بكالوريا تجريبية

الشعبة: رياضيات
المدة: 04 سا و30د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين

الموضوع الأول

يحتوي الموضوع الأول على صفحتين (الصفحة 1 من 5 والصفحة 2 من 5)

التمرين الأول — 04.25 نقطة

كيس يحتوي على: خمس كريات حمراء تحمل الأعداد: 1، e، e، e^2 و e^2 وثلاث كريات سوداء تحمل الأعداد: e، e^2 و e^2 وثلاث كريات خضراء تحمل الأعداد 1، $\frac{1}{e}$ و $\frac{1}{e^2}$ (الكريات متماثلة ولا نفرق بينها باللمس)

نسحب بطريقة عشوائية من هذا الكيس كريتان في آن واحد

نعتبر الأحداث A ، B و C حيث:

◄ A: "سحب كريتان مختلفتان في اللون"

◄ B: "سحب كريتان لهما نفس العدد"

❶ أ/ احسب $P(A)$، $P(B)$ و $P(A \cup B)$

ب/ ما احتمال سحب كريتان مختلفتان في اللون علما أنّ لهما نفس العدد؟

❷ نسمي α و β العددين الظاهرين على الكرتين المسحوبتين،

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب العدد $\ln(\alpha\beta)$

أ/ عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

ب/ احسب احتمال الحادثة "$X^2 > 4$"

❸ نسحب الآن من هذا الكيس ثلاث كريات على التوالي بدون ارجاع بحيث نرتبها ترتيبا تصاعديا عند ظهورها

نعتبر الحدثان C ، D حيث:

◄ C: "سحب كرية واحدة فقط حمراء والكرة الأولى سوداء"

◄ D: "سحب ثلاث كريات تحمل أعداد تشكل حدودا متتابعة من متتالية هندسية"

- احسب $P(C)$ و $P(D)$

التمرين الثاني — 04.25 نقطة

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_n = 2^n$، وليكن S_n المجموع المعرف بـ $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$

❶ اكتب S_n بدلالة n، ثم استنتج أنّ S_n و U_n أوليان فيما بينهما

❷ أ/ ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية لـ U_n على 7

ب/ نعتبر العدد A حيث $A = (U_{2024} + U_{1962} - S_{1445})^{1954} - 2 \times 6^{2022}$

– بيّن أن A يقبل مضاعف لـ 7

ج/ عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها S_{2n} مضاعفا لـ 7

❸ نعتبر المعادلة $(E): 4x - 7y = 3$ ذات المجهولين الصحيحين x و y

أ/ بيّن أن الثنائية $(S_2 - 1; S_1)$ حل لـ (E)، ثمّ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)

ب/ نضع $D = PGCD(x; y)$، عيّن القيم الممكنة لـ D

❹ ليكن P العدد الطبيعي الذي يكتب $\overline{1\alpha\alpha220}$ في النظام ذا الأساس 4، بحيث α عدد طبيعي

- جد قيمة α حتى يكون $(P - 1)$ مضاعفا لـ7، ثمّ اكتب P في النظام العشري

التمرين الثالث — 04.50 نقطة

I) نعتبر العدد المركب $L = 2 + \sqrt{3} + i$

❶ بيّن أن طويلة L هي $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$

❷ تحقق من أنّ: $L = 2\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] + 2i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

❸ أ/ بيّن أنّ: $1+\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta)$

ب/ بيّن أنّ $L = 4\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + 4i\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ (تذكر أنّ: $\sin(2\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta)$)

ج/ اكتب العدد المركب L على شكله الأسي

د/ بين أنّ: $L^6 = (8+4\sqrt{3})^3 i$

II) نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$. النقطتين Ω وP اللتين لاحقتهما $\omega = \sqrt{3}$ و L على الترتيب. وليكن h التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته 2

❶ بيّن أنّ d لاحقة النقطة D صورة النقطة P بالتحاكي h هي $(4+\sqrt{3}) + 2i$

❷ حدد (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث: $|\bar{z} - 4 - \sqrt{3} + 2i| = |L|$

التمرين الرابع — 07.00 نقطة

I) لتكن الدالة العددية f_α المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f_\alpha(x) = e^{2x} - 2\alpha e^x + 3$، حيث α وسيط حقيقي

وليكن (C_α) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

❶ احسب f'_α الدالة المشتقة للدالة f_α، ثمّ عيّن حسب قيم الوسيط الحقيقي α القيم الحدية للدالة f_α

❷ نسمي Ω_α النقطة الحدية لـ (C_α) في حالة وجودها

أ/ عيّن بدلالة α احداثيي النقطة Ω_α

ب/ عيّن مجموعة النقط Ω_α لما α يمسح $\mathbb{R}_+^*$

II) نعتبر الدالة f_1 حيث (C_1) تمثيلها البياني

❶ أ/ عيّن المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_1)

ب/ ادرس تغيرات الدالة f_1، ثمّ شكل جدول تغيراتها

❷ عيّن معادلة المماس (T) لـ(C_1) عند النقطة ذات الترتيبة 3

❸ ارسم كلا من (T) و (C_1)

❹ لتكن (Δ_m) عائلة المستقيمات المعرفة بـ: $y = mx + 3 - m\ln 2$، حيث m وسيط حقيقي

أ/ بيّن أنّ المستقيمات (Δ_m) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيين احداثييها

ب/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $e^x(e^x-2) = m(x-\ln 2)$

III) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = -e^{2x} + 2e^x + 3$ و (C') تمثيلها البياني

❶ اكتب $g(x)$ بدلالة $f_1(x)$، ثمّ بيّن أنّ (C') و (C_1) متناظران بالنسبة إلى المستقيم (D) الذي يطلب تعيين معادلته

❷ ارسم (C')

❸ بيّن أن $A = 1u.a$. حيث A هي مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_1) و(C') والمستقيمان ذو المعادلتان $x = 0$ و $x = \ln 2$

الموضوع الثاني

يحتوي الموضوع الثاني على ثلاث صفحات (من الصفحة 3 من 5 إلى الصفحة 5 من 5)

التمرين الأول — 04.00 نقطة

❶ ادرس حسب قيم بواقي القسمة الاقليدية للعدد 4^n على 13

❷ نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $(E_n) = 286x - 247y = 4^n - 25$ حيث n عدد طبيعي

- عيّن قيم n التي من أجلها المعادلة (E_n) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$

❸ نضع: $n = 3$

أ/ بيّن أن (E_3) تكافئ المعادلة $(E'): 22x - 19y = 3$، ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E')

ب/ ما هي القيم الممكنة لـ$\text{PGCD}(x; y)$ حيث $(x; y)$ حلول المعادلة (E')

ج/ عيّن الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E') بحيث يكون $\text{PGCD}(x; y) = 3$

د/ عيّن الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E') التي تحقق $|2x - y| < 17$

التمرين الثاني — 04.00 نقطة

I) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$، نعتبر α عدد مركب حيث: $\begin{cases} \alpha + \overline{\alpha} = 2\sqrt{2+\sqrt{2}} \\ \alpha\overline{\alpha} = 4 \\ \text{Im}(\alpha) > 0 \end{cases}$

❶ أ/ اكتب العدد α على الشكل الجبري

ب/ اكتب العدد α^2 على الشكل الأسي

❷ أ/ بين أنّ $\alpha = 2e^{\frac{\pi}{8}i}$

ب/ استنتج القيمة المضبوطة لـ$\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

II) من أجل كل كل عدد طبيعي n نضع: $L_n = \alpha^n$

❶ عيّن قيم n التي من أجلها العدد L_{4n} تخيلي صرف

❷ المتتالية العددية (U_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_n = \arg(L_n)$

أ/ بيّن أنّ (U_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب/ احسب بدلالة n عبارة S_n حيث: $S_n = \arg\left(\overline{L_0} \times \overline{L_1} \times \ldots \times \overline{L_n}\right)$

❸ عيّن (E_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق $z = L_1\left(L_2 - e^{i\theta}\right)$ حيث: $\theta \in \mathbb{R}$

❹ عيّن (E_2) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق $\arg\left[\left(iz + i\overline{L_2}\right)^2\right] = \frac{3\pi}{4} + 4k\pi$ حيث: $k \in \mathbb{Z}$

التمرين الثالث — 04.50 نقطة

زهرة نرد ذو ستة أوجه مرقمة من 1 إلى 6، p_k هو احتمال الحصول على الرقم k حيث $(1 \leq k \leq 6)$

هذه الزهرة مغشوشة بحيث:

- الأعداد p_1 ، p_2 ، p_3 ، p_4 ، p_5 و p_6 تشكل بهذا الترتيب متتالية حسابية أساسها r
- والأعداد: p_1 ، p_2 و p_4 تشكل بهذا الترتيب متتالية هندسية أساسها q

❶ اثبت أنّ $p_k = \frac{k}{21}$ من أجل $1 \leq k \leq 6$

❷ نرمي هذه الزهرة مرة واحدة، ونعتبر الحوادث التالية:

A: "العدد المحصل عليه زوجي"

B: "العدد المحصل عليه أكبر أو يساوي 3"

C: "العدد المحصل عليه 3 أو 4"

أ/ احسب احتمال كل من الحوادث A، B و C

ب/ احسب احتمال الحصول على عدد أكبر من أو يساوي 3، علما أنه زوجي

ج/ هل الحادثتان A و B مستقلتان؟

❸ نستعمل الآن هذه الزهرة لإجراء اللعبة التالية:

لدينا صندوق U_1 يحتوي على كرة حمراء و ثلاث كرات سوداء، وصندوق U_2 يحتوي على كريتين حمراوين وكرة سوداء واحدة، يأتي لاعب ويرمي الزهرة:

- إذا حصل على رقم زوجي يسحب عشوائيا كرة واحدة من الصندوق U_1
- إذا حصل على رقم فردي يسحب عشوائيا كرة واحدة من الصندوق U_2

اللاعب يعتبر رابحا إذا سحب كرة حمراء، ونسمي G الحادثة: "اللاعب رابح"

أ/ عيّن احتمال الحادثة $A \cap G$، ثم احتمال الحادثة G

ب/ علما أن اللاعب رابح، عيّن احتمال أن يكون حصل على عدد زوجي.

التمرين الرابع — 07.50 نقطة

n عدد طبيعي غير معدوم

I) h_n الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بـ: $h_n(x) = x^2 - n + n\ln x$

❶ أ/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} h_n(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} h_n(x)$

ب/ ادرس اتجاه تغير h_n ، ثمّ شكل جدول تغيراتها

❷ أ/ بيّن أنّ المعادلة $h_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n بحيث $1 \le \alpha_n < e$

ب/ استنتج إشارة $h_n(x)$ على $\mathbb{R}_+^*$

II) نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بـ: $f_n(x) = x - n - \dfrac{n\ln x}{x}$

و (C_n) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، (الوحدة $2cm$)

❶ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} h_n(x)$ وفسّر النتيجة هندسيا ، ثمّ احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f_n(x)$

❷ أ/ بيّن أنّ المستقيم (Δ_n) ذو المعادلة $y = x - n$ مقارب مائل لـ (C_n)

ب/ ادرس وضعية (C_n) بالنسبة إلى (Δ_n)

❸ أ/ بيّن أنه من أجل كل $x > 0$: $f_n'(x) = \dfrac{h_n(x)}{x^2}$

ب/ استنتج اتجاه تغير f_n، ثمّ شكل جدول تغيراتها

❹ تحقق أنّ $f_n(\alpha_n) = 2\alpha_n - n - \dfrac{n}{\alpha_n}$

❺ بيّن أنه يوجد مماس (T_n) للمنحنى (C_n) يوازي (Δ_n) ثمّ اكتب معادلة له

❻ أ/ تحقق أنّ $t = 1$ هو الحل الوحيد للمعادلة $1 - t = 2\ln t$

ب/ بيّن أنه يوجد مماس وحيد (D_n) للمنحنى (C_n) يشمل مبدأ المعلم، ثمّ اكتب معادلة له

III) g الدالة العدية المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ كما يلي: $g(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$

❶ ادرس تغيرات الدالة g

❷ بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β بحيث $0.5 < \beta < 0.6$

❸ استنتج الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1})

❹ بيّن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$، $f_n(\beta) = \beta$، ماذا تستنتج؟

IV)

❶ ارسم (C_2) (نأخذ $1.2 < \alpha_2 < 1.3$ و $f(\alpha_2) \approx -1.1$)

❷ عيّن قيم الوسيط الحقيقي m التي من أجلها المعادلة $f_2(x) = mx$ حلين مختلفين

﴿بالتوفيق والنجاح لجموع التلاميذ الشرفاء﴾

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

اللقب: عوسيد

الاسم: الخليل

تاريخ ومكان الميلاد: 7-5-1996 اكلعة

رقم التسجيل:

وزارة التربيـــــة الوطنيـــــة

امتحان: شهادة البكالوريا

دورة: جوان 2024

الشعبة: رياضيات

اختبار مادة: الرياضيات

يوم: 10 جوان 2024

امضاء المترشح (ة):

اسم ولقب وتوقيع الحراس

1. ..... 2. ..... 3. .....

لا بد من ملأ أعلى هذه الوثيقة – ويمنع التوقيع في آخر ورقة الاختبار

اختبار مـــــادة: الرياضيات

الموضوع الأول

e^2 e 1 $\frac{1}{e}$ $\frac{1}{e^2}$

e^2 e 1

e^2 e

e^2

التمرين الأول

(1) أ- حساب: $P(A)$ ، $P(B)$ ، $P(\overline{A})$ ، $P(A \cap B)$ و $P(A \cup B)$

- $P(A) = 1 - \frac{C_5^2 + C_3^2 + C_3^2}{C_{11}^2} = \frac{39}{55}$

- $P(B) = \frac{C_4^2 + C_3^2 + C_2^2}{C_{11}^2} = \frac{10}{55} = \frac{2}{11}$

$P(A \cap B) = \frac{C_2^1 C_2^1 + C_2^1 C_1^1 + C_1^1 C_1^1}{C_{11}^2} = \frac{7}{55}$ لدينا:

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{34}{55}$ ومنه:

ب/ حساب احتمال سحب كريتان مختلفتان في اللون علما أنهما تحملان

نفس العدد :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{7}{55}}{\frac{10}{55}} = \frac{7}{10}$$

(2) أ/ قانون احتمال X :

$X(\Omega) = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$ لدينا :

حيث :

$$p(X=-3) = \frac{C_1^1 C_1^1}{C_{11}^2} = \frac{1}{55} \quad ; \left\{\frac{1}{e^2} \times \frac{1}{e} = e^{-3}\right\}$$

$$p(X=-2) = \frac{C_2^1 \cdot C_1^1}{C_{55}^2} = \frac{2}{55} \quad ; \left\{\frac{1}{e^2} \times 1 = e^{-2}\right\}$$

$$p(X=-1) = \frac{C_1^1 C_4^1 + C_1^1 C_2^1}{C_{55}^2} = \frac{6}{55} \quad ; \left\{\frac{1}{e^2} \times e = \frac{1}{e} \times 1 = e^{-1}\right\}$$

$$p(X=0) = \frac{C_2^2 + C_3^1 C_1^1 + C_4^1 C_1^1}{C_{55}^2} = \frac{8}{55} \quad ; \left\{1 \times 1 = \frac{1}{e^2} \times e^2 = \frac{1}{e} \times e = 1\right\}$$

$$p(X=1) = \frac{C_2^1 C_3^1 + C_4^1 C_1^1}{C_{55}^2} = \frac{10}{55} \quad ; \left\{1 \times e = e^2 \times \frac{1}{e} = e\right\}$$

$$p(X=2) = \frac{C_2^1 C_4^1 + C_3^2}{C_{55}^2} = \frac{11}{55} \quad ; \left\{1 \times e^2 = e \times e = e^2\right\}$$

$$p(X=3) = \frac{C_4^1 \cdot C_3^1}{C_{11}^2} = \frac{12}{55} \quad ; \{ e^2 \times e = e^3 \}$$

$$p(X=4) = \frac{C_3^2}{C_{11}^2} = \frac{3}{55} \quad ; \{ e^2 \times e^2 = e^4 \}$$

= وعليه

$X = x_i$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{55}$	$\frac{2}{55}$	$\frac{6}{55}$	$\frac{8}{55}$	$\frac{10}{55}$	$\frac{11}{55}$	$\frac{12}{55}$	$\frac{3}{55}$

ب/

$$p(X^2 > 4) = p(|X| > 2)$$
$$= p(X < -2) + p(X > 2)$$
$$= p(X=-3) + p(X=3) + p(X=4)$$
$$= \frac{16}{55}$$

(3) احسب : $p(A)$, $p(B)$

$$p(A) = \frac{2 A_5^1 A_3^2 A_5^3}{A_{11}^3} = \frac{150}{990} = \frac{5}{33}$$

$$p(B) = \frac{A_2^1 A_3^1 A_4^1 + A_1^1 A_1^1 A_2^1 + A_1^1 A_2^1 A_4^1}{A_{11}^3} = \frac{34}{990} = \frac{17}{495}$$

التمرين الثاني

1) كتابة S_n بدلالة n:

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$، لدينا:

$$S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$$
$$= 2^0 + 2^1 + \dots + 2^n$$
$$= 2^0 \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1}$$
$$= 2^{n+1} - 1$$

- استنتاج أن $U_n \wedge S_n = 1$:

لدينا: $S_n = 2^{n+1} - 1$

$$S_n = 2^n \times 2 - 1$$
$$2(2)^n - S_n = 1$$
$$2U_n - S_n = 1$$

توجد ثنائية $(u, v) = (2, -1)$ تحقق $uU_n + vS_n = 1$

ومنه حسب مبرهنة بيزو فإن $U_n \wedge S_n = 1$

2) أ- بواقي قسمة U_n على 7:

لدينا:

$$U_0 = 2^0 \equiv 1 [7]$$
$$U_1 = 2^2 \equiv 2 [7]$$
$$U_2 = 2^2 \equiv 4 [7]$$
$$U_3 = 2^3 \equiv 1 [7]$$

ومنه بواقي قسمة u_n على 7 نلخصها في الجدول التالي :

$n=$	3α	$3\alpha+1$	$3\alpha+2$	$\alpha \in \mathbb{N}$
$u_n \equiv$	1	2	4	$[7]$

ب/ لتعيين أن A مضاعف 7 :

$$A \equiv (u_{2024} + u_{1962} - S_{1445})^{1954} - 2(6)^{2022} \quad [7]$$

$$\equiv \left(2^{2024} + 2^{1962} - 2^{1445+1} + 1\right)^{1954} - 2(6)^{2022} \quad [7]$$

$$\equiv \left(2^{3\alpha+2} + 2^{3\alpha} - 2^{3\alpha} + 1\right)^{1954} - 2(-1)^{2022} \quad [7]$$

$$\equiv (4 + 1 - 1 + 1)^{1954} - 2 \quad [7]$$

$$\equiv 5^{1954} - 2 \quad [7]$$

$$\equiv (-2)^{1954} - 2 \quad [7]$$

$$\equiv 2^{1954} - 2 \quad [7]$$

$$\equiv 2^{3\alpha+1} - 2 \quad [7]$$

$$\equiv 2 - 2 \quad [7]$$

$$\equiv 0 \quad [7]$$

ومنه : $A \equiv 0 \quad [7]$

ج/ تعيين قيم n التي من أجلها S_{2n} مضاعف 7 :

لدينا : $S_{2n} \equiv 0 \quad [7]$

معناه : $2^{2n+1} - 1 \equiv 0 \quad [7]$

ومنه : $2^{2n+1} \equiv 1[7]$

ومنه : $2n+1 = 3\alpha$ حيث $\alpha \in \mathbb{N}^*$

ومنه : $2n+1 \equiv 0[3]$

ومنه : $2n \equiv 2[3]$

ومنه : $n \equiv 1[3]$ ($3 \wedge 2 = 1$: أي)

ومنه $n = 3k+1$ حيث $k \in \mathbb{N}$

③ أ/ نتبين أن $(S_2 - 1 ; S_1)$ حل لـ (E) :

لدينا : $4(S_2 - 1) - 7S_1 = 4(2^{2+2} - 2 - 1) - 7(2^{1+1} - 1)$

$= 4(6) - 7(3)$

$= 3$

ومنه الثنائية $(S_2 - 1 ; S_1)$ حل لـ (E)

ب/ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) :

لدينا $\begin{cases} 4x - 7y = 3 \\ 4(6) - 7(3) = 3 \end{cases}$

بطرح المعادلتين طرفا لطرف نجد : $4(x-6) - 7(y-3) = 0$

ومنه : $4(x-6) = 7(y-3)$

ومنه : $4 \Big| 7(y-3)$ ، $7 \Big| 4(x-6)$

بما أن : $4 \wedge 7 = 1$

فإنه (حسب خواص) لدينا : $4 \Big| y-3$ ، $7 \Big| x-6$

ومنه $\begin{cases} x-6 = 7k \\ y-3 = 4k \end{cases}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

ومنه : $\begin{cases} x = 7k+6 \\ y = 4k+3 \end{cases}$

اذن حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حيث :

$(x,y) \in \{(7k+6 ; 3k+3) / k \in \mathbb{Z}\}$

④ تعيين القيم الممكنة لـ D :

لدينا : $D = x \wedge y$

ومنه : $D \mid y$ ، $D \mid x$

ومنه $D \mid 4x - 3y$

ومنه $D \mid 3$

اذن $D \in \{1, 3\}$

④ تعيين قيمة α :

لدينا : $P = \overline{1\alpha\alpha220}^{4}$

$= 0(4)^0 + 2(4)^1 + 2(4)^2 + \alpha(4)^3 + \alpha(4)^4 + 1(4)^5$

$\equiv 320\alpha + 1064$

لدينا $P - 1 \equiv 0 \ [7]$

معناه : $320\alpha + 1064 - 1 \equiv 0 \ [7]$

ومنه : $5\alpha + 6 \equiv 0 \ [7]$

ومنه : $5\alpha \equiv 1 \ [7]$

ومنه : $15\alpha \equiv 3 \ [7]$

ومنه $\alpha \equiv 3 \ [7]$

ومنه : $\alpha = 7k + 3$ حيث $k \in \mathbb{N}$

ولدينا : $0 \leq \alpha < 4$

ومنه : $\alpha = 3$

وعليه : $P = \overline{133220}^{4} = 2024$

التمرين الثالث

(I) ① نبين أن : $|L| = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$

لدينا :

$$|L| = |2+\sqrt{3}+i|$$
$$= \sqrt{(2+\sqrt{3})^2 + (1)^2}$$
$$= \sqrt{4+3+4\sqrt{3}+1}$$
$$= \sqrt{8+4\sqrt{3}}$$
$$= \sqrt{4(2+2\sqrt{3})}$$
$$= 2\sqrt{2+2\sqrt{3}}$$

② التحقق أن : $L = 2\left[1+\cos\frac{\pi}{6}\right] + 2i\sin\frac{\pi}{6}$

لدينا :

$$L = 2+\sqrt{3}+i$$
$$= 2\left[1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right] + 2i\,\frac{1}{2}$$
$$= 2\left[1+\cos\frac{\pi}{6}\right] + 2i\sin\frac{\pi}{6}$$

③ أ/ نبين أن : $1+\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta$

لدينا :

$$\cos^2\theta = \left[\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right]^2$$
$$= \frac{e^{2\theta i}+e^{-2\theta i}+2}{4}$$
$$= \frac{e^{2\theta i}+e^{-2\theta i}}{4} + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{2\theta i}+e^{-2\theta i}}{2} + 1\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\cos(2\theta)+1\right]$$

ومنه : $\cos^2\theta = \frac{1}{2}[\cos 2\theta + 1]$

ومنه : $1+\cos 2\theta = 2\cos^2\theta$

ب/ تبيين أن : $L = 4\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + 4i\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

$$L = 2\left[1 + \cos\frac{\pi}{6}\right] + 2i\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= 2\left[1 + \cos\left(2\cdot\frac{\pi}{12}\right)\right] + 2i\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{12}\right)$$

$$= 2\left[2\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)\right] + 2i\,2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$= 4\cos^2\frac{\pi}{12} + 4i\cos\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12}$$

ج/ كتابة L على الشكل الأسي :

$$L = 4\cos^2\frac{\pi}{12} + 4i\cos\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12}$$

$$= 4\cos\frac{\pi}{12}\left[\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right]$$

$$= 4\cos\frac{\pi}{12}\,e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$= 2\sqrt{2+\sqrt{3}}\,e^{i\frac{\pi}{12}}$$

د/ تبيين أن : $L^6 = (8+4\sqrt{3})^3 i$

لدينا :

$$L^6 = \left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\,e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^6$$

$$= \left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^6 e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2\right]^3 i$$

$$= \left[4(2+\sqrt{3})\right]^3 i$$

$$= (8+4\sqrt{3})^3 i$$

II ① لدينا : $h : z' - \omega = 2(z - \omega)$

ومنه : $d - \omega = 2(L - \omega)$

ومنه :

$$d = 2(L - \omega) + \omega$$
$$= 2(2+\sqrt{3}+i-\sqrt{3}) + \sqrt{3}$$
$$= 2(2+i) + \sqrt{3}$$
$$= 4 + \sqrt{3} + 2i$$

② تحديد طبيعة (Γ) :

لدينا :
$$\frac{|z-4-\sqrt{3}+2i|}{|z-4-\sqrt{3}+2i|} = |L|$$
$$|z-4-\sqrt{3}+2i| = |L|$$
$$|z-4-\sqrt{3}-2i| = |L|$$
$$|z-(4+\sqrt{3}+2i)| = |L|$$
$$|z-d| = |L|$$
$$DM = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

ومنه (Γ) هي الدائرة التي مركزها D ونصف قطرها $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$

التمرين الرابع

I) ① حساب f'_α :

لدينا f_α قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث :

$$f'_\alpha(x) = 2e^{2x} - 2\alpha e^x$$
$$= (e^x - \alpha)2e^x$$

* لتعيين اتجاه تغير f_α :

لدينا : $2e^x > 0$

ولدينا : $e^x - \alpha = 0$ معناه $e^x = \alpha$

* إذا : $\alpha < 0$: معناه $x = \ln\alpha$ (وهذا مستحيل)

ومنه لا توجد أي قيمة حدية لـ f_α إذا كان $\alpha \leq 0$

* إذا : $\alpha > 0$: معناه $x = \ln\alpha$

إذن f_α تقبل قيمة حدية عند $x = \ln\alpha$.

② أ/ تعيين أحداثي Ω_α :

لما $\alpha > 0$ لدينا :

$$f_\alpha(\ln\alpha) = e^{2\ln\alpha} - 2\alpha e^{\ln\alpha} + 3$$
$$= e^{\ln\alpha^2} - 2\alpha\alpha + 3$$
$$= \alpha^2 - 2\alpha^2 + 3 = 3 - \alpha^2$$

ومنه : $\Omega_\alpha(\ln\alpha ; 3-\alpha^2)$

ب/ تعيين مجموعة النقط Ω_α لما $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$:

لدينا : $\Omega_\alpha(\ln\alpha ; 3-\alpha^2)$

لدينا : $\begin{cases} x = \ln\alpha \\ y = 3-\alpha^2 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} \alpha = e^x \\ y = 3-(e^x)^2 \end{cases}$

ومنه $y = 3 - e^{2x}$

إذن مجموعة النقط Ω_α لما $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ هي منحنى الدالة $x \mapsto 3 - e^{2x}$

II ① أ/ تعيين المستقيمات المقاربة لـ (C_1) :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(e^{2x} - 2e^x + 3)$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[e^x(e^x - 2) + 3\right]$$

$$= +\infty$$

بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}((e^x)^2 - 2e^x + 3) = 3$

بما أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

ومنه (C_1) يقبل مقارب معادلته $y=3$

ب/ تغيرات f_1:

لدينا: $f_1'(x)=(e^x-1)2e^x$

بما أن $2>0$

فإن (C_1) يقبل مماسا موازيا عند $\Omega_1(\ln(1);3-1^2)$

أي عند: $\Omega_1(0;2)$

وعليه:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_1'(x)$	$-$	0	$+$

لدينا f_1 متزايدة تماما على $]0,+\infty[$

ومتناقصة تماما على $]-\infty,0[$

جدول تغيرات f_1:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_1'(x)$	$-$	0	$+$
$f_1(x)$	3	$\searrow$ 2	$\nearrow$ $+\infty$

2) معادلة المماس (T)

لدينا: $f_1(x)=3$

معناه $e^{2x}-2e^x+3=3$

ومنه: $e^x(e^x-2)=0$

ومنه: $e^x-2=0$ (لأن $e^x\neq 0$)

ومنه: $e^x=2$

ومنه $x=\ln 2$

ومنه (T) مماس لـ (C_1) في النقطة $A(\ln 2;3)$

اذن :

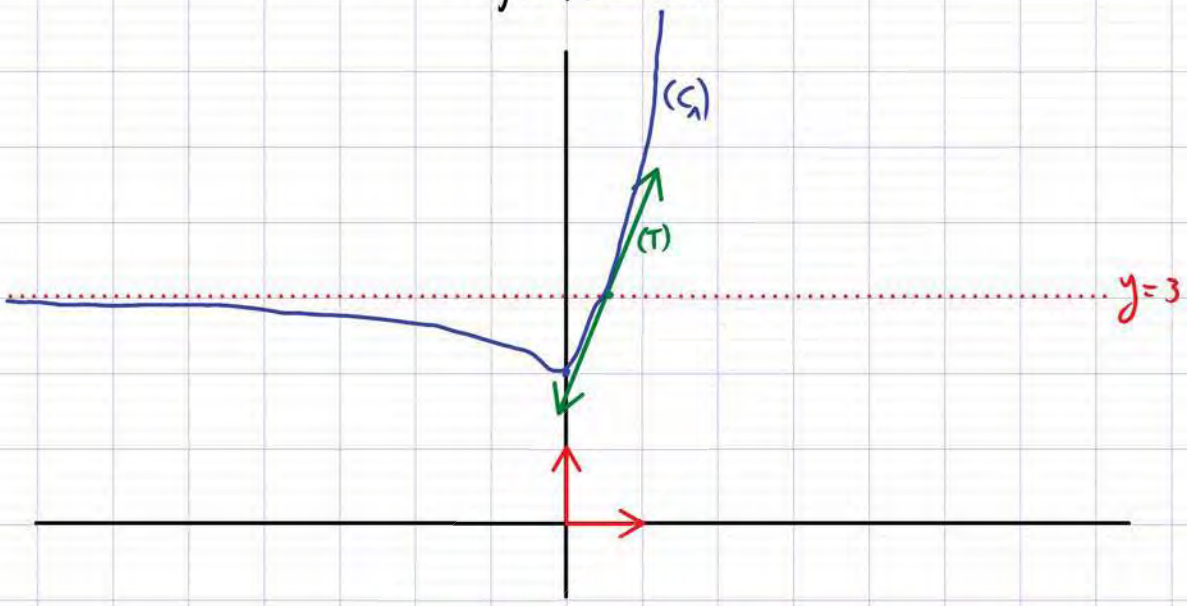
$$(T): y = f_1'(\ln 2)(x - \ln 2) + f_1(\ln 2)$$

$$= 4(x - \ln 2) + 3$$

$$= 4x - 4\ln 4 + 3$$

③ نرسم (T) و (C_1)

لدينا : $\begin{cases} f(1) \approx 4,95 \\ f(2) \approx 42,82 \end{cases}$



④ p/ نبين أن (Δ_m) تشمل نقطة ثابتة :

لدينا $(\Delta_m): y = mx + 3 - m\ln 2$

ومنه : $mx + 3 - m\ln 2 - y = 0$

ومنه : $(x - \ln 2)m + 3 - y = 0$

ومنه : $\begin{cases} x - \ln 2 = 0 \\ 3 - y = 0 \end{cases}$

ومنه : $\begin{cases} x = \ln 2 \\ y = 3 \end{cases}$

اذن جميع المستقيمات (Δ_m) تدور حول $A(\ln 2; 3)$

ب/ المناقشة البيانية :

لدينا : $e^x(e^x-2)=m(x-\ln 2)$

ومنه : $e^{2x}-2e^x+3=mx-m\ln 2+3$

ومنه : $f_1(x)=y\ (\Delta_m)$ .... (E)

وعليه حلول (E) هي فواصل نقط تقاطع (C_1) مع المستقيمات (Δ_m)

وهي :

- لما $m\leq 0$: المعادلة (E) حل وحيد
- لما $0<m<4$: المعادلة (E) حلان
- لما $m=4$: المعادلة (E) حل وحيد (مضاعف)
- لما $m>4$: المعادلة (E) حلان.

III) ① كتابة $g(x)$ بدلالة $f_1(x)$:

من أجل كل $x\in\mathbb{R}$، لدينا :

$$\begin{aligned} g(x) &= -e^{2x}+2e^x+3 \\ &= -(e^{2x}-2e^x+3)+6 \\ &= -f_1(x)+6 \end{aligned}$$

ومنه $g(x)=6-f_1(x)$

تذكير

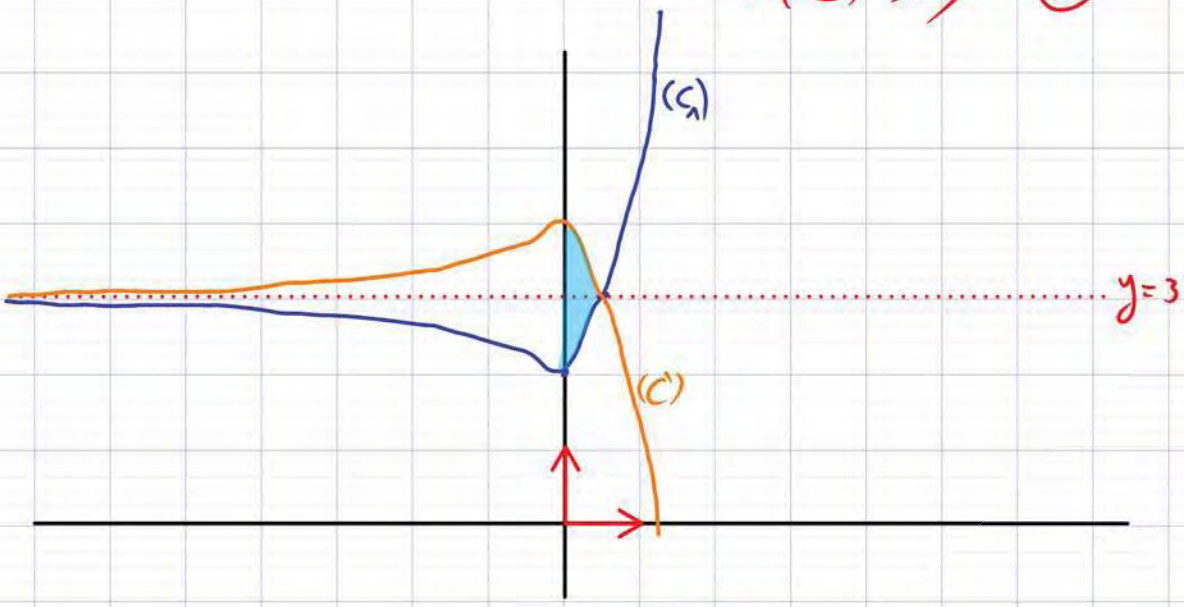
(C_f) و (C_g) متناظران بالنسبة للمستقيم ذو المعادلة $y=a$ معناه : $f(x)+g(x)=2a$

لدينا $g(x)=-f_1(x)+6$

ومنه : $g(x)+f_1(x)=2(3)$

ومنه (C_1) و (C') متناظران بالنسبة للمستقيم ذو المعادلة $y=3$

② رسم (C') :



③ تبين أن $A=1$:

$$A=\int_0^{\ln 2}\left(g(x)-f_1(x)\right)dx$$

$$=\int_0^{\ln 2}\left(-e^{2x}+2e^{x}+3-e^{2x}+2e^{x}-3\right)dx$$

$$=\int_0^{\ln 2}\left(-2e^{2x}+4e^{x}\right)dx$$

$$=\left[-e^{2x}+4e^{x}\right]_0^{\ln 2}$$

$$=-e^{2\ln 2}+4e^{\ln 2}+e^{2(0)}-4e^{0}$$

$$=-4+8+1-4=\boxed{1\ u.a}$$