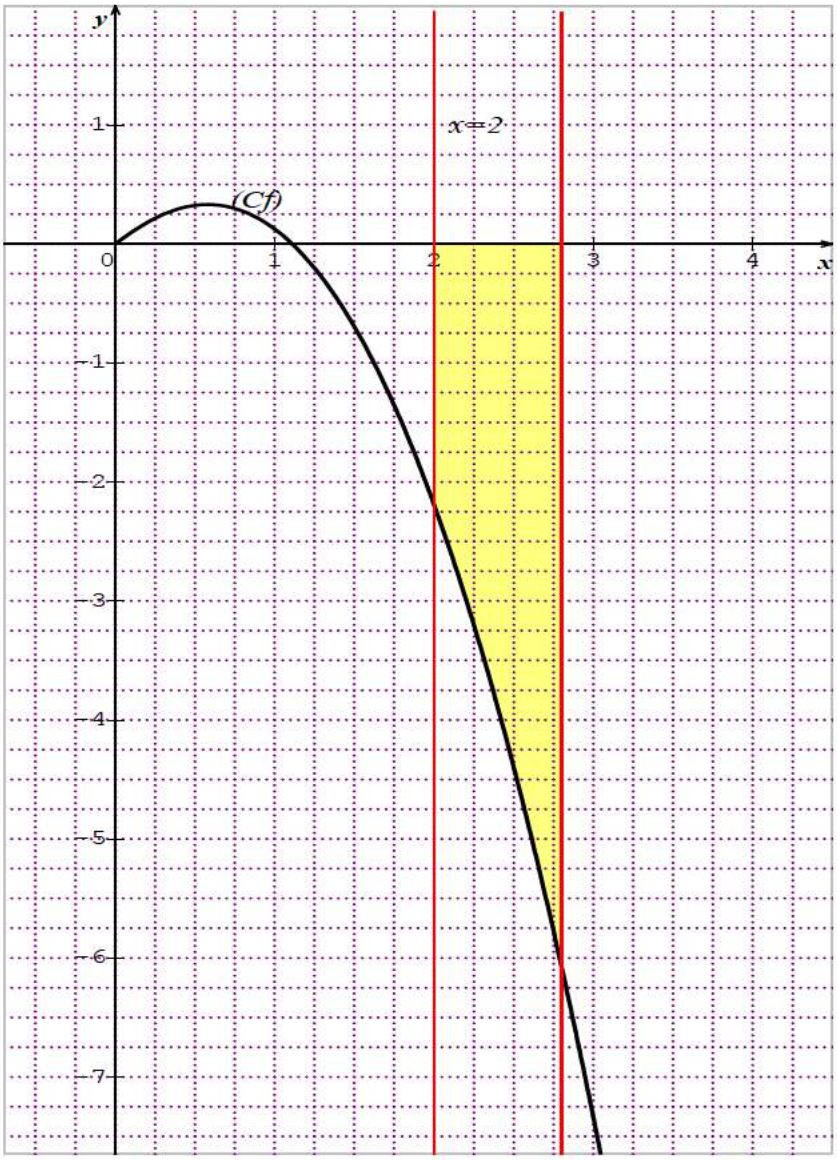
(0.25ن) من جهة أخرى، فإنّ: $1.7 < \alpha < 1.8$ ،إذن: $8 \times 1.7^2 = 23.12 < 8\alpha^2 < 8 \times 1.8^2 = 25.92$.

(0.25ن) وَعليه نجد: $\frac{8.2}{23.12} < \frac{4\alpha+1}{8\alpha^2} < \frac{7.8}{25.92}$ ،أي: $0.3 < f(\frac{1}{\alpha}) < 0.35$.

(0.25ن) **2) حساب $f(3)$:** $f(3) \simeq -7.35$.

- **رسم البيان (C_f) على المجال $]0;3]$:**

(0.5ن)
(0.25ن)



	III) لتكن الدالة h المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $h(x)=x^2\ln x$.
	1) باستعمال المكاملة بالتجزئة، حساب بدلالة λ التكامل $\int_2^\lambda h(x)dx$، حيث: $\lambda>2$:
	لدينا: $\begin{cases}u(x)=\ln x\\ v'(x)=x^2\end{cases}$ ومنه: $\begin{cases}u'(x)=\frac{1}{x}\\ v(x)=\frac{1}{3}x^3\end{cases}$، إذن: $\int_2^\lambda h(x)dx=\left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_2^\lambda-\frac{1}{3}\int_2^\lambda x^2dx$.
(ن0.25)	وَمنه: $\int_2^\lambda h(x)dx=\left[-\frac{x^3}{3}\left(\frac{1}{3}-\ln x\right)\right]_2^\lambda=-\frac{\lambda^3}{3}\left(\frac{1}{3}-\ln\lambda\right)+\frac{8}{3}\left(\frac{1}{3}-\ln 2\right)$.
(ن0.25)	وَعليه فإنّ: $\int_2^\lambda h(x)dx=\frac{8}{9}-\frac{\lambda^3}{9}-\frac{8}{3}\ln 2+\frac{\lambda^3}{3}\ln\lambda$.
	2) استنتاج مساحة الحيّز بدلالة λ للمستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) وَحامل محور الفواصل وَالمستقيمين ذو المعادلتين: $x=2$ وَ $x=\lambda$:
	بما أنّ البيان (C_f) يقع تحت محور الفواصل من أجل $2<x<\lambda$، حيث: $\lambda>2$، فإنّ:
(ن0.25)	$I=-\left\|\vec{i}\right\|\times\left\|\vec{j}\right\|\times\int_2^\lambda f(x)dx=-4\int_2^\lambda\left[-\frac{7}{8}x^2+x-\frac{1}{4}h(x)\right]dx.$
	وَحسب السؤال الأول، فإنّ:
(ن0.25)	$I=-4\left[-\frac{7}{8}\times\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{36}-\frac{x^3}{12}\ln x\right]_2^\lambda=-4\left[-\frac{19x^3}{72}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{12}\ln x\right]_2^\lambda$
	أي:
	$I=-4\left[-\frac{19\lambda^3}{72}+\frac{\lambda^2}{2}-\frac{\lambda^3}{12}\ln\lambda+\frac{19}{9}-2+\frac{2}{3}\ln 2\right]$
	$=-4\left[-\frac{19\lambda^3}{72}+\frac{\lambda^2}{2}-\frac{\lambda^3}{12}\ln\lambda+\frac{1}{9}+\frac{2}{3}\ln 2\right]$
(ن0.25)	إذن: $I=\left(\frac{19\lambda^3}{18}-2\lambda^2+\frac{\lambda^3}{3}\ln\lambda-\frac{4}{9}-\frac{8}{3}\ln 2\right)cm^2$.

العلامة	الموضوع الثاني –التصحيح المفصّل-

التمرين الأول: (4نقاط)

D_1 وَ D_2 زهرتي نرد، النرد D_1 مغشوش وَله كل وجهين يحملان نفس الرقم k حيث: $k \in \{1;2;3\}$. نرمز بـ u_k إحتمال ظهور الوجه الذي يحمل الرقم k.

1) حساب u_1، u_2 وَ u_3، علمًا أنّ هذه الأعداد تُشكّل حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها $\frac{1}{4}$:

بما أنّ u_1، u_2 وَ u_3 عبارة عن حدود متتابعة لمتتالية حسابية، فإنّ: u_2 هو الوسط الحسابي.

من جهة أخرى فإنّ: $u_1+u_2+u_3=3$، وَعليه لدينا الجملة: $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=1 \\ u_1+u_3=2u_2 \end{cases}$

فينتج: $3u_2=1$، وَمنه: $u_2=\frac{1}{3}$. (0.25ن)

وَمن جهة أخرى وبما أنّ الأساس هو $r=\frac{1}{4}$، وَبما أنّ: $u_1=u_2-r=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$.

إذن: $u_1=\frac{1}{12}$. (0.25ن)

وَيكون: $u_1=u_2+r=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$، إذن: $u_2=\frac{7}{12}$. (0.25ن)

2) النرد D_2 ليس مغشوش وَله كل ثلاث وجوه تحمل نفس الرقم p حيث: $p \in \{1;2\}$. نرمز بـ v_p إحتمال ظهور الوجه الذي يحمل الرقم p.

- **حساب v_1 وَ v_2:**

بما أنّ النرد D_2 ليس مغشوش، فنحن في حالة تساوي الإحتمالات وَعليه فإنّ:

$v_1=v_2=\frac{card\{1;1;1\}}{card\Omega}=\frac{card\{1;1;1\}}{card\Omega}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$، إذن: $v_1=v_2=\frac{1}{2}$. (0.25ن)

3) نرمي النردين D_1 وَ D_2 في آنٍ واحد، وَنعتبر المتغيّر العشوائي X الذي يُساوي جداء رقمي الوجهين العلويين للنردين D_1 وَ D_2 بعد السقوط.

أ-تعريف قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X: نُوضّح في الجدول أدناه النتائج:

D_2 \ D_1	1	1	2	2	3	3
1	1	1	2	2	3	3
1	1	1	2	2	3	3
1	1	1	2	2	3	3
2	2	2	4	4	6	6
2	2	2	4	4	6	6
2	2	2	4	4	6	6

وَعليه فإنّ قيّم المتغيّر العشوائي X: $X(\Omega)=\{1;2;3;4;6\}$. (0.25ن)

أما قانون الإحتمال للمتغيّر العشوائي X: (1.5ن)

X_i	1	2	3	4	6	$\sum$
P_i	$\frac{6}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{36}{36}=1$

ب-حساب $\sigma(2024-1445X)$:

نعلم أنّ: الإنحراف المعياري مُعطى بالعلاقة: $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$، وَ $V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$. (0.25ن)

الجدول أدناه يُساعدنا، حيث:

X_i	1	2	3	4	6	$\sum$
P_i	$\frac{6}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{36}{36}=1$
$X_i \times P_i$	$\frac{6}{36}$	$\frac{24}{36}$	$\frac{18}{36}$	$\frac{24}{36}$	$\frac{36}{36}$	$\frac{108}{36}=3$
${X_i}^2$	1	4	9	16	36	
${X_i}^2 \times P_i$	$\frac{6}{36}$	$\frac{48}{36}$	$\frac{54}{36}$	$\frac{96}{36}$	$\frac{216}{36}$	$\frac{420}{36}=\frac{35}{3}$

إذن: $V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\sum {X_i}^2\times P_i-[\sum X_i\times P_i]^2=\frac{35}{3}-3=\frac{8}{3}$. (ن0.25)

وَيكون: $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{8}{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$. (ن0.25)

من جهة أخرى، نعلم أنّ: $\begin{cases}\sigma(X+b)=\sigma(X)\\ \sigma(aX)=|a|\sigma(X)\end{cases}$.

فيكون: $\sigma(2024-1445X)=\sigma(-1445X)=|-1445|\sigma(X)$. (ن0.25)

إذن: $\sigma(2024-1445X)=1445\times\frac{2\sqrt{6}}{3}=\frac{2809\sqrt{6}}{3}$. (ن0.25)

التمرين الثاني: لتكن (t_n) متتالية هندسية متزايدة تمامًا معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: (4نقاط)

$$\begin{cases}t_0+t_1+t_2=7\ln 2\ldots\ldots(1)\\ t_0\times t_1\times t_2=8(\ln 2)^3\ldots.(2)\end{cases}$$

1) حساب الحدود t_1 ثُمّ t_0 وَ t_2:

بما أنّ (t_n) هندسية، وَالحدود t_0، t_1 وَ t_2 متتابعة منها، فإنّ: t_1 هو الوسط الهندسي الذي يُحقّق:

$t_1^{\,2}=t_0\times t_2$ وَمنه، وَبالتعويض في (2) نجد: $t_1^{\,3}=8(\ln 2)^3=(2\ln 2)^3$.

وَهذا يُكافئ أنّ: $t_1=2\ln 2=\ln 4$. (ن0.25)

من جهة أخرى، وَبتعويض t_1 بـ $2\ln 2$ في كل من (1) وَ (2)، نحصل على الجملة التالية:

$$\begin{cases}t_0+t_2=7\ln 2-2\ln 2=5\ln 2\ldots\ldots(1)\\ t_0\times t_2=(2\ln 2)^2=4(\ln 2)^2\ldots\ldots\ldots(2)\end{cases}$$

وَتؤول حل هذه الجملة إلى حل المعادلة: $x^2-Sx+P=0$، حيث: $S=5\ln 2$ وَ $P=4(\ln 2)^2$.

أي: $x^2-x(5\ln 2)+4(\ln 2)^2=0$ ، لنحسب المميّز Δ.

$\Delta=(5\ln 2)^2-4\times 1\times 4(\ln 2)^2$

وَمنه فإنّ: $\Delta=25(\ln 2)^2-16(\ln 2)^2=9(\ln 2)^2=(3\ln 2)^2>0$

المعادلة إذن تقبل حلان متمايزان هما: (ن0.25)

$$\begin{cases}x'=\frac{5\ln 2-3\ln 2}{2}=\ln 2\\ x'=\frac{5\ln 2+3\ln 2}{2}=4\ln 2\end{cases}$$ (ن0.25)

وَعليه إما: $(t_0;t_1;t_2)=(4\ln 2;2\ln 2;\ln 2)$ ، مرفوض، لأنّ: المتتالية (t_n) متزايدة تمامًا. (ن0.25)

أَوْ $(t_0;t_1;t_2)=(\ln 2;2\ln 2;4\ln 2)$ ، مقبول، لأنّ: المتتالية (t_n) متزايدة تمامًا. (ن0.25)

2) إستنتاج الأساس q للمتتالية (t_n): حسب السؤال الأول، فإنّ: $q=\frac{t_1}{t_0}=\frac{2\ln 2}{\ln 2}=2$ ، أي: $q=2$. • أكتبي t_n بدلالة n: بما أنّ المتتالية (t_n) هندسية، فمن عبارة الحد العام: $t_n=t_0\times q^n=2^n(\ln 2);\forall n\in\mathbb{N}$.	(0.25ن) (0.25ن)
3) إيجاد أصغر قيمة للعدد الطبيعي n الذي يُحقق: $t_n>\ln 2^{2974}$: $t_n\geq \ln 2^{2974}$ تُكافئ -حسب خواص اللوغاريتم النيبيري- وَحسب السؤال الثاني فإنّ: $2^n(\ln 2)\geq \ln 2^{2974}=2974(\ln 2)$ ، وَهذا يعني أنّ: $2^n\geq 2974$ ، أي وَبتطبيق خواص اللوغاريتم النيبيري: $n\ln 2\geq \ln 2974$ ، إذن: $n\geq \frac{\ln 2974}{\ln 2}\simeq 11.53$. وَمنه قيمة $n=12$.	(0.25ن) (0.25ن)
4) أ- حساب المجموع S_n بدلالة n: $S_n=t_0+t_1+\ldots+t_n$: بما أنّ المتتالية (t_n) هندسية فإنّ: $S_n=t_0\times\frac{q^{n+1}-1}{q-1}=\ln 2\times\frac{2^{n+1}-1}{2-1}$. إذن: $S_n=(2^{n+1}-1)\ln 2;\forall n\in\mathbb{N}$. • **حساب الجداء P_n بدلالة n: $P_n=t_0\times t_1\times\ldots\times t_n$:** لدينا: $P_n=t_0\times t_1\times\ldots\times t_n=2^0(\ln 2)\times 2^1(\ln 2)\times\ldots\times 2^n(\ln 2)$. وَحسب قواعد القوى، فإنّ: $P_n=2^{(0+1+\ldots+n)}(\ln 2)^{n+1}=2^{\frac{n(n+1)}{2}}(\ln 2)^{n+1}$. **ملاحظة:** نلاحظ أنّ: حيث: n $u_n=n+1$ وَ $u_{n+1}=n+1$ من الشكل: $u_{n+1}=n+r$ ، مما يعني أنّ المتتالية (u_n) حسابية وَأساسها $r=1$ ، إذن: $0+1+2+\cdots+n=u_0+u_1+\cdots+u_n=\frac{n-0+1}{2}\times(u_0+u_n)$ ، وَمنه: $0+1+2+\ldots+n=\frac{n+1}{2}\times(0+n)=\frac{n(n+1)}{2}$.	(0.25ن) (0.25ن) (0.25ن)
ب- إستنتاج S'_n بدلالة n حيث: $S'_n=\ln(t_0)+\ln(t_1)+\ldots+\ln(t_n)$: لدينا وَحسب خواص اللوغاريتم النيبيري: $S'_n=\ln(t_0)+\ln(t_1)+\ldots+\ln(t_n)=\ln(t_0\times t_1\times\ldots\times t_n)=\ln P_n$ وَمنه، وَحسب السؤال -أ- فإنّ: $S'_n=ln\left[2^{\frac{n(n+1)}{2}}(\ln 2)^{n+1}\right]$.	(0.25ن)
جـ- حساب S''_n بدلالة n حيث: $S''_n={t_0}^{2024}+{t_1}^{2024}+\ldots+{t_n}^{2024}$: لدينا: $S''_n={t_0}^{2024}+{t_1}^{2024}+\ldots+{t_n}^{2024}=v_0+v_1+\cdots+v_n$. حيث: $v_n={t_n}^{2024}=[2^n(\ln 2)]^{2024}=2^{2024n}(\ln 2)^{2024}$. نلاحظ أنّ: $v_{n+1}=2^{2024n}(\ln 2)^{2024}\times 2^{2024}=v_n\times 2^{2024}$ ، مما يعني أنّ: (v_n) متتالية هندسية أساسها: $q'=2^{2024}$ وَحدّها الأول: $v_0=(\ln 2)^{2024}$ ، وَمنه: $S''_n=v_0\times\frac{q'^{n+1}-1}{q'-1}=(\ln 2)^{2024}\left[\frac{2^{2024(n+1)}-1}{2^{2024}-1}\right]$.	(0.25ن) (0.25ن) (0.25ن)
التمرين الثالث: (5نقاط) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$، نعتبر النقط A ، B وَ C التي لاحقاتها على الترتيب: $Z_A=-1+\sqrt{3}i$ ، $Z_B=\overline{Z_A}$ وَ $Z_C=2$. **1) أ- كتابة العدد المركب: $\frac{Z_B-Z_C}{Z_A-Z_C}$ على الشكل الأسي:** نضع: $Z=\frac{Z_B-Z_C}{Z_A-Z_C}$ ، وَمنه: $Z=\frac{-1-\sqrt{3}i-2}{-1+\sqrt{3}i-2}=\frac{-3-\sqrt{3}i}{-3+\sqrt{3}i}=\frac{-\sqrt{3}(\sqrt{3}+i)}{-\sqrt{3}(\sqrt{3}-i)}=\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\times\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i}=\frac{3+2\sqrt{3}i-1}{3+1}$. إذن: $Z=\frac{2+2\sqrt{3}i}{4}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. حيث: $|Z|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$.	(0.25ن) (0.25ن)

(ن0.25) (ن0.25)	وَلتكن: $\begin{cases} cos\theta = \frac{1}{2} \\ sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \longrightarrow arg(Z) = \theta$ ، وَمنه: $arg(Z) = \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$. إذن: $Z = \left[1; \frac{\pi}{3}\right]$، أي: $Z = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
(ن0.25) (ن0.25) (ن0.25)	**ب- إستنتاج طبيعة المثلث ABC :** حسب السؤال -أ- فإنّ: $Z = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، وَهذا يُكافئ أنّ: وَمنه فإنّ: $\begin{cases} \left\|\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C}\right\| = 1 \\ arg\left(\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} BC = AC \\ (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$. وَهذا يعني أنّ المثلث ABC متقايس الأضلاع.
(ن0.25) (ن0.25)	**جـ-تعيين ω مركز وَنصف قطر الدائرة (Υ) المحيطة بالمثلث ABC:** نلاحظ أنّ: $\|Z_A\| = \sqrt{1+3} = 2 = \|Z_B\| = \|Z_C\|$، وَهذا يُكافئ أنّ: $OA = OB = OC = 2$. إذن: النقط A، B وَ C تنتمي إلى نفس الدائرة (Υ) التي مركزها المبدأ O وَنصف قطرها 2.
(ن0.25) (ن0.25) (ن0.25)	**2) أ- تعيين طبيعة وَعناصر المجموعة (Γ) للنقط $M(Z)$ التي تُحقق: $Z\bar{Z} + 2(Z + \bar{Z}) = 0$:** بوضع: $\begin{cases} Z = x + iy \\ \bar{Z} = x - iy \end{cases}$ مع x وَ y عددان حقيقيان، يكون إذن: $Z\bar{Z} + 2(Z + \bar{Z}) = 0$ ، أي: $(x + iy)(x - iy) + 2(x + iy + x - iy) = x^2 + y^2 + 2x$. من الشكل: $(x+2)^2 + y^2 = 4$ ، إذن: (Γ) عبارة عن دائرة مركزها $\Omega(-2; 0)$ وَنصف القطر 2.
(ن0.25) (ن0.25)	**ب-التحقق أنّ النقطتين A وَ B تنتميان إلى المجموعة (Γ) :** لدينا: $\begin{cases} \Omega A = \|Z_A - Z_\Omega\| = \|-1 + \sqrt{3}i - (-2)\| = \|1 + \sqrt{3}i\| = 2 \\ \Omega B = \|Z_B - Z_\Omega\| = \|-1 - \sqrt{3}i - (-2)\| = \|-1 + \sqrt{3}i\| = 2 \end{cases}$ وَهذا يعني أنّ: A وَ B تنتميان إلى المجموعة (Γ) .
(ن0.25) (ن0.25)	3) ليكن r الدوران الذي مركزه النقطة A وَزاويته $\frac{\pi}{3}$. **أ- تعيين صورة النقطة B بالدوران r:** لدينا: $\begin{cases} r(B) = B' \\ r(A) = A \end{cases}$ وَمنه: $\begin{cases} Z_{B'} = aZ_B + b \\ Z_A = aZ_A + b \end{cases}$، فينتج: $a = \frac{Z_{B'} - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$. إذن: $Z_{B'} - Z_A = a(Z_B - Z_A)$ ، وَمنه: $Z_{B'} = Z_A + a(Z_B - Z_A)$. أي: $Z_{B'} = -1 + \sqrt{3}i + (\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2})(-1 - \sqrt{3}i + 1 - \sqrt{3}i)$. وَمنه: $Z_{B'} = -1 + \sqrt{3}i + (\frac{1+i\sqrt{3}}{2})(-2\sqrt{3}i) = -1 + \sqrt{3}i - \sqrt{3}i + 3$.
(ن0.25)	إذن: $Z_{B'} = Z_C = 2$.
(ن0.25)	**ب-تعيين Z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران r:** لدينا: $r(C) = D$، وَحسب السؤال -أ- فإنّ: $Z_D = Z_A + a(Z_C - Z_A)$ ، وَمنه: $Z_D = -1 + \sqrt{3}i + (\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2})(2 + 1 - \sqrt{3}i) = -1 + \sqrt{3}i + \frac{(1+i\sqrt{3})(3-\sqrt{3}i)}{2}$. أي: $Z_D = -1 + \sqrt{3}i + \frac{3+3\sqrt{3}i-\sqrt{3}i+3}{2} = -1 + \sqrt{3}i + 3 + \sqrt{3}i$. إذن: $Z_D = 2 + 2\sqrt{3}i$.
	جـ-إستنتاج طبيعة الرباعي $ABCD$:

(0.25ن) لدينا: $\begin{cases} Z_{\overrightarrow{CD}} = Z_D - Z_C = 2 + 2\sqrt{3}i - 2 = 2\sqrt{3}i \\ Z_{\overrightarrow{BA}} = Z_A - Z_B = -1 + \sqrt{3}i + 1 + \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}i \end{cases}$، أي: $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$.

وَمنه: الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

(0.25ن) وَمن جهة أخري فإنّ: $r(B) = C$ وَ $r(C) = D$، معناه أنّ: $BC = CD$.

(0.25ن) إذن: متوازي الأضلاع $ABCD$ معين.

د-تعيين صورة النقطة Ω بالدوران r:

حسب السؤال 2-أ- فإنّ: $\Omega(-2;0)$ وَهذا يُكافئ أنّ: $Z_\Omega = -2$.

لدينا: $r(\Omega) = \Omega'$، وَحسب السؤال -أ- فإنّ: $Z_{\Omega'} = Z_A + a(Z_\Omega - Z_A)$ ، وَمنه:

$$Z_{\Omega'} = -1 + \sqrt{3}i + (\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2})(-2 + 1 - \sqrt{3}i) = -1 + \sqrt{3}i + \frac{(1+i\sqrt{3})(-1-\sqrt{3}i)}{2}$$

$$Z_{\Omega'} = -1 + \sqrt{3}i + \frac{-1-2\sqrt{3}i+3}{2} == -1 + \sqrt{3}i + 1 - \sqrt{3}i = 0$$ أي:

(0.25ن) إذن: $Z_{\Omega'} = 0$ ، أي: $r(\Omega) = O$.

- **إستنتاج صورة المجموعة (Γ) بالدوران r:**

(0.25ن) لدينا: $\begin{cases} r(B) = C \\ r(\Omega) = O \end{cases}$، معناه أنّ: صورة الدائرة (Γ) بالدوران r هي الدائرة (γ).

(7نقاط) **التمرين الرابع:**

I) نعتبر الدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 - (x^2+1)e^{-x}$:

1) دراسة تغيّرات الدالة g:

مجموعة التعريف: من المعطيات: $D_g = \mathbb{R}$.

النهايات:

(0.25ن) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} [1 - (x^2+1)e^{-x}] = -\infty$،

لأنّ: $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2+1)e^{-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{e^x} = +\infty$ وَ $\lim\limits_{x\to-\infty} -(x^2+1) = -\infty$.

(0.25ن) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} [1 - (x^2+1)e^{-x}] = 1$،

لأنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+1)e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{e^x} = 0$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$، $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$.

الإشتقاقية: g معرّفة وَقابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ وَدالتها المشتقة:

$$g'(x) = -2xe^{-x} + (x^2+1)e^{-x} = (-2x + x^2 + 1)e^{-x} = (x-1)^2e^{-x}$$

(0.25ن) أما إشارتها فهي موجبة تمامًا على $\mathbb{R}$ لأنّ: $e^{-x} > 0; (x-1)^2 > 0$، من أجل كل عدد حقيقي x ،

(0.25ن) إذن: g متزايدة تمامًا على $\mathbb{R}$.

جدول تغيّرات الدالة g :

(0.25ن)

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$+$
$g(x)$	$-\infty$ ↗	1	

$g(1) = 1 - 2e^{-1}$.

2)حساب $g(0)$:

(0.25ن) $g(0) = 1 - 1 = 0$.

(ن0.25)	**استنتاج إشارة $g(x)$:** حسب ما سبق، فإنّ: x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ $g(x)$ | $-$ | 0 | $+$
(ن0.25)	**II) نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x-1+(x^2+2x+3)e^{-x}$:** **أ- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[x-1+(x^2+2x+3)e^{-x}]=+\infty.$ لأنّ: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} x-1=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0\end{cases}$
(ن0.25)	**ب-التحقق أنّ المستقيم $(D): y=x-1$ مستقيم مقارب مائل للبيان (C_f) عند$(+\infty)$:** $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^2+2x+3)e^{-x}]=0.$ لأنّ: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0\end{cases}$ وَمنه: المستقيم $(D): y=x-1$ مستقيم مقارب مائل للبيان (C_f) عند$(+\infty)$.
(ن0.25) (ن0.25)	**جـ-دراسة الوضعية النسبية:** أي ندرس إشارة: $f(x)-y$ ،حيث: $f(x)-y=f(x)-(x-1)=(x^2+2x+3)e^{-x}>0;\forall x\in\mathbb{R}$ لأنّ: $(\Delta=4-12=-9<0)$ ،$(x^2+2x+3)>0$ ،وَ$e^{-x}>0$، من أجل كل عدد حقيقي. إذن: $f(x)-(x-1)>0;\forall x\in\mathbb{R}$. أي: البيان (C_f) يقع فوق المقارب المائل (D).
(ن0.25)	**2) أ- إثبات أنّه من أجل كل عدد حقيقي x فإنّ: $f(x)=\frac{x^2+2x+3+xe^x-e^x}{e^x}$:** لدينا: $f(x)=x-1+(x^2+2x+3)e^{-x}=x-1+\frac{x^2+2x+3}{e^x}$. إذن: $f(x)=\frac{(x-1)e^x+x^2+2x+3}{e^x}=\frac{x^2+2x+3+xe^x-e^x}{e^x}$.
(ن0.25)	**ب-حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:** حسب السؤال -أ- فإنّ: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x+3+xe^x-e^x}{e^x}=+\infty$. لأنّ: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+2x+3)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0\end{cases}$.
	3) أ-كتابة $f'(x)$ بدلالة $g(x)$ ،حيث: f' هي الدالة المشتقة للدالة f: f معرّفة وَقابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ كمجموع وَجداء دوال قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ،وَدالتها المشتقة:

$f'(x) = 1 + (2x+2)e^{-x} - (x^2+2x+3)e^{-x}$

أي: $g(x) = 1 + (-x^2-1)e^{-x} = 1 - (x^2+1)e^{-x}$. $f'(x)$ (0.25ن)

ب-استنتج إتجاه تغيّر الدالة f:

حسب السؤال -أ- فإنّ إشارة $f'(x)$ هي نفسها إشارة $g(x)$ وَحسب الجزء I) فإنّ: (0.25ن)

$f'(x) < 0$ من أجل $x \in]-\infty; 0[$ ،وَمنه: f متناقصة تمامًا على $]-\infty; 0[$. (0.25ن)

$f'(x) > 0$ من أجل $x \in]0; +\infty[$ ،وَمنه: f متزايدة تمامًا على $]0; +\infty[$.

- **تشكيل جدول تغيّرات الدالة f:** (0.25ن)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$-$		0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(0)$	↗	$+\infty$

مع: $f(0) = -1 + 3 = 2$.

4) لتكن الدالة h المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = f(x) - x$، وَالمستقيم $(d): y = x$.

أ- إثبات أنّ المعادلة: $h(x) = 0$ تقبل حلًا وحيدًا α حيث: $2 < \alpha < 3$.

h معرّفة وَقابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ كمجموع دالتين قابلتين للإشتقاق على $\mathbb{R}$ وَدالتها المشتقة: (0.25ن)

$h'(x) = f'(x) - 1 = g(x) - 1 = -(x^2+1)e^{-x} < 0; \forall x \in \mathbb{R}$

وَعليه، فإنّ: h متناقصة تمامًا على $]2; 3[$ كجزء من $\mathbb{R}$ حيث: $\begin{cases} h(2) \simeq 0.48 > 0 \\ h(3) \simeq -0.11 < 0 \end{cases}$. (0.25ن)

فينتج: $h(2) \times h(3) < 0$ ، إذن: وَحسب مبرهنة القيّم المتوسطة، فإنّه يوجد حل وحيد $\alpha \in]2; 3[$ (0.25ن)

يُحقق: $h(\alpha) = 0$.

ب-إستنتاج الوضعية النسبية للبيان (C_f) بالنسبة إلى (d):

لدينا: $h(x) = f(x) - x$ ، وَمن دراسة إشارتها تساعدنا على معرفة الوضعية النسبية للبيان (C_f) بالنسبة إلى (d) وَحسب السؤال -أ- فإنّ: (0.25ن)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	

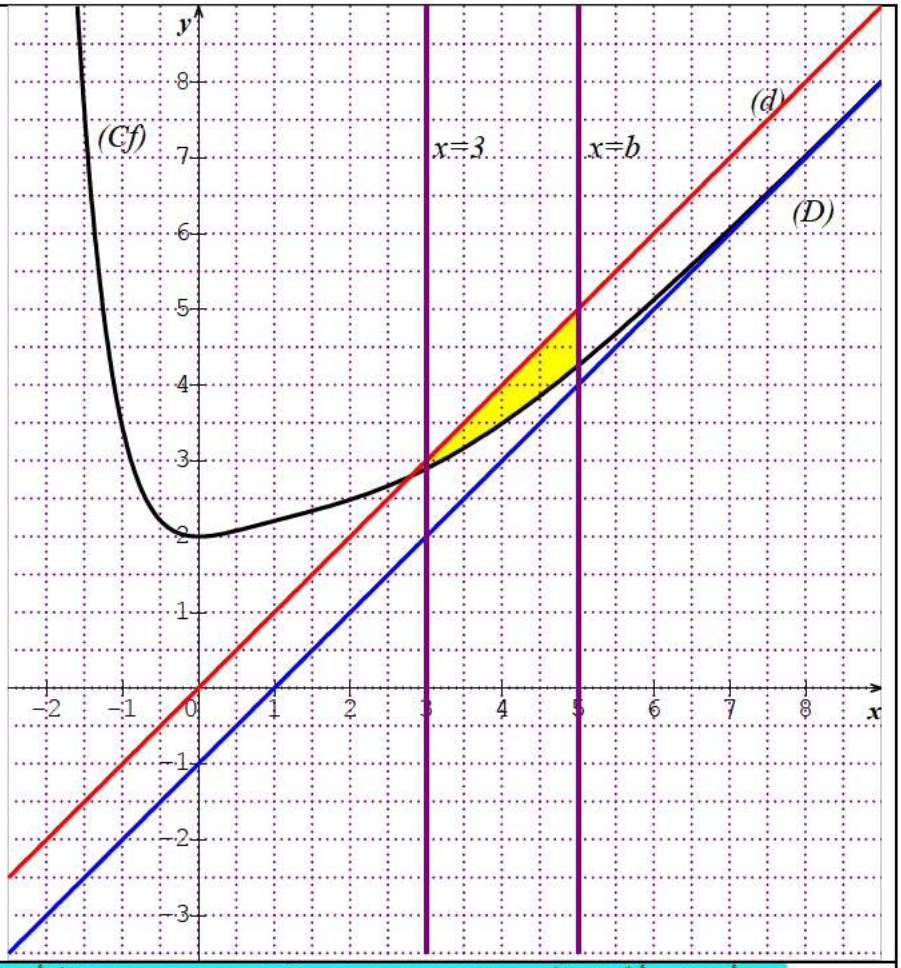
أي أنّ: (C_f) يقع أعلى (d) لما $x \in]-\infty; \alpha[$ ، وَيقع أسفل (d) لما $x \in]\alpha; +\infty[$.

وَ $(C_f) \cap (d) = \{(\alpha; 0)\}$.

5) حساب $f\left(-\frac{3}{2}\right)$: $f\left(\frac{-3}{2}\right) \simeq 7.58$.

- **رسم المستقيمين (D)، (d) وَالبيان (C_f) على $\left]\frac{-3}{2}; +\infty\right[$:**

(ن0.25)
(ن0.25)



6) أ- بيّني أنّ الدالة: $x \mapsto (x^2+2x+2)e^{-x}$ هي دالة أصلية للدالة: $x \mapsto -x^2e^{-x}$:

الدالة معرّفة وَقابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ كجداء دالتين قابلتين للإشتقاق، حيث:

$$(2x+2)e^{-x}-(x^2+2x+2)e^{-x}=(2x+2-x^2-2x-2)e^{-x}=-x^2e^{-x}$$

وَهو المطلوب. (ن0.25)

ب-باستعمال التكامل بالتجزئة، أحسبي بدلالة العدد الحقيقي x ، التكامل: $\int xe^{-x}dx$:

لدينا: $\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=e^{-x} \end{cases}$ وَمنه: $\begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=-e^{-x} \end{cases}$، إذن: $I=\int xe^{-x}dx=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx$. (ن0.25)

أي: $I=\int xe^{-x}dx=-xe^{-x}-e^{-x}+c=-(x+1)e^{-x}+c$.

جـ- حساب بدلالة β ، مساحة الحيّز للمستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) وَالمستقيم (d) وَالمستقيمين ذو المعادلتين: $x=3$ وَ $x=\beta$ ، حيث: $\beta>4$:

بما أنّ البيان (C_f) يقع أسفل المستقيم (d) على المجال $]3;+\infty[$ ،

فإنّ: $\mathcal{A}(\beta)=\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|\int_3^\beta[x-f(x)]dx$.

أي: $\mathcal{A}(\beta)=1\times1\int_3^\beta(x-x+1-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-3e^{-x})dx$ ، وَمنه: (ن0.25)

$\mathcal{A}(\beta)=\int_3^\beta(-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-3e^{-x}+1)dx$ ، وَحسب -ب- وَ-جـ- فإنّ:

$\mathcal{A}(\beta)=[(x^2+2x+2)e^{-x}+2(x+1)e^{-x}+3e^{-x}+x]_3^\beta$، أي:

$\mathcal{A}(\beta)=[(x^2+4x+7)e^{-x}+x]_3^\beta$ ، فينتج: (ن0.25)

$\mathcal{A}(\beta)=\left[(\beta^2+4\beta+7)e^{-\beta}+\beta-28e^{-3}-3\right](cm^2)$. (ن0.25)