

أجب على أحد الموضوعين التاليين على الخيار
الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي صندوق U_1 على ثلاث كريات تحمل الأرقام 0، 1 و 3 ويحتوي صندوق U_2 على أربع كريات تحمل الأرقام 4، 5، 8 و 8، نسحب عشوائيا كرية واحدة من الصندوق U_1 .

فإذا كانت تحمل الرقم 0 نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من U_2 وإذا كانت لا تحمل الرقم 0 نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من U_2 .

ليكن A "الكرية المسحوبة من U_1 تحمل الرقم 0" و B "مجموع أرقام الكريات المسحوبة من U_2 عدد زوجي".

(1) أحسب الاحتمالين: $P_A(B)$ و $P(A \cap B)$ ثم بين أن $P(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{6}$ ثم أحسب $P(B)$.

(2) علما أن مجموع الأرقام التي تحملها الكريات المسحوبة من الصندوق U_2 زوجي، ما احتمال أن تكون الكرية المسحوبة من الصندوق U_1 لا تحمل الرقم 0.

(3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب جداء الأرقام التي تحملها الكريات المسحوبة من U_1 و U_2 .

(أ) عين قانون احتمال المتغير العشوائي X ، ثم استنتج قيمة $P(X \leq 160)$.

(ب) أحسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X

التمرين الثاني: (05 نقاط)

(1) جد العددين المركبين Z_1 و Z_2 حيث:
$$\begin{cases} 2Z_1 + iZ_2 = 1 + i\sqrt{3} \\ (\sqrt{3} + 2i)Z_1 - Z_2 = (1 - \sqrt{3})i \end{cases}$$

(2) في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين $Z_A = 1 - i$ و $Z_B = 2 + \sqrt{3} + i$.

(أ) أكتب z_A على الشكل الأسّي. (ب) بين أن $\frac{Z_B}{Z_A} = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$ ثم استنتج الشكل الأسّي للعدد Z_B .

(ج) هل توجد قيم لعدد الطيعي n حتى تكون صورة العدد $\left(\frac{Z_B}{Z_A}\right)^n$ تنتمي إلى المنصف الأول؟

(3) أوجد لاحقة النقطة B' صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه النقطة O و زاويته $-\frac{\pi}{6}$.

(4) نضع $Z_D = (1 + \sqrt{3}) - i$

(أ) أحسب مساحة الدائرة (δ) التي قطرها $[BD]$. (مقدرة بوحدة المساحة)

(ب) عين مجموعة النقط $M(Z)$ من المستوي حيث: $\arg[(Z - Z_B)^2] = \arg(Z_B) - \arg(Z_D)$.

(ج) عين Z_C لاحقة النقطة C حتى يكون الرباعي $ADBC$ مستطيلا، ثم أوجد Z_I لاحقة مركز ثقله I .

- (5) نعتبر المجموعة (Δ) للنقط M ذات اللاحقات Z من المستوي بحيث : $Z - \sqrt{3} = \lambda e^{\frac{-2\pi i}{3}}$ و λ عدد حقيقي موجب تماما .
تحقق من أن النقطة E ذات اللاحقة $Z_E = -3i$ تنتمي إلى (Δ) . ثم عين المجموعة (Δ) .

التمرين الثالث : (04 نقاط)

$$\left\{ \begin{array}{l} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \end{array} \right. \quad \text{و} \quad \left\{ \begin{array}{l} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n) \end{array} \right. : \text{ كما يلي بـ :}$$

- من أجل كل عدد طبيعي نعرف المتتالية (w_n) بـ : $w_n = u_n - v_n$:
(1) أ- بين أن المتتالية (w_n) هندسية ، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .
ب- أكتب عبارة w_n بدلالة n هل المتتالية (w_n) متقاربة ؟
(2) أدرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .
ب) استنتج أن (u_n) و (v_n) متجاورتان .
(3) لتكن l النهاية المشتركة لهما ونعرف المتتالية (t_n) على $\mathbb{N}$ بـ $t_n = u_n + v_n$.
بين أن (t_n) ثابتة ثم استنتج قيمة l .
(4) أحسب المجموع $T = S_n + S'_n$ بدلالة n حيث : $S_n = v_0 u_0 - v_0^2 + v_1 u_1 - v_1^2 + \dots + v_n u_n - v_n^2$.
و $S'_n = u_0^2 - u_0 v_0 + u_1^2 - u_1 v_1 - \dots + u_n^2 - u_n v_n$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

$$\left\{ \begin{array}{l} f_n(x) = x(1 - \ln x)^n \quad ; \quad x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{array} \right. \quad \text{من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم } n, \text{ نعرّف الدالة } f_n \text{ على المجال }]0; +\infty[\text{ بـ :}$$

$$(C_n) \text{ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس } (O; \vec{i}, \vec{j}) \text{ حيث } \|\vec{i}\| = 2cm$$

(I) 1) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f_1 عند 0 من اليمين ثم فسّر النتيجة بيانياً .

$$\text{ب) جد كل من: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) .$$

(2) 1) أدرس اتجاه تغير الدالة f_1 ثم شكّل جدول تغيراتها . ب) استنتج دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على المجال $]0; +\infty[$.

$$(3) \text{ 1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما } x : f'_2(x) = (1 + \ln x)(-1 + \ln x) .$$

ب) أدرس اتجاه تغير الدالة f_2 ثم شكّل جدول تغيراتها .

(4) بين أن المنحنى (C_2) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثيتها .

(5) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) و (C_2) ثم أرسم كلا منهما في المعلم السابق .

$$(II) \text{ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم } n \text{ نعرف العدد الحقيقي } I_n \text{ كما يلي: } I_n = \int_1^e f_n(x) dx$$

1) أحسب I_1 ثم فسّر النتيجة هندسياً .

2) بين أن المتتالية (I_n) متناقصة ثم استنتج تقاربها .

$$(3) \text{ باستعمال التكامل بالتجزئة، بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم } n : I_{n+1} = \frac{n+1}{2} I_n - \frac{1}{2}$$

أحسب بـ cm^2 مساحة حيّز المستوي المحدّد بالمنحنيين (C_1) ، (C_2) و المستقيمين اللذين معادلتين لهما : $x = e$ ، $x = 1$

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

تعطى المعادلة: (E) . . $2024x - 1444y = 24$ حيث x و y عددان صحيحان.

(1) أحسب $PGCD(2024; 1444)$ ثم بين أن المعادلة (E) تقبل حلولاً في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(2) جد الحل الخاص $(x_0; y_0)$ للمعادلة (E) علماً أن $y_0 - x_0 = 4$ ثم حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة (E).

(3) جد القيم الممكنة لـ $PGCD(x; y)$ حيث $(x; y)$ حل المعادلة (E) ثم جد الشئيات $(x; y)$ من $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ حلول المعادلة (E) بحيث $PGCD(x; y) = 6$.

(4) نضع: $u_n = 361n + 16$ و $v_n = 506n + 10$ حيث $n \in \mathbb{N}$ ، عين الحدود المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n) .

(5 أ) حلل العدد 2025 إلى جداء عوامل أولية واستنتج قواسم 2025 التي مربعاتها قواسم لـ 2025.

(ب) جد العددين الطبيعيين a و b حيث $4m^2 - 171d^2 = 2025$ حيث $d = PGCD(a; b)$ و $m = PGCD(a; b)$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ: $u_0 = \frac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n^2}$.

(1) في مايلى المنحنى البياني الممثل لدالتها المرفقة f حيث $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

مثل الحدود الأربعة الأولى على حامل محور الفواصل أعط تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

(2 أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $\frac{1}{2} \leq u_n < 1$.

(ب) حدد اتجاه تغير المتتالية (u_n) . بين أن (u_n) متقاربة، أحسب نهايتها.

(3 أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < 1 - u_{n+1} \leq \frac{2}{5}(1 - u_n)$.

(ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < 1 - u_n \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$.

(ج) استنتج نهاية المتتالية (u_n) مرة أخرى.

(4) نعرف المتتالية (v_n) على كمالى: $v_n = 1 - u_n$. ونضع $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$.

بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < S_n \leq \frac{5}{6} \times \left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right)$ ، ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(z-2)(z^2-2z+4)=0$.

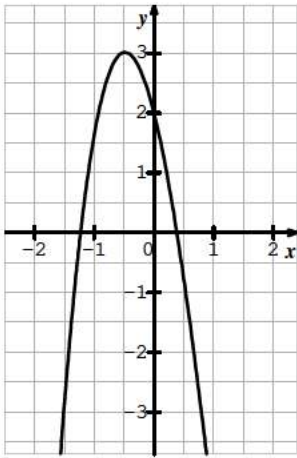
(2) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط A ، B و C التي لاحقاتها

z_A ، z_B و z_C على الترتيب حيث $z_A = 2$ ، $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ و $z_C = 1 - i\sqrt{3}$.
 أ) أكتب z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي ثم أنشئ النقط A ، B و C (يطلب ترك أثر الإنشاء).

(3) أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\left(\frac{2}{z_C}\right)^{2024}$ ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث تكون النقطة H صورة العدد $(z_B)^n$ تنتمي الى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x\sqrt{3}$.

(4) (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقات z حيث $\arg(\bar{z} - 2) = \frac{-2\pi}{3} + 2k\pi$ و k عدد صحيح.
 أ) تحقق أن $B \in (\Gamma)$ ثم عين طبيعة (Γ) .
 ب) بين أن النقطة C هي صورة النقطة B بدوران مركزه A يطلب تعيين زاويته .

التمرين الرابع : (07 نقاط)



(I) m عدد طبيعي معطى نعتبر الدالة f_m و المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f_m(x) = (x^3 - mx)e^{-x} + x + 1$.

(C_m) هو المنحنى الممثل لها في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_m(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x)$.

ب) بين أن للمنحنيات (C_m) مستقيما مقاربا مائلا في جوار $+\infty$ يطلب كتابة معادلته.

(2) بين أن جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثانية يطلب تعيينها .

(II) نضع $m=3$ ونعرف الدالة f على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = f_3(x)$.

(1) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 3 - e^x$. (فيما يلي المنحنى الممثل لها في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$) .

أ) برر وجود حلين α و β للمعادلة $g(x) = 0$ في $\mathbb{R}$ حيث $-1.23 < \alpha < -1.22$ ، $0.38 < \beta < 0.39$.

ب) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(2) أ) بين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = -e^{-x}g(x)$.

ب) حدد إشارة $f'(x)$ ثم أدرس اتجاهات تغير الدالة f و أنجز جدول تغيراتها .

(3) حدد الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x + 1$.

(4) أكتب معادلة المماس (T) في النقطة ذات الفاصلة 0 ثم المماس (T') في النقطة ذات الفاصلة 3 .

تحقق من أن (T) و (T') يشعلان النقطة $A(0;1)$.

(5) أرسم كلا من (T) ، (T') و (Δ) و المنحنى (C_3) .

(6) أ) نبين أن جميع المستقيمت (Δ_p) التي معادلاتها $y = px + 1$ تشمل النقطة $A(0;1)$. (حيث عدد حقيقي) .

ب) ناقش بياننا حسب قيم p عدد إشارة حلول المعادلة $f(x) = px + 1$.

(7) نعتبر الدالة h المعرفة بـ $h(x) = (x^3 - 3x)e^{-x}$.

أ) جد الأعداد الحقيقية a ، b ، c ، d بحيث تكون الدالة H المعرفة بـ $H(x) = (-x^3 + ax^2 + bx + c)e^{-x}$ دالة أصلية لـ h .

ب) أحسب مساحة الحيز من المستوي المحدد من المستوي (C_f) و (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = \sqrt{2}$ و $x = 0$.