الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

مدرية التربية لولاية باتنة
إمتحان بكالوريا تجربية
الشعبة : علوم تجريبية

ثانوية محمد العيد الخليفة

دورة ماي 2024

إختبار في مادة : الراضيات

المدة : 3 سا 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

## الموضوع الأول

**التمرين الأول : 04 نقاط**

$(u_n)$ متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0 = \frac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1} = \frac{2u_n^2}{4u_n + 1}$ .

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $0 \le u_n \le \frac{1}{2}$ .
2. أدرس إتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ ثم أستنتج أنها متقاربة .
3. نعتبر المتتالية $(v_n)$ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $v_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2u_n}\right)$ .

أ) بين أن المتتالية $(v_n)$ هندسية أساسها 2 يطلب تعيين حدها الأول .

ب) أكتب $(v_n)$ بدلالة $n$ ثم استنتج عبارة $u_n$ بدلالة $n$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$

بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $P_n = \left(\frac{2u_0 + 1}{2u_0}\right) \times \left(\frac{2u_1 + 1}{2u_1}\right) \times \ldots\ldots \times \left(\frac{2u_n + 1}{2u_n}\right) = 2^{(2^{n+1}-1)}$

**التمرين الثاني : 04 نقاط**

نعتبر صندوقين متماثلين $u_1$ و $u_2$ حيث يحتوي الصندوق على خمس كرات حمراء مرقمة 1، 1، 1، 2 ،0 و ثلاث كرات خضراءتحمل الأرقام 1 ، 1 ، 0 . و يحتوي الصندوق $u_2$ على ثلاث كرات حمراء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 2 و كرتين خضراوين تحملان الرقمين 1 ، 0 , (كل الكرات لا نفرق عند اللمس ).

I. نختار عشوائيا أحد الصندوقين فإذا كان $u_1$ نسحب منه كرتين على التوالي بدون إرجاع و إذا كان $u_2$ نسحب منه كرتين على التوالي بإرجاع

1. أحسب إحتمال الحوادث التالية :

$A$ : " سحب كرتين من نفس اللون " . $B$ : " سحب كرتين تحملان نفس الرقم ",

$C$ : " سحب كرة حمراء على الأقل "

2. هل الحادثتان $A$ و $B$ مستقلتان ؟ علل .
3. إذا علمت أن الكرتين المسحوبتين من لونين مختلفين فماهو إحتمال أن تكونا من الصندوق $u_y$

II. نأخذ الكرات الموجودة في الصندوقين $u_1$ و $u_2$ و نضعها جميعا في صندوق واحد $u_3$ نسحب عشوائيا من الصندوق $u_3$ كرتين في أن واحد .

و ليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة مجموع الأرقام التي تحملها الكرتين المسحوتين .

1. عين قيم المتغير العشوائي $X$.
2. عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي $X$ . ثم أحسب أمله الرياضياتي .

**التمرين الثالث: 05 نقاط**

1.1. حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة : $z^2 - 2z + 5 = 0$

2. استنتج حلول المعادلة $(z^2 + 1)^2 - 2z^2 + 3 = 0$



Scanned with CamScanner
www.dzexams.com

II.المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ,

لتكن النقط $A$ ، $B$ ، $C$ ، $D$ و $E$ لواحقها على الترتيب $z_A=1+2i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=-1-i$ ، $z_D=\overline{z_C}$ و $z_E=-z_C$

1. ا) اثبت أن $\left(\frac{\sqrt{2}z_A}{z_A+z_B+z_E}\right)^{2021}=\frac{z_C}{\sqrt{2}}$

ب) عين قيم العدد الطبيعي $n$ حتي يكون العدد $\left(\frac{z_E}{\sqrt{2}}\right)^n$ تخيلي صرف .

2. عين زاوية الدوران $r$ الذي مركزه $D$ و يحول $C$ إلى $E$ .

3. أ) أكتب العدد $\frac{z_A-z_B}{z_D-z_C}$ على الشكل الجبري .

ب) استنتج وجود تحويل نقطي $T$ يحول $D$ إلى $A$ و يحول $C$ إلى $B$ يطلب تعين طبيعته و عناصره المميزة

4. أ) عين $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ التي لاحقتها $z$ حتى يكون العدد $\frac{z_E-z}{z_C-z}$ تخيلي صرف ثم أحسب مساحته

ب) عين $(\Gamma')$ صورة $(\Gamma)$ بالتحويل $T$ ثم إستنتج مساحة $(\Gamma')$.

**التمرين الرابع : 07 نقاط**

I. $g$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=1+(2x^2-1)e^{1-x^2}$

1. أ) بين أن الدالة $g$ زوجية ثم فسر النتيجة بيانيا .

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ ثم إستنتج $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ .

2. أ) بين أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $g'(x)=2x(3-2x^2)e^{1-x^2}$ .

ب) أدرس إتجاه تغير الدالة $g$ على $[0;+\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها على $[0;+\infty[$ .

ج) إستنتج إتجاه تغير الدالة $g$ على $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيراتها $\mathbb{R}$ .

3. أ) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد $\alpha$ حيث : $0.51<\alpha<0.52$ .

ب) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II. $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x\left(1-e^{1-x^2}\right)$ .

و ليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. بين أنه من أجل $x$ من $\mathbb{R}$ : $f(x)+f(-x)=0$ ثم فسر النتيجة بيانيا .

2. بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ . ثم إستنتج $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ .

3. أ) بين أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $f'(x)=g(x)$ .

ب) أدرس اتجاه تغير الدالة $f$ على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها .

ت) بين أن المنحنى $(C_f)$ يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعينها .

4. بين أن المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ عند $+\infty$ ثم استنتج $(\Delta')$ المستقيم المقارب المائل للمنحنى $(C_f)$ عند $-\infty$

5. تحقق أن معادلة المماس $(T)$ لـ $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=0$ هي $y=(1-e)x$ .

6. ارسم المستقيمات $(T)$ ، $(\Delta)$ و $(\Delta')$ و المنحنى $(C_f)$ .

7. بين أن $(C_f)$ يقبل مماسين متناضرين و يوازيان المستقيم $(\Delta)$ . عين معادلة كل منهما ثم أرسمهما .

8. عين حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)=x+m$ .

**إنتهي الموضوع الأول**



Scanned with CamScanner
www.dzexams.com

## الموضوع الثاني :

### التمرين الأول : 4 نقاط

$f$ الدالة المعرفة على $]-\infty;1]$ بـ : $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$ .

1. أ) أدرس إتجاه تغير الدالة $f$ على $]-\infty;1]$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .

ب) استنتج أنه من أجل كل $x$ من $]-\infty;1]$ فإن $f(x)\in]-\infty;1]$

2. نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة بـ : $u_0=2$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1}=f(u_n)$ .

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n\geq 1$ .

ب) بين أن المتتالية $(u_n)$ متناقصة ثم استنتج أنها متقاربة .

3. نعتبر المتتالية $(v_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$

أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $v_{n+1}=(v_n)^2$

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $0<v_n<\left(\frac{1}{3}\right)^n$ ، ثم استنتج نهاية المتتالية $(v_n)$ ثم نهاية المتتالية $(u_n)$

4. نعتبر المتتالية $(w_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $w_n=\frac{1}{v_0}+\frac{1}{v_1}+...+\frac{1}{v_n}$ ، أحسب نهاية المتتالية $(w_n)$ .

5. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $v_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{2^n}$ ثم استنتج عبارة $u_n$ بدلالة $n$.

6. أحسب بدلالة $n$ الجداء $t_n=v_0\times v_1\times...\times v_n$ ثم إستنتج نهاية $t_n$

### التمرين الثاني :04 نقاط

يحتوي صندوق على8 كرات لا نفرق بينها باللمس، كريتان تحملان الرقم 0 وأربع كريات تحملان الرقم 2 وكرية تحمل الرقم 1 و كرية تحمل الرقم 4 .
نسحب عشوائيا و في أن واحد 3 كريات من الصندوق .
نعتبر الحادثتين :
$A$ : " الكريات المسحوبة مجموع أرقامها يساوي 6 "
$B$ : " الكريات المسحوبة جداء أرقامها 8 " .

1. أحسب $P(A)$ ، $P(B)$ إحتمال الحادثتين $A$ و $B$ على الترتيب .
2. أحسب $P(A\cap B)$ هل الحادثتان $A$ و $B$ مستقلتان . برر ،جابتك .
3. إستنتج $P_A(B)$ ثم $P(\overline{A\cap B})$ .
4. ليكن المتغير العشوائي $X$ الذي يرفق بكل عملية سحب جداء أرقام الكرات المسحوبة .
عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي $X$. ثم أحسب $E(X)$ أمله الرياضي .

### التمرين الثالث : 05 نقاط

المستوي المركب منسوب إلي المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{v})$ )( حدة الرسم $2cm$ )
نرمز بـ $J$ للنقطة ذات اللاحقة $i$ .

1. نعتبر النقط $A$ ، $B$ ، $C$ و $H$ لواحقها على الترتيب $z_A=-3-i$ ، $z_B=-2+4i$ ، $z_C=3-i$ و $z_H=-2$ , علم هذه النقط على الرسم ,
2. بين أن النقطة $J$ مركز الدائرة المحيطة بالمثلث $ABC$ .



Scanned with CamScanner
www.dzexams.com

3. أكتب الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{z_B - z_C}{z_H - z_A}$ إستنتج أن المستقيمين $(AH)$ و $(BC)$ متعامدان

في بقية الرسم نقبل أن $H$ هي نقطة تقطع إرتفاعات المثلث $ABC$ .

4. نرمز بـ $G$ إلى مركز ثقل المثلث $ABC$ ، عين $g$ لاحقة $G$ ثم علم النقطة $G$ على الرسم
5. بين أن النقط $J$ ، $H$ و $G$ في إستقامية و تحقق من ذلك في الرسم ,
6. نرمز بـ $A'$ إلى منتصف القطعة $[BC]$ لاحقتها $z_{A'} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ و بـ $K$ إلى منتصف القطعة $[AH]$

أ) عين $z_k$ لاحقة النقطة $K$ ,

ب) بين أن الرباعي $KHA'J$ متوازي أضلاع ,

## التمرين الرابع :7 نقاط

**I.** $g$ الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = \ln x + \frac{1}{x}$ .

1. أدرس اتجاه تغير الدالة $g$ .
2. أ) استنتج إشارة $g(x)$ في المجال $]0;+\infty[$

ب) بين أنه من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ : $g\left(1+\frac{2}{x}\right) > 0$ .

**II.** $f$ الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ :

$$\begin{cases} f(x) = x - 3 + x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right); & x > 0 \\ f(0) = -3 \end{cases}$$

و ليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ) بين أن $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -3$ . ماذا نستنتج ؟

ب) هل الدالة $f$ قابلة للإشتقاق عند 0 من اليمين ؟ اعطي تفسيرا هندسيا للنتيجة .

2. أ) بين أن : $\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) = 2$ . ( يمكن إستعمال النتيجة : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$ )

ب) إستنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ .

ج) بين أن المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته $y = x - 1$ مقارب للمنحني $(C_f)$ عند $+\infty$ .

3. أ) بين أن الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ .

ب) بين انه من اجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ : $f'(x) = g\left(1+\frac{2}{x}\right)$ .

ج) إستنتج إتجاه تغير الدالة $f$ على $]0;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها .

4. بين المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد $\alpha$ في المجال $]0;+\infty[$ ، ثم تحقق أن : $1.6 < \alpha < 1.7$ .
5. ارسم $(\Delta)$ و المنحنى $(C_f)$ . ( نقبل أن $(\Delta)$ فوق $(C_f)$ )
6. $F$ الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ .

ليكن $(C_F)$ تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ) ادرس اتجاه تغير الدالة $F$ دون حساب عبارة $F(x)$ .

ب) عين معادلة لـ $(T)$ مماس المنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $\alpha$.

**إنتهي الموضوع الثاني**



Scanned with CamScanner
www.dzexams.com

## الموضوع الذي يواجه الاختبار الجزئي

### التمرين الأول

$(u_n)$ متتالية عددية معرفة بـ $u_0 = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$، $u_{n+1} = \frac{2u_n^2}{4u_n + 1}$

1. نبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $0 < u_n < \frac{1}{2}$

لتكن $P(n)$ الخاصية المعرفة من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$ بـ:

$P(n)$: $0 < u_n < \frac{1}{2}$

$P(0)$: $0 < u_0 < \frac{1}{2}$ إذن $P(0)$ صحيحة

نفرض أنه من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$: $P(n)$ صحيحة و نبين صحة $0 < u_{n+1} < \frac{1}{2}$

أي نبين أن $u_{n+1} \geq 0$ و $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$

لدينا $0 < u_n < \frac{1}{2}$ ومنه

$\frac{2u_n^2}{4u_n+1} > 0$

نبين أن $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$ يكفي أن نبين أن $u_{n+1} - \frac{1}{2} < 0$

لدينا من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$

$u_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{2u_n^2}{4u_n+1} - \frac{1}{2} = \frac{4u_n^2 - 4u_n - 1}{2(4u_n+1)}$

إشارة $u_{n+1} - \frac{1}{2}$ من إشارة

$4u_n^2 - 4u_n - 1$

نضع $x = u_n$ و $0 < x < \frac{1}{2}$

ندرس إشارة $4x^2 - 4x - 1$

من أجل $0 < x < \frac{1}{2}$

$\Delta = 32$

حلا المعادلة $4x^2 - 4x - 1 = 0$

نقبل، فإن ما

$x_1 = \frac{+4 - \sqrt{32}}{8} = \frac{4 - 4\sqrt{2}}{8} = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$

$x_2 = \frac{+4 + \sqrt{32}}{8} = \frac{4 + 4\sqrt{2}}{8} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$

ومنه

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ | | $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $4x^2-4x-1$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

بما أن $x$ من $[0; \frac{1}{2}]$ فإن

$4x^2 - 4x - 1 < 0$

ومنه لدينا من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$

$4u_n^2 - 4u_n - 1 < 0$

ومنه $u_{n+1} - \frac{1}{2} < 0$

ومنه نستنتج أن $u_{n+1} < \frac{1}{2}$

أي $P(n+1)$ صحيحة

- ومنه نستنتج أنه من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$، $0 < u_n < \frac{1}{2}$

ب) دراسة اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$

لدينا من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$

$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n^2}{4u_n+1} - u_n$

$= \frac{2u_n^2 - 4u_n^2 - u_n}{4u_n+1}$

$= \frac{-2u_n^2 - u_n}{4u_n+1}$

$= \frac{u_n(-2u_n - 1)}{4u_n+1}$

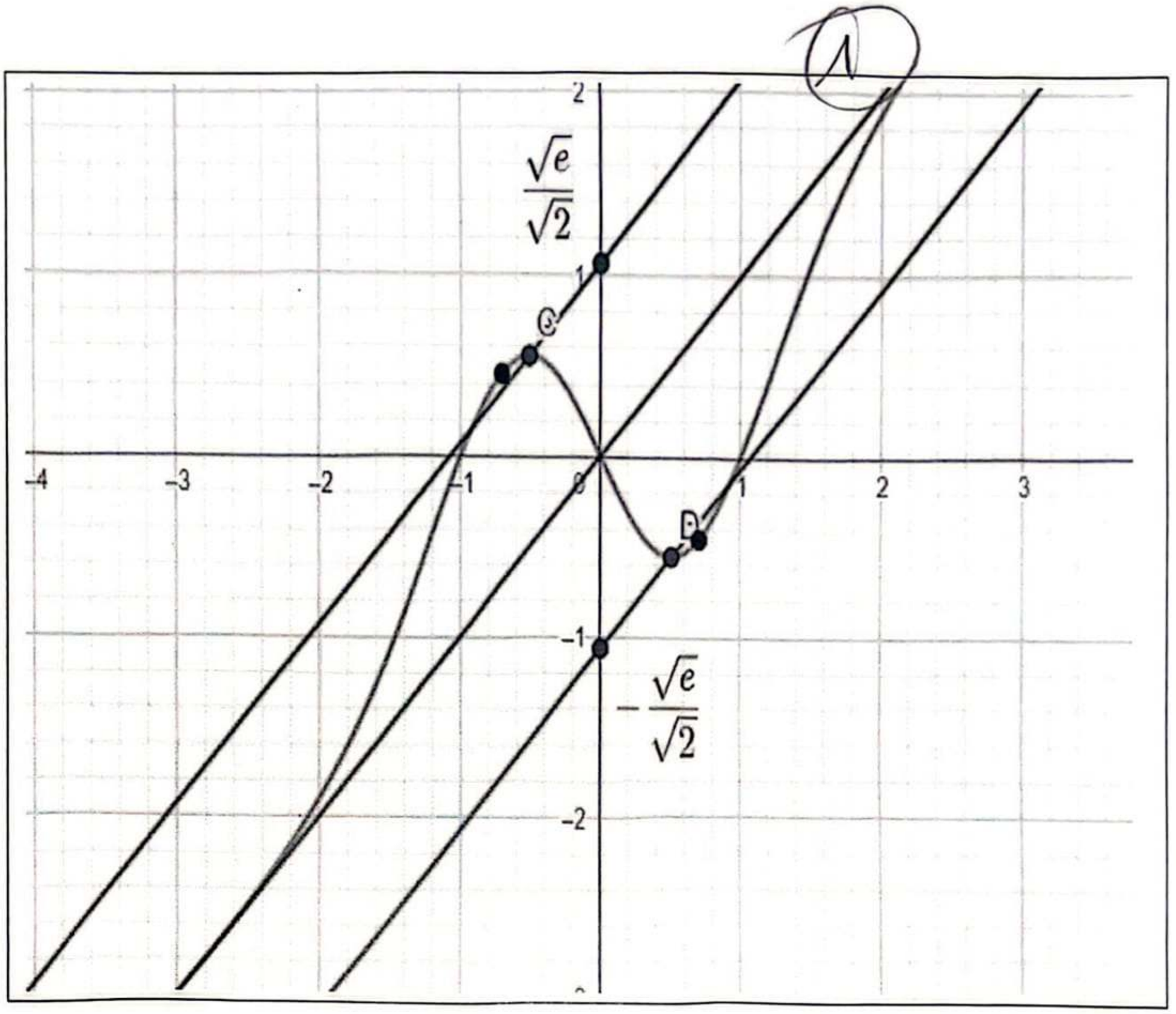
لدينا من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$ حسب ما سبق $4u_n + 1 > 0$ فإن $u_n > 0$

ومنه إشارة $u_{n+1} - u_n$ من إشارة $-2u_n - 1$

لدينا $u_n > 0$ ومنه $-2u_n < 0$

$-2u_n - 1 < -1$

Scanned with CamScanner
www.dzexams.com




Scanned with CamScanner
www.dzexams.com

ومنه لدينا من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$

$u_{n+1} - u_n$ إشارة

$(u_n)$ متناقصة تماما

بما أن $(u_n)$ محدودة من الأسفل

ومتناقصة فهي متقاربة

3. نعتبر المتتالية $(v_n)$ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$:

$v_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2u_n}\right)$

أ) بين أن $(v_n)$ هندسية أساسها $q = 2$

$(v_n)$ هندسية معناه يوجد عدد حقيقي $q$ ثابت بحيث من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$

$v_{n+1} = q \times v_n$

لدينا من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$:

$v_{n+1} = \ln\left(1 + \frac{1}{2u_{n+1}}\right)$

$= \ln\left(1 + \frac{1}{4u_n^2 + 4u_n}\right)$

$= \ln\left(1 + \frac{1}{4u_n^2 + 4u_n}\right)$

$= \ln\left(1 + \frac{1}{4u_n(u_n+1)}\right)$

$= \ln\left(1 + \frac{4u_n + 1}{4u_n^2}\right)$

$= \ln\left(\frac{4u_n^2 + 4u_n + 1}{4u_n^2}\right)$

$= \ln\left(\frac{(2u_n+1)^2}{(2u_n)^2}\right)$

$= \ln\left(\left(\frac{2u_n+1}{2u_n}\right)^2\right)$

$= 2\ln\left(1 + \frac{1}{2u_n}\right)$

$= 2v_n$

ومنه المتتالية $(v_n)$ هندسية أساسها $q = 2$ وحدها الأول

$v_0 = \ln\left(1 + \frac{1}{1}\right)$

$= \ln\left(\frac{1}{e}\right)$

ب) كتابة $v_n$ بدلالة $n$

لدينا من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$.

$v_n = v_0 \cdot q^n = \ln\left(\frac{1}{e}\right) \cdot 2^n$

$v_n = \ln\left(e^{-2^n}\right)$

لدينا من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$

$v_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2u_n}\right)$

$e^{v_n} = 1 + \frac{1}{2u_n}$

$e^{v_n} - 1 = \frac{1}{2u_n}$

$\frac{1}{e^{v_n} - 1} = 2u_n$

$\frac{1}{e(e^{v_n} - 1)} = u_n$ ومنه

$u_n = \frac{1}{e\left(e^{\ln\left(e^{-2^n}\right)} - 1\right)}$

$= \frac{1}{e\left(e^{-2^n} - 1\right)}$

$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$

نبين أنه من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$

$P_n = \frac{2u_0 + 1}{2u_0} + \cdots + \frac{2u_n + 1}{2u_n}$

$= e^{n+1} - 1$

لدينا من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$

$v_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2u_n}\right)$

$= \ln\left(\frac{2u_n + 1}{2u_n}\right)$

Scanned with CamScanner
www.dzexams.com

نبين بالتراجع من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$ :

$P_n = \left(\frac{2U_0+1}{2U_0}\right)\times\left(\frac{2U_1+1}{2U_1}\right)\times\ldots\times\left(\frac{2U_n+1}{2U_n}\right)$

$= 2(2^{n+1}-1)$

لدينا من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$ :

$V_n = \ln\left(1+\frac{1}{2U_n}\right)$

$e^{V_n} = \left(1+\frac{1}{2U_n}\right)$

$e^{V_n} = \frac{2U_n+1}{2U_n}$ (0,25)

$P_n = e^{V_0}\times e^{V_1}\times\ldots\times e^{V_n}$

$= e^{V_0+V_1+\ldots+V_n}$

$= e^{S_n}$

نحسب $S_n$ :

$S_n = V_0+V_1+\ldots+V_n$ (0,25)

$= V_0\left[\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right]$

$= \ln(e)\left[\frac{1-e^{n+1}}{-1}\right]$

$= \ln(e)\times\left[e^{n+1}-1\right]$

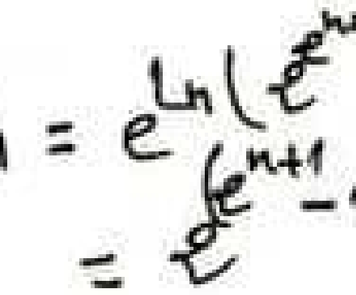
$= \ln\left(e^{e^{n+1}-1}\right)$

$P_n = e^{\ln\left(e^{2^{n+1}}-1\right)}$ (0,25)

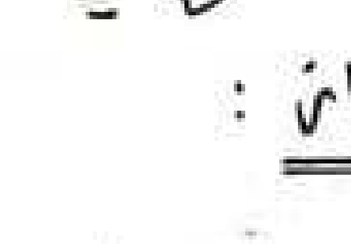
$= 2^{2^{n+1}}-1$

التمرين الثاني :

الصندوق $U_0$



الصندوق $U_1$



A : "سحب كرتين من نفس اللون"

$P(A) = \frac{1}{2}\times\frac{A_5^2+A_3^2}{A_8^2}+\frac{1}{2}\times\frac{3^2+2^2}{5^2}$

$= \frac{13}{56}$ (0,25)

$P(B) = \frac{1}{2}\times\frac{A_3^2}{A_7^2}+\frac{1}{2}\times\frac{3^2}{5^2}$

$= \frac{251}{700}$ (0,25)

C : سحب كرة حمراء على الأقل

$\overline{C}$ : نسحب من $U_1$ كرة حمراء

$P(\overline{C}) = \frac{1}{2}\times\frac{A_3^2}{A_8^2}+\frac{1}{2}\times\frac{2^2}{5^2} = \frac{187}{1400}$

$P(C) = 1-P(\overline{C}) = 1-\frac{187}{1400} = \frac{1213}{1400}$ (0,25)

إذا علمت الكرتين المسحوبتين من لونين مختلفتين فما هو احتمال أن تكون من الصندوق $U_1$

D : سحب كرتين من لونين مختلفتين

$P(D) = 1-P(A) = 1-\frac{251}{700}$

$P(D) = \frac{449}{700}$ (0,25)

$P_{U_1}(D) = \frac{A_5^1\times A_3^1\times 2}{A_8^2} = \frac{12}{28}$ (0,25)

ليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يتمم مجموع الأرقام المتحصل عليها عند سحب كرتين من الصندوق $U_0$

$X \in \{0;1;2;3;4\}$ (0,25)

$P(X=0) = \frac{C_3^2}{C_{13}^2} = \frac{1}{26}$



Scanned with CamScanner
www.dzexams.com

$$P(X=1) = \frac{C_8^1 \times C_5^1}{C_{13}^2} = \frac{4}{13}$$

$$P(X=2) = \frac{C_8^2 + C_5^1 \times C_2^1}{C_{13}^2} = \frac{17}{39}$$

$$P(X=3) = \frac{C_2^1 \times C_8^1}{C_{13}^2} = \frac{8}{39}$$

$$P(X=4) = \frac{C_2^2}{C_{13}^2} = \frac{1}{78}$$

| $X = x_i$ | 0 | $x=1$ | $x=2$ | $x=3$ | $x=4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | $1/26$ | $\frac{4}{13}$ | $\frac{17}{39}$ | $\frac{8}{39}$ | $1/78$ |

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{26} + 1 \times \frac{4}{13} + 2 \times \frac{17}{39} + 3 \times \frac{8}{39} + 4 \times \frac{1}{78}$$

$E(X) =$

## التمرين الثالث

حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المعادلة

$$z^2 - 2z + 5 = 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(5)$$
$$= 4 - 20$$
$$= -16$$

ومنه المعادلة تقبل حلان

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2 - i\sqrt{16}}{2} = 1 - 2i$$

$$z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2 + i\sqrt{16}}{2} = 1 + 2i$$

استنتج حلول المعادلة:

$$(z^2+1)^2 - 2z^2 + 3 = 0$$

المعادلة $(z^2+1)^2 - 2z^2 + 3 = 0$

تكافئ $(z^2+1)^2 - 2(z^2+1) + 2 = 0$

نضع $Z = z^2 + 1$

ومنه $Z^2 - 2Z + 5 = 0$

وهذه من المعادلة السابقة

$Z = 1 + 2i$ و $Z = 1 - 2i$

$z^2 + 1 = 1 - 2i$

$z^2 = -2i$

نضع $z = x + iy$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = -2 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

ومنه $x^2 = 2$

أي $x = 1$ أو $x = -1$

ومن $xy = -1$

إذا $x = 1$ فإن $y = -1$

إذا $x = -1$ فإن $y = 1$

$z = 1 - i$ أو $z = -1 + i$

$z^2 + 1 = 1 + 2i$

$z^2 = 2i$

نضع $z = x + iy$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 2 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

ومنه $x^2 = 1$ أي $2x^2 = 2$

$x = 1$ أو $x = -1$

ومن $y = 1$ أو $y = -1$

$z = 1 + i$ أو $z = -1 - i$

II المستوى المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$

1) إثبات أن:

$$\left(\frac{\sqrt{2}\, z_A}{z_A + z_B + z_E}\right)^{2011} = \frac{z_C}{z_E}$$

$$\frac{\sqrt{2}\, z_A}{z_A + z_B + z_E} = \frac{\sqrt{2}(1+2i)}{1+2i+1-2i+1+i}$$

$$= \frac{\sqrt{2}(1+2i)}{3+i}$$

$$= \frac{\sqrt{2}(1+2i)(3-i)}{10}$$

Scanned with CamScanner
www.dzexams.com

$$\frac{r_2 z_A}{z_A+z_B+z_C} = \frac{r_2(3-i+6i+2)}{10}$$

$$= \frac{r_2(5+5i)}{10}$$

$$= \frac{r_2}{2}(1+i)$$

$$= e^{i\pi/4}$$

(ou)

$$\left(\frac{r_2 z_A}{z_A+z_B+z_C}\right)^{2021} = e^{\frac{i\,2021\pi}{4}} = e^{-i3\pi/4}$$

$$e^{-i\frac{3\pi}{4}} = \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= -\frac{r_2}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{r_2}{2}(-1-i)$$

$$= \frac{z_C}{\sqrt{2}}$$

ومنه نستنتج أن

$$\left(\frac{r_2 z_A}{z_A+z_B+z_C}\right)^{2021} = \frac{z_C}{r_2}$$

ب) نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ حتى يكون $\left(\frac{z_E}{r_2}\right)^n$ تخيلي صرف

$$z_E = -z_C = 1+i = r_2 e^{i\pi/4}$$

$$\left(\frac{z_E}{r_2}\right)^n = (r_2)^n e^{in\pi/4}$$

$\left(\frac{z_E}{r_2}\right)^n$ تخيلي صرف نعني أن

(ou)

$$\frac{n\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad / k\in\mathbb{N}$$

$$\frac{n}{4} = \frac{1}{2} + k \quad / k\in\mathbb{N}$$

$$n = 2 + 4k \quad / k\in\mathbb{N}$$

ج) نبين زاوية الدوران الذي مركزه D وتحول C الى E

$r$ : D ⟼ D

$z_D \longmapsto z_D = a z_D + b$

$r$ : C ⟼ E

$z_C \longmapsto z_E = a z_C + b$

$|a|=1$ و $a = e^{i\theta}$

زاوية الدوران $\theta$ و $\arg(a) = \theta$

$$a = \frac{z_E - z_D}{z_C - z_D}$$

$$a = \frac{(1+i)-(-1+i)}{(-1-i)-(1-i)} = \frac{1}{-i} = i$$

(ou)

$\arg(a) = \pi/2$ و $|a|=1$

ومنه الدوران زاوية قيس $\pi/2$ ومركزه D.

3) أ) كتابة العدد $\frac{z_A - z_B}{z_D - z_C}$ على الشكل الجبري.

لدينا

$$\frac{z_A - z_B}{z_D - z_C} = \frac{(1+2i)-(1-i)}{(-1+i)-(-1-i)}$$

$$= \frac{1+2i-1+i}{2i}$$

$$= \frac{4i}{2i}$$

(ORV)

$$= 2$$

ومنه نستنتج أن $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DC}$

$r$ : D ⟼ A

$z_D \longmapsto z_A = a z_D + b$

$r$ : C ⟼ B

$z_C \longmapsto z_B = a z_C + b$

$$a = \frac{z_A - z_B}{z_D - z_C}$$

(ou)

$a = k$ و $a\in\mathbb{R}$

الدوران تحاكي نسبته $k=2$ ومركزه $\Omega$ لاحقة النقطة المحصورة بالدوران السابق.

لدينا

$$z_A = a z_D + b$$

ومنه

$$b = z_A - a z_D$$

$$= -1 \pm 2i - 2(-1+2i)$$



Scanned with CamScanner
www.dzexams.com

ومنه $T : M \longrightarrow M'$
$z \longrightarrow z' = az+b$

ومنه $z' = az + b$

وصف النقطة الصامدة

$z_2 = \frac{b}{1-a} = \frac{3}{1-2} = -3$

ب) لتعيين (D) مجموعة النقط M من المستوي حتى يكون $\left(\frac{z_E - z}{z_C - z}\right)$ عدد حقيقي

$\arg\left(\frac{z_E - z}{z_C - z}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$

$\overline{ME} \perp \overline{MC}$ (0,5)

أي المثلث EMC قائم في M وتر وتر دائرة محيطة بالمثلث القائم الذي مركزها هو منتصف [EC] ونصف قطرها

$z_\Omega = \frac{z_E + z_C}{2} = \frac{+1+i-1-i}{2} = 0$

$R = \frac{EC}{2} = \frac{|z_C - z_E|}{2} = \frac{|-2-2i|}{2}$

$R = 2\sqrt{2}$

مساحة الدائرة (Γ) هي

$S(\Gamma) = \pi R^2 = \pi \times 2 = 2\pi$ (0,5)

صورة (Γ) هي دائرة مركزها

$\Omega' = T(\Omega)$ (0,25)

$z_{\Omega'} = 2z_\Omega + 3 = 3$

ونصف قطرها $R' = 2R\sqrt{2}$

(0,5)

## التمرين الرابع

$g$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$g(x) = 1 + (2x^2 - 1).e^{1-x^2}$

1) نبين أن $g$ دالة زوجية

لدينا من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ فإن $-x \in \mathbb{R}$

$g(-x) = 1 + (2(-x)^2 - 1).e^{1-(-x)^2}$

$= 1 + (2x^2 - 1).e^{1-x^2}$

$= g(x)$ (0,25)

ومنه $g$ دالة زوجية ∴ $(C_g)$ متناظر بالنسبة لمحور التراتيب

ب) $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1$ (0,25)

وبما أن $g$ دالة زوجية فإن

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = 1$ (0,25)

ج) لدينا من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$

$g'(x) = 2x(3 - 2x^2).e^{1-x^2}$

لدينا من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ :

$g'(x) = 4.e^{1-x^2} - 2x(2x^2 - 1).e^{1-x^2}$

$= e^{1-x^2}[4 - 2x(2x^2 - 1)]$ (0,25)

$= 2x(3 - 2x^2).e^{1-x^2}$

د) دراسة اتجاه تغير الدالة $g$

حل المحال $[0; +\infty[$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $(3 - 2x^2)$

لأن لدينا من أجل كل $x$ من $[0; +\infty[$

$e^{1-x^2} > 0$ و $2x \geq 0$ (0,25)

لدينا

$x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ أو $x^2 = \frac{3}{2}$ أو $3 - 2x^2 = 0$

| $x$ | $0$ | | $\sqrt{\frac{3}{2}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

(0,5)

(6)

Scanned with CamScanner
www.dzexams.com

لدينا من أجل كل $x$ من $]\sqrt{2}/2 ; 0]$ فإن $g'(x)$ و منه $g$ متزايدة تماما على $]\sqrt{2}/2 ; 0]$

لدينا من أجل كل $x$ من $[0 ; \sqrt{2}/2[$ فإن $g'(x) \leq 0$ و منه $g$ متناقصة تماما.

| $x$ | $0$ | | $\sqrt{2}/2$ | |
|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $g(x)$ | $1$ | ↗ | $1+\sqrt{2}/e$ | ↘ |

$g(\sqrt{2}/2) = 1+(2(\sqrt{2}/2)^2-1).e^{-(\sqrt{2}/2)^2}$

$= 1+(2-1).e^{-1/2}$

$= 1+\frac{2}{2\sqrt{e}}$

بما أن $g$ دالة زوجية فإن اتجاه تغير الدالة $g$ على المجال المماثل $]-\sqrt{2}/2 ; 0]$ يكون متعاكس

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{2}/2$ | | $0$ | | $\sqrt{2}/2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $-e^{-1}$ | ↗ | $1+\sqrt{2}/e$ | ↘ | $0$ | ↗ | $1+\sqrt{2}/e$ | ↘ | $-e^{-1}$ |

جدول تغيرات الدالة $g$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد $\alpha$ على $]\sqrt{2}/2 ; \sqrt{2}]$ و بما أن $g$ متزايدة تماما على $]0 ; \sqrt{2}/2]$ فإن المعادلة $g(x)=0$ لا تقبل حلول على $]0 ; \sqrt{2}/2]$ و منه المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد $\alpha$ على $]0 ; +\infty[$

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

II) الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x(1-e^{1-x^2})$

بين أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$: $f(x)+f(-x)=0$

لدينا من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$:

$f(-x) = -x(1-e^{1-(-x)^2})$

$= -x(1-e^{1-x^2})$

$= -f(x)$

و منه لدينا من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$

$f(-x)+f(x)=0$

$f(-x) = -f(x)$ ومنه نستنتج أن الدالة $f$ فردية

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x(1-e^{1-x^2})$

$= \lim_{x\to+\infty} x - x.e^{1-x^2}$

$= \lim_{x\to+\infty} x - \frac{x}{e^{x^2-1}} \times \frac{x^2}{x^2}.e^{1-x^2}$

$= +\infty$

بما أن دالة فردية فإن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -f(-x) = \lim_{x\to+\infty} -f(x)$

Scanned with CamScanner
www.dzexams.com

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -f(x)$ (0,5+0,5)

ب) تبين انه من اجل كل $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = g(x)$

ومنه من اجل كل $x \in \mathbb{R}$:

$f'(x) = 1 + (1 - e^{1-x^2}) + 2x^2 \times e^{1-x^2}$

$= 1 - e^{1-x^2} + 2x^2 e^{1-x^2}$

$= 1 + (2x^2 - 1)e^{1-x^2}$

$= g(x)$ (0,5+0,5)

ج) اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$ (0,25)

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

لدينا من اجل كل $x$ من $]-\infty;-2] \cup [2;+\infty[$ فان $f'(x) \geq 0$ و $f$ متزايدة تماما.

ولدينا من اجل كل $x$ من $[-2;2]$ فان $f'(x) \leq 0$ و $f$ متناقصة تماما.

جدول تغيرات الدالة $f$

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $f(-2)$ | ↘ | $f(2)$ | ↗ $+\infty$ |

$f(2) \approx 0,15$

$f(-2) \approx -0,15$

ادخال حصر لـ $f(x)$ على $I = [0,15; 0,16]$

لدينا:

$f(x) = x\left(1 + \frac{1}{e^{x^2}-1}\right)$

$e^{1-x^2} = \frac{1}{e^{x^2-1}}$ ومنه

$f(x) = x\left(1 + \frac{1}{e^{x^2}-1}\right)$

ولدينا $x^2 \geq 4$ و $x^2 \leq 5$ اذن

$-0,25 \leq f(x) \leq -0,16$

ولدينا $0,16 < f(-x) < 0,25$

ب) لنبين أن المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ $(C_f)$ عند $+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to+\infty} [x(1 - e^{1-x^2}) - x]$

$= \lim_{x\to+\infty} x \cdot e^{1-x^2}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x^2-1}} \times (1-x^2) \cdot e^{1-x^2}$

$= 0$

ومنه $(\Delta)$ المستقيم المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ $(C_f)$ عند $+\infty$

بما أن $f$ دالة فردية فان $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب مائل عند $-\infty$ وهو $(\Delta)$ المنتصف بالنسبة لمبدأ المعلم ونحصل عليه بالتحويل ذو المعادلة $\begin{cases} X = -x \\ Y = -y \end{cases}$

ومنه $(\Delta)$: $y = x$

$Y = X$ أي $-Y = -X$

$Y = X$ معادلة $(\Delta')$ أي $(\Delta)$ مقارب لـ $(C_f)$ عند $-\infty$ بنفس المقارب عند $+\infty$.

Scanned with CamScanner
www.dzexams.com

ج) لنبين أن $(\Gamma_2)$ يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها.

لدينا من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$

$f''(x) = g'(x)$

$g'(x) = 0$ و $f''(x) = 0$ و $g'(x)$ من إشارة $f''(x)$

$x = -\sqrt{3/2}$ أو $x = \sqrt{3/2}$ أو $x = 0$

| $x$ | $-\infty$ | $-\sqrt{3/2}$ | $0$ | $+\sqrt{3/2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | + | 0 | − | 0 | + |

$(e_f)$ يقبل ثلاث نقاط انعطاف أفاصيلها على الترتيب $0$ و $-\sqrt{3/2}$ و $\sqrt{3/2}$

د. كتابة معادلة المماس $(T)$ عند النقطة ذات الفاصلة $0$

$y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$f'(0) = 1 + (e(0)^2 - 1).e^{1-0^2}$

$= 1 - e$

$f(0) = 0$

$y = (1-e)x$ ومنه

هـ. رسم $(T)$ و $(\Delta)$ و $(e_f)$

و. لنبين أن $(e_f)$ يقبل مماسين متناظرين بالنسبة لـ $(\Delta)$.

$f'(x_0) = 1$ يعني أن $(\Delta) // (T')$

$1 + (ex_0^2 - 1).e^{1-x_0^2} = 1$

$(ex_0^2 - 1).e^{1-x_0} = 0$

$ex_0^2 - 1 = 0$

$x_0 = -\sqrt{1/e}$ أو $x_0 = \sqrt{1/e}$

$x_0 = -\frac{1}{\sqrt{2e}}$ أو $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2e}}$

نعين معادلة كل منهما

$T'_1 : y = f'\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{2e}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$

$= 1\left(x - \frac{1}{\sqrt{2e}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2e}}\left(1 - e^{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)^2}\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{2e}}\left(1 - e^{1-1/2}\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{2e}}\left(1 - e^{\frac{1}{2}}\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{2e}}\left(1 - \sqrt{e}\right)$.

$y = \left(x - \frac{1}{\sqrt{2e}} + \frac{1}{\sqrt{2e}} - \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

$= x - \frac{1}{\sqrt{e}}$

$(T'_2)$ صورة $(T'_1)$ بالنسبة لمبدأ لأن الدالة $f$ فردية

معادلة $(T'_2)$ بدلالة معادلة $(T'_1)$ بتغيير إشارة $x$ و $y$

$-y = -x - \frac{1}{\sqrt{e}}$

$y = x + \frac{1}{\sqrt{2e}}$ وهي معادلة $(T_2)$ المماس لـ $(e_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = -\frac{1}{\sqrt{2e}}$

ز. لنبين أن $(e_f)$ يقبل مماسين متناظرين بالنسبة لـ $(\Delta)$.

$f'(x_0) = 1$ يعني أن $(\Delta) // (T')$

$1 + (ex_0^2 - 1).e^{1-x_0^2} = 1$

$(ex_0^2 - 1).e^{1-x_0} = 0$

Scanned with CamScanner
www.dzexams.com

ع. تبين حسب قيم الوسيط $m$
عدد و اشارة حلول المعادلة

(1) $f(x) = x + m$ .

تمثيلها المستقيم $(D_m)$ الذي
معادلته $y = x + m$

$(D_m) // (\Gamma_1)$ و $(D_m) // (\Gamma_2)$

حل المعادلة $f(x) = x + m$ يؤول
الى ايجاد مواضيل نقاط تقاطع
$(D_m)$ و $(P)$ .

من اجل $m < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ فان المعادلة
ليس لها حل

من اجل $m = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ فان المعادلة (1)
تقبل حل مضاعف $x = \frac{1}{2}$

من اجل $-\frac{\sqrt{2}}{2} < m < 0$ فان
المعادلة (1) تقبل حلان موجبان

من اجل $m \geq 0$ فان
المعادلة تقبل حلان سالبان

من اجل $m = +\frac{\sqrt{2}}{2}$ فان المعادلة
(1) تقبل حل مضاعف $x = \frac{1}{2}$

من اجل $m > \frac{\sqrt{2}}{2}$ فان المعادلة
ليس لها حل .

(1) الرسم



Scanned with CamScanner
www.dzexams.com