الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — مديرية التربية لولاية سطيف

الشعبة تقني رياضي — ثانوية الشهيد لولو علي عين آرنات

امتحان بكالوريا التجريبي للتعليم الثانوي — دورة ماي 2024

إختبار في مادة الرياضيات — المدة: 04 ساعات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين:

الموضوع الأول

التمرين الأول:(05 نقاط)

α عدد المركب بحيث $\alpha = 2+\sqrt{3}+i$

1) أ) بين أن طويلة العدد المركب α هي $|\alpha| = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$

ب) تحقق من أن $\alpha = 2\left(1+Cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)+2i\,Sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

2) أ) احسب $\left(Cos(\theta)+i\,Sin(\theta)\right)^2$ بطريقتين مختلفتين حيث θ عدد حقيقي.

ب) بين أنه من أجل كل $\theta \in \mathbb{R}$ فإن: $1+Cos(2\theta) = 2\left(Cos(\theta)\right)^2$ و $Sin(2\theta) = 2\,Cos(\theta)\,Sin(\theta)$

3) أ) بين أن $\alpha = 4\left(Cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^2 + 4i\,Cos\left(\frac{\pi}{12}\right)Sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

ب) استنتج أن $\alpha = 4Cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\left[Cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\,Sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$ ثم عين القيمة المضبوطة لـ $Cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $Sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

4) أ) أكتب العدد α على الشكل المثلثي ثم على الشكل الأسي.

ب) بين أن $i\ \alpha^n = \left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^n$

5) المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين $z_A = \alpha$ و $z_B = \overline{\alpha}$

أ) عين (γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z من المستوي والتي تحقق: $|z_A - z| = |z_A - \overline{z}|$

ب) ليكن n عدد طبيعي غير معدوم.

- بيّن أنّ جميع حلول المعادلة $\left(\frac{z_A - z}{z_B - z}\right)^{2024n} = i$ ذات المجهول z في C هي أعداد حقيقية (لا يُطلب حساب الحلول)

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1) أ) أُدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 11

ب) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد $4\times 69^{10n+6} + 7\times 58^{2n+13} - 8$ على 11

2) عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $n^2 + 36^{5n}\times n + 14^{5n+3} + 5$ قابلا للقسمة على 11

3) عيّن الأعداد الصحيحة β والتي تحقق $80^{3n+2}\times\beta + 91^{3n+1} \equiv 0\,[11]$

4) جد الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية والتي تحقق $14^x + 25^y \equiv 8\,[11]$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

يريد تلاميذ قسم مكوّن من 18 تلميذ و12 تلميذة أن يكوّنوا لجنة من ثلاثة أفراد تتضمن "رئيس" و "نائب" و"أمين".

1) ما هو عدد اللجان الممكن تشكيلها؟

2) ما هو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها بحيث يكون:

أ) أمين اللجنة يكون تلميذة.

ب) التلميذ A موجود في اللجنة.

ج) الرئيس تلميذ والأمين تلميذة.

3) نفرض أنّ الرئيس تلميذ والأمين تلميذة وأن التلميذ A لا يريد الإنضمام إلى لجنة تضم التلميذة B

- ما هو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها في هذه الحالة؟

4) ليكن ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد التلميذات المتواجدة في اللجنة.

أ) عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

ب) أحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) f_k دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f_k(x)=(kx+1)e^{-x}$ حيث k وسيط حقيقي غير معدوم $(k\neq 0)$

وليكن (C_k) التمثيل البياني للدالة في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) بيّن أنّ كل المنحنيات (C_k) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيينها.

2) بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x)=0$ ثمّ أحسب نهاية الدالة f_k عند $-\infty$ (ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي k غير المعدوم)

3) أ) أحسب $f_k'(x)$ ، ثمّ حدّد حسب قيم الوسيط الحقيقي k غير المعدوم اتجاه تغير الدالة f_k

ب) شكّل جدول تغيرات الدالة f_k من أجل $k\geq 1$

4) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي k غير المعدوم الأوضاع النسبية للمنحنيين (C_k) و (C_{k+1})

II) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=(x+1)e^{-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) شكّل جدول تغيرات الدالة f ثمّ أرسم المنحنى (C_f)

2) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x)=f(m)$

3) عيّن العددين الحقيقيين a و b حتى تكون الدالة $x\mapsto(ax+b)e^{-x}$ دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

4) أحسب A مساحة الحيّز المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=1$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

1) نعتبر المعادلة $(E)\ldots 4x-5y=1$ ذات المجهولين الصحيحين x و y

أ) تحقق من أنّ الثنائية $(-1;-1)$ حل للمعادلة (E) ثم إستنتج مجموعة حلولها.

ب) استنتج قيم العدد الصحيح x والذي يحقق الجملة $\begin{cases} x \equiv 3[5] \\ x \equiv 2[4] \end{cases}$

2) n عدد طبيعي نضع $a=4n+3$ و $b=3n+1$

- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n، إذا كان d يقسم a و d يقسم b فإن d يقسم 5

3) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $PGCD(a;b)=5$ إذا وفقط إذا كان $n \equiv 3[5]$

4) أ) أُدرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 5

ب) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2^n+3^n \equiv 0[5]$ إذا وفقط إذا كان $2^{a+b} \equiv 4[5]$

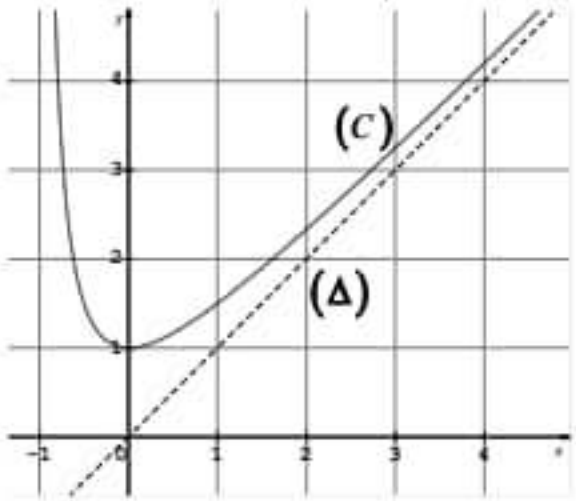
5) عيّن أصغر عدد طبيعي n والذي يحقق $\begin{cases} 2^n+3^n \equiv 0[5] \\ PGCD(a;b)=5 \\ n \geq 2020 \end{cases}$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n بـ $u_{n+1}=u_n+\frac{1}{1+u_n}$

1) (C) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto x+\frac{1}{1+x}$ على المجال $]-1;+\infty[$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$

أ) أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثّل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2، u_3 و u_4 دون حسابها موضحا خطوط الإنشاء.



ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n \geq 0$

3) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_{n+1}^2-u_n^2 \geq 1$

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n \geq \sqrt{n}$ ثم أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

4) من أجل كل عدد طبيعي n نضع $S_n=\frac{1}{1+u_0}+\frac{1}{1+u_1}+\frac{1}{1+u_2}+\ldots+\frac{1}{1+u_n}$

- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $S_n=u_{n+1}$ ثم استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

يحتوي كيس على سبع كرات بيضاء تحمل الأرقام 0، 0، 1، 1، 2، 2، 2 وخمس كرات سوداء تحمل الأرقام 4، 4، 4، 6، 8 الكرات متماثلة لا يمكن التفريق بينها باللمس.

نسحب عشوائيا وفي آن واحد أربع كرات من هذا الكيس.

1) أحسب احتمال الأحداث التالية:

A : " الحصول على أربع كرات من نفس اللون". B : " الحصول على أربع كرات مجموع أرقامها يساوي 6".

C : " الحصول على أربع كرات أرقامها يمكن أن تُشكل العدد 2022".

2) ليكن الحدث: D : " الحصول على أربع كرات أرقامها تشكل متتالية حسابية أساسها 2"

- بيّن أنّ $P(D)=\frac{27}{495}$

3) أحسب $P(A\cap C)$ ثم إستنتج $P(A\cup C)$

4) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب أصغر الأرقام المسحوبة.

- عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=-2x+x\ln(x+1)$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ ثمّ برهن أنّ $=+\infty$

2) أ) بيّن أنه من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$ فإنّ : $f'(x)=-\frac{x+2}{x+1}+\ln(x+1)$

ب) الجدول المقابل يبرز تغيرات الدالة f' مشتقة الدالة f

x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$	...	0	...

وليكن α العدد الحقيقي الذي يحقق $f'(\alpha)=0$

- أنقل وأكمل الجدول المقابل ثمّ عيّن إشارة $f'(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$

جـ) تحقّق من أنّ $2,5<\alpha<2,6$ ثم أنشئ جدول تغيرات الدالة f

3) أرسم المنحنى (C_f) (نأخذ $f(\alpha)\approx -1,9$)

4) لتكن g دالة معرفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=\frac{-x^2}{x+1}$

أ) تحقق أنه من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$ فإنّ $g(x)=1-x-\frac{1}{x+1}$ ثم أحسب $\int_0^{\alpha} g(x)dx$

ب) بإستعمال المكاملة بالتجزئة بيّن أنّ $\int_0^{\alpha} x\ln(x+1)dx=\frac{1}{2}\alpha^2\ln(\alpha+1)+\frac{1}{2}\int_0^{\alpha} g(x)dx$

5) لتكن A_α مساحة الحيز المحدّد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل والمستقيمين ذو المعادلتين $x=0$ و $x=\alpha$

- بين أنّ $A_\alpha=\frac{3\alpha^3-\alpha^2+4}{4(\alpha+1)}$

إنتهى الموضوع الثاني