الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية عنابة

امتحان بكالوريا تجريبي التعليم الثانوي — دورة ماي 2024

ثانوية العقيد محمد عواشرية — الشعبة: رياضيات

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 04 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول:

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة التالية: $325x - 238y = 7$ ..... (I)

1) بين أنه إذا كان $(x; y)$ حلا للمعادلة (I) فإن x مضاعف للعدد 7.

2) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (I).

3) ليكن $d = pgcd(x, y)$ حيث $(x; y)$ حلا للمعادلة (I).

عين القيم الممكنة للعدد d ثم عين قيم y و x حتى يكون $d = 7$

4) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية لكل من 2^n و 3^n على 7 .

5) بين أن: $2022^{1954} + 2021^{1962} + 2020^{1444} + 1 \equiv 0[7]$

6) عين قيم العددين الطبيعيين y و x حتى يكون: $2018^x + 2019^y \equiv 0[7]$ حيث $(x; y)$ حلا للمعادلة (I).

التمرين الثاني: (04 نقاط)

I) 1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2 - 2\sqrt{3}\,z + 4 = 0$

2. نعتبر في $\mathbb{C}$ كثير الحدود $p(z) = z^3 + \left(-2\sqrt{3} + i\right)z^2 + \left(4 - 2i\sqrt{3}\right)z + 4i$.

أ- بين أن $z_0 = -i$ جذر ل $p(z)$.

ب-عين العددين الحقيقيين b و c حيث: $p(z) = (z + i)(z^2 + bz + c)$.

ج- استنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة $p(z) = 0$ ، z_0 ، z_1 و z_2 حيث z_1 العدد المركب الذي جزؤه التخيلي موجب.

د- اكتب العدد المركب L على الشكل الأسي حيث $L = \frac{z_1}{z_2}$.

هـ- عين قيم العدد الصحيح n حيث يكون L^n عدد حقيقي موجب تماما.

II) في المستوى المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب: $z_A = \sqrt{3} + i$ ، $z_B = \sqrt{3} - i$ ، $z_C = -i$

1. مثل النقط A ، B و C مبينا كيفية الإنشاء هندسيا.
2. احسب $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .
3. عين الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل النقطي S حيث: $S(A) = C$ و $S(B) = B$.
4. لتكن G مرجح الجملة $\{(A,6),(B,-4),(C,3)\}$ ، عين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\left\| 3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{MC} \right\| = 5$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المتتالية (u_n) المعرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}\left(u_n^2 - u_n + \frac{1}{2}\right)}$$

1. أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}\left(u_n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{8}}$

   ب- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq 1$.

2. أ- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1-u_n)}{2\sqrt{\frac{1}{2}\left({u_n}^2 - u_n + \frac{1}{2}\right) + 2u_n - 1}}$

   ب- استنتج إتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

3. المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = {u_n}^2 - u_n$

   أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

   ب) اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{8}{2^n}}$

   ج) احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4. احسب بدلالة n المجموع حيث:

$$S_n = (u_0 - {u_0}^2) + (u_1 - {u_1}^2 + 1) + (u_2 - {u_2}^2 + 2) + \cdots + (u_n - {u_n}^2 + n)$$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^4 - 18x^2 + 1$

1- شكل جدول تغيرات الدالة g على المجال $]1; +\infty[$.

2- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يحقق $4{,}23 < \alpha < 4{,}24$ ، استنتج إشارة $g(x)$ لما $x > 1$.

II- نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - 4 + \frac{8e^{2x}}{e^{2x}-1}$

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1- أ) أثبت أن: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(e^x)}{(e^{2x}-1)^2}$

ب) بين أن: إذا كان $x \geq \ln\alpha$ فإن $f'(x) \geq 0$ وإذا كان $0 < x \leq \ln\alpha$ فإن $f'(x) \leq 0$.

2- أ) أثبت أن: من أجل كل x من المجال $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$، الدالة f فردية. ماذا يمكن قوله عن (C_f)؟

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا.

ج) شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

3- أ) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y = x - 4$ بجوار $-\infty$.

ب) استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ') بجوار $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

ج) ارسم المستقيمين المقاربين المائلين (Δ) و (Δ') ، والمنحنى (C_f) . نأخذ $f(\ln\alpha) \approx 5{,}9$.

4- n عدد طبيعي أكبر تماما من 1 . لتكن $A(n)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f)، المستقيم ذي المعادلة $y = x + 4$ ، والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = \ln\sqrt{n}$ و $x = \ln\sqrt{n+1}$

أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1، فإن $A(n) = 4\ln(\frac{n^2}{n^2-1})$ ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} A(n)$.

ب) من أجل كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1، نضع: $S_n = A(2) + A(3) + \cdots + A(n)$.

بين أن: $S_n = 4\ln\left(\frac{2n}{n+1}\right)$ ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (04 نقاط)

I. نعتبر صندوقين متماثلين U_1 و U_2 بحيث: U_1 يحتوي على خمس كرات حمراء تحمل الأرقام $\{1, 1, 1, 0, -1\}$ وثلاث كرات خضراء تحمل الأرقام $\{1, 1, 0\}$ و U_2 يحتوي على أربع كرات حمراء تحمل الأرقام $\{1, 1, 1, 0\}$ وكرتين خضراوين تحملان الرقمين $\{1, 0\}$.

نختار عشوائيا أحد الصناديق فإذا كان U_1 نسحب منه ثلاث كرات على التوالي دون إرجاع وبطريقة عشوائية وإذا كان U_2 نسحب منه ثلاث كرات في آن واحد وبطريقة عشوائية كذلك.

1) احسب احتمال الأحداث التالية:

A : "سحب ثلاث كرات من نفس اللون ".

B : " سحب ثلاث كرات تحمل نفس الرقم".

C : " سحب كرة خضراء على الأقل".

D : " سحب ثلاث كرات جداء أرقمهما معدوم ".

E : "سحب ثلاث كرات مجموع أرقمهما معدوم".

2) بين أن: $P(A \cap B) = \frac{89}{3360}$ ثم استنتج $P(\overline{A \cup B})$، هل الحادثتان A و B مستقلتان؟ علل جوابك.

II. نأخذ الكرات الموجودة في الصندوقين U_1 و U_2 ونضعها جميعها في صندوق واحد U_3 ثم نسحب عشوائيا منه كرتين في آن واحد وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة جداء الرقمين اللذان تحملهما الكرتين المسحوبتين.

أ) عين القيم الممكنة التي يأخذها المتغير العشوائي X وعرف قانون احتماله.

ب) أحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ للمتغير العشوائي X .

التمرين الثاني: (05 نقاط)

I. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0; 2]$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

1. ادرس اتجاه تغير الدالة f .
2. بين أنه من أجل كل $x \in [1; 2]$ فإن: $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{4}{5}$

II. a عدد حقيقي، نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^3 + 2}{u_n^2 + 1} \end{cases}$$

1. جد قيمة a حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

- في كل ما يلي نأخذ: $a = 1$.

2. أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن: $0 < u_n < 2$.

ب- ادرس اتجاه تغير (u_n)، ثم برر لماذا من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $1 \leq u_n < 2$ ؟

ج-برر لماذا (u_n) متقاربة؟

3. أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $2 - u_{n+1} = f(u_n)(2 - u_n)$

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $2 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(2 - u_n)$

ج- استنتج أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن: $0 < 2 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$ ، ثم احسب: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 10 .

2) استنتج باقي قسمة العدد A_n على حيث: $A_n = 2023^{16n+6} - 2 \times 39^{2n+3} + 108$.

3) نعتبر العدد الطبيعي B_n حيث: $B_n = (3n+4) \times 39^n + 2027^{2n+1}$ حيث n عدد طبيعي.

أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $B_n = (3n+1) \times 3^{2n}[10]$.

ب-استنتج قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون B_n مضاعف للعدد 10 .

4) N عدد طبيعي يكتب على الشكل $\overline{\alpha\alpha 0\alpha\alpha 02}$ في نظام التعداد ذي الأساس 3 ، ويكتب على الشكل $\overline{\beta 612}$ في نظام التعداد ذي الأساس 7 .

أوجد العددين α و β ، ثم اكتب $(N+5)$ في النظام العشري.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ: $h(x) = 1 + \ln x \times \ln(\ln x)$.

1) احسب $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} h(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$.

2) أ- اثبت أنه من أجل $x \in]1;+\infty[$: $h'(x) = \frac{1+\ln(\ln x)}{x}$

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة h ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3) استنتج أنه من أجل $x \in]1;+\infty[$: $h(x) > 0$

II. نعتبر الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ: $f(x) = e^{x \ln(\ln x)}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) عين نهاية الدالة f عند أطراف مجال تعريفها.

2) أ- اثبت أن من أجل كل $x \in]1;+\infty[$ فإن: $f'(x) = \frac{h(x)\times f(x)}{\ln x}$

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة e .

4) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 1$.

5) أنشئ (C_f) والمماس (T) .

III. لتكن الدالة K المعرفة على $]1;+\infty[$ كما يلي: $K(x) = \frac{e^{[f(x)]^2}}{[ef(x)]^2}$.

1) احسب $K'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$.

2) شكل جدول تغيرات الدالة K .

انتهى الموضوع الثاني