



على المترشح أن يختار احد الموضوعين التاليين
الموضوع الأول

*** التمرين الأول : (04 نقاط)**

I. يحتوي صندوق على أربع كرات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 2 و 3 و ثلاث كرات سوداء تحمل الأرقام 1 ، 2 و 3 وكريتين حمراوين تحملان الرقمين 2 و 3 كل الكرات متماثلة ولا نفرق بينها باللمس ، نسحب عشوائيا من الصندوق كرتين على التوالي دون إرجاع ونعتبر الحادثتين التاليتين: A "الحصول على كرتين من نفس اللون " B "الحصول على كرتين تحملان رقمين فرديين "

(1) أثبت أن : $P(A) = \frac{5}{18}$ ، ثم احسب $P(B)$

(2) - ا - احسب $P(A \cap B)$ ، هل الحادثتين A و B مستقلتان ؟

ب - استنتج احتمال الحادثة " الحصول على كرتين من نفس اللون او تحملان رقمين فرديين "

II. ننزع الكريات الحمراء من الصندوق ونقترح اللعبة التالية : للمشاركة يدفع اللاعب α د ج ، (α عدد طبيعي معطى)

ويسحب كرتين من الكيس في آن واحد فإذا سحب كرتين بيضاوين يخسر مادفعه وإذا سحب كرتين مختلفتين

في اللون يعاد له مادفعه وإذا سحب كرتين سوداوين يحصل على 100 د ج

ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل قيمة الربح الجبري للاعب بدلالة α

(1) برر ان قيم المتغير العشوائي X هي $X \in \{-\alpha, 0, 100 - \alpha\}$ ، ثم عرف قانون احتماله

(2) عين اصغر قيمة للعدد α حتى تكون اللعبة ليست في صالح اللاعب

*** التمرين الثاني : (04 نقاط)**

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ ب : $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{\sqrt{4 - u_n^2}}$

(1) ا) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq \sqrt{2}$.

ب) بين أن : $u_{n+1}^2 - u_n^2 = \frac{(2 - u_n^2)^2}{4 - u_n^2}$ ، ثم استنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة .

(2) بين أن المتتالية (u_n) متقاربة .

(3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب : $v_n = \frac{u_n^2}{2 - u_n^2}$

ا) بين أن (v_n) متتالية حسائية أساسها 1 .

ب) اكتب v_n و u_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

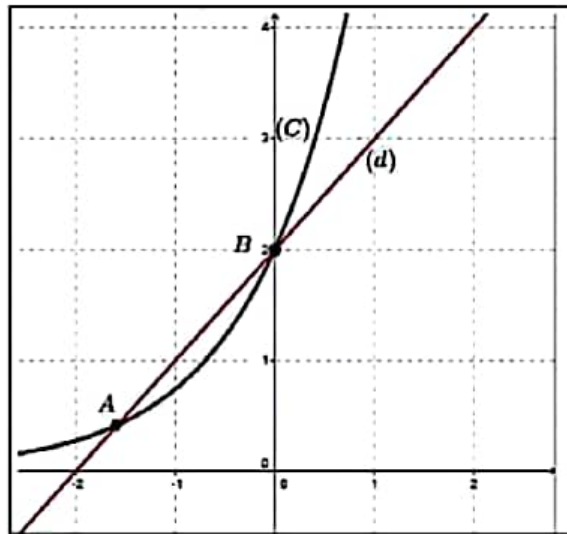
(4) نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ ب : $w_n = \ln\left(\frac{u_n}{2}\right)$

احسب بدلالة n المجموع $S_n = w_1 + w_2 + \dots + w_n$.

* التمرين الثالث : (05 نقاط)

- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z + \sqrt{3} - 3i)(z^2 - 6z + 12) = 0$
- (2) في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط : A ، B و C التي لواحقتها على الترتيب $z_C = -\sqrt{3} + 3i$ ، $z_B = 3 - i\sqrt{3}$ ، $z_A = 3 + i\sqrt{3}$
- (أ) اكتب كلا من z_C و z_A على الشكل الأسّي ، وبين أن $\frac{z_C}{z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، ثم استنتج بدقة طبيعة المثلث OAC
- (ب) بين أن : $\left(\frac{z_C}{z_A}\right)^{2024} - i\left(\frac{z_C \times z_B}{12}\right)^{1445} = 2$
- (3) لتكن النقطة D نظيرة C بالنسبة الى حامل محور الفواصل لاحقتها z_D ، بين أن : $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_B} = i$
- ماذا تستنتج بالنسبة للمستقيمين (BC) و (AD)
- (4) احسب z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABO
- (5) - أ - عين (γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = 6$
- ب - عين (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق : $z = 3 + i\sqrt{3} + (1+i)ke^{i\frac{\pi}{6}}$ حيث $k \in \mathbb{R}_+$

* التمرين الرابع : (07 نقاط)



- الجزء الأول : نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 2e^x - x - 2$.
- (C) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto 2e^x$ و (d) المستقيم ذو المعادلة $y = x + 2$
- كما هو موضح في الشكل .
- (C) و (d) يتقاطعان في نقطتان A و B فاصلتهما α و 0 على الترتيب حيث :
- $-1.6 < \alpha < -1.5$
- (1) بقراءة بيانية حدد الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (d) .
- (2) استنتج على $\mathbb{R}$ إشارة الدالة g .
- الجزء الثاني : نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، (وحدة الطول 2cm)

- (1) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ثم احسب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ وفسر بيانيا النتيجة الأخيرة .
- (2) أ - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = e^x g(x)$. ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f ، و شكل جدول تغيراتها .
- ج - بين أن : $f(\alpha) = -\frac{\alpha(\alpha+2)}{4}$ ثم عين حصرا للعدد $f(\alpha)$. واحسب $f(1)$ ثم ارسم (C_f) .
- (3) أ . باستعمال التكامل بالتجزئة جد دالة أصلية للدالة $x \mapsto (x+1)e^x$ على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم عند القيمة 0 .
- ب - λ عدد حقيقي سالب تماما ، احسب بدلالة λ العدد الحقيقي $A(\lambda) = 4 \int_{\lambda}^0 f(x) dx$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

الموضوع الثاني

* التمرين الأول : (04 نقاط)

U_1 و U_2 صندوقان متماثلان يحتوي U_1 على 5 كرات حمراء و 4 كرات بيضاء ويحتوي U_2 على 4 كرات حمراء و 3 كرات بيضاء (الكرات متماثلة لانفرق بينها عند اللمس) .

نرمي زهر نرد غير مزيف ، إذا تحصلنا على رقم مضاعف لـ 3 نسحب كرتين في آن واحد من الصندوق U_1 ، وفي باقي الحالات نسحب كرتين على التوالي مع إرجاع الكرة المسحوبة من U_2 .

نسمي الحدث A "الحصول على عدد مضاعف للعدد 3"

و نسمي الحدث B "الحصول على كرتين من نفس اللون"

(1) انقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثم اكملها

(2) احسب $P(B)$

(3) علما ان الكرتين من نفس اللون ما احتمال ان يكونا من الصندوق U_2

(4) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب العدد 2 في حالة كانت

الكرتين من نفس اللون والعدد -1 في حالة كانت الكرتين مختلفتين في اللون

أ - عرف قانون الاحتمال للمتغير X

ب - تحقق ان $E(X) = \frac{205}{441}$ ، $E(X)$ الامل الرياضي للمتغير X

* التمرين الثاني : (04 نقاط)

I. α و β عددين مركبين ، حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ الجملة :
$$\begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ \overline{\alpha} - \overline{\beta} = 3 - 2i \end{cases}$$

II. في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط : A ، B و C التي لواحقتها على الترتيب

$$z_C = -\sqrt{2} - i\sqrt{6} \quad , \quad z_B = \sqrt{2} + i\sqrt{6} \quad , \quad z_A = 2 + 2i$$

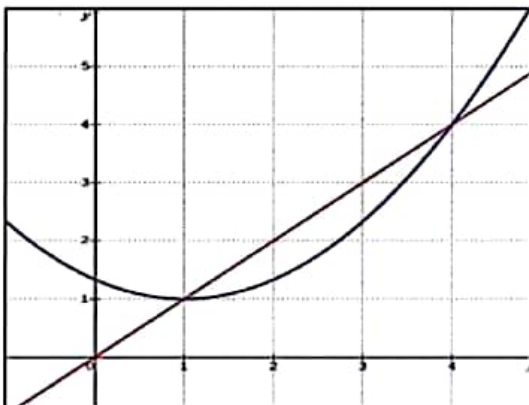
(1) اكتب كلا من z_B و z_A على الشكل الأسّي

(2) - أ - اكتب $\frac{z_B}{z_A}$ على الشكلين الجبري و الاسّي

ب - استنتج القيمة المضبوطة لكلا من $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

(3) بين أن : $\frac{z_B}{z_C} = -1$ ، ثم استنتج ان النقط O ، B و C في استقامية

(4) عين (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق : $|i(\overline{z} - 2) - 2| = 3$



* التمرين الثالث : (05 نقاط)

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة بـ : $U_0 = 3$ و من اجل كل عدد طبيعي n :

$$U_{n+1} = 1 + \frac{1}{3}(U_n - 1)^2$$

في الشكل المقابل (C_h) هو التمثيل البياني للدالة h المعرفة على IR بـ :

$$h(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1)^2 \quad \text{و} \quad (\Delta) \text{ المستقيم ذو المعادلة } y = x$$

(1) أ - اعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثل على محور الفواصل الحدود U_0 ، U_1 ، U_2 و U_3 دون حسابها

موضحا خطوط الرسم (الوثيقة المرفقة في الصفحة 5 / 5)

ب - ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) وتقاربها

(2) أ - برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n : 1 \leq U_n \leq 4$

ب - بين انه من اجل كل عدد طبيعي $n : U_{n+1} - U_n = \frac{1}{3}(U_n - 1)(U_n - 4)$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (U_n)

ج - استنتج ان المتتالية (U_n) متقاربة ، وان $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$

(3) نعتبر المتتالية العددية (V_n) المعرفة على IN كما يلي : $V_n = \ln\left(\frac{U_n - 1}{3}\right)$

أ - بين ان المتتالية (V_n) هندسية أساسها 2 يطلب تعيين حدها الأول

ب - اكتب V_n بدلالة n ، ثم تحقق ان : $U_n = 3e^{2^n \ln\left(\frac{2}{3}\right)} + 1$ و احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

(4) من اجل كل عدد طبيعي n نضع : $W_n = \frac{(U_0 - 1)(U_1 - 1)(U_2 - 1) \times \dots \times (U_n - 1)}{3^n}$

✓ بين ان $W_n = 3e^{\ln\left(\frac{2}{3}\right)(2^{n+1}-1)}$ ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n$

* التمرين الرابع : (07 نقاط)

الجزء الأول : نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = x - 1 - \ln x$

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

(2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \in]0; +\infty[$: $g(x) \geq 0$.

الجزء الثاني : f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - x \ln x & ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ - بين أن الدالة f مستمرة على 0 .

ب - ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على 0 وفسر النتيجة بيانيا .

(2) بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

(3) أ - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \in]0; +\infty[$: $f'(x) = x + g(x)$.

ب - استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

(4) أ - بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مماس للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1 .

ب - بين أنه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$: $f(x) - x = xg(x)$ ، ثم استنتج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

(5) احسب $f(e)$ ، ثم أنشئ كل من المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f)

(6) باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$: $\int_1^x t \ln(t) dt = \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}$.

(7) n عدد طبيعي حيث : $n \geq 2$. نسمي A_n مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها :

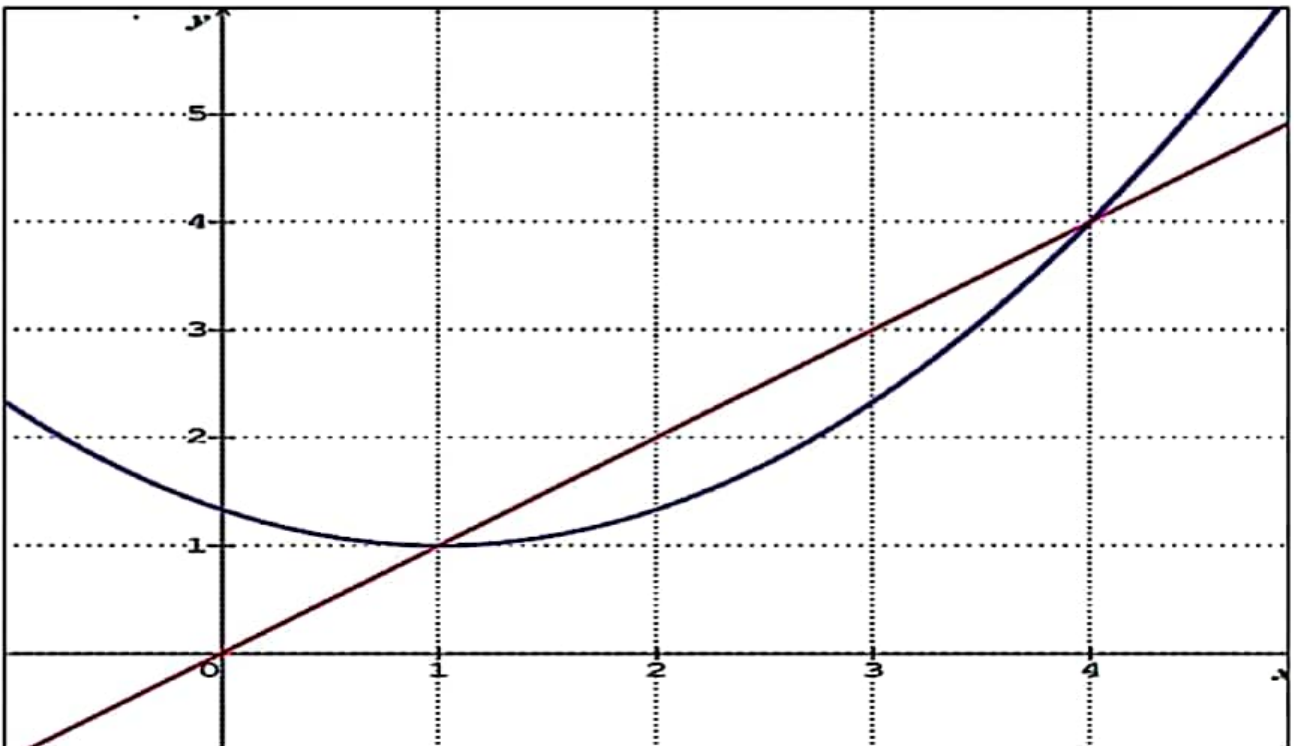
$$x = 1 \text{ و } x = \frac{1}{n}, y = 0$$

أ - بين أن : $A_n = \frac{7}{12} - \frac{\ln(n)}{2n^2} - \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{3n^3}$.

ب - احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$. ماذا تستنتج هندسياً ؟ .

الوثيقة المرفقة - خاصة بالتمرين الثالث من الموضوع الثاني

اللقب والاسم : القسم :



تصحيح مقترح للبكالوريا التجريبية لمادة الرياضيات ماي 2024 نهائي علوم تجريبية

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

1) لدينا : $P(A) = \frac{A_4^2 + A_3^2 + A_2^2}{A_9^2} = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}$ ، و $P(B) = \frac{A_6^2}{A_9^2} = \frac{30}{72} = \frac{5}{12}$.

2) أ- لدينا : $P(A \cap B) = \frac{A_3^2 + A_2^2}{A_9^2} = \frac{8}{72} = \frac{1}{9}$.

لدينا : $P(A) \times P(B) = \frac{25}{216} \neq P(A \cap B)$ ومنه الحائتين A و B غير مستقلتان .

ب- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{7}{12}$.

الـ

1) إذ سحب اللاعب كرتين ببيضاوين فإن قيمة X هي : $-\alpha$ ، وإذا سحب كرتين مختلفتين في اللون فإن قيمة X هي 0 ، وإذا سحب كرتين سوداوين فإن قيمة X هي $100 - \alpha$ ، ومنه قيم المتغير العشوائي X هي $\{-\alpha, 0, 100 - \alpha\}$ ،

* قانون احتمال X .

لدينا : $P(X = 100 - \alpha) = \frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{1}{7}$ و $P(X = 0) = \frac{C_4^1 \times C_3^1}{C_7^2} = \frac{4}{7}$ ، $P(X = -\alpha) = \frac{C_4^2}{C_7^2} = \frac{2}{7}$.

x_i	$-\alpha$	0	$100 - \alpha$
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

2) لدينا $E(X) = \frac{100 - 3\alpha}{7}$ ومنه $E(X) < 0$ معناه : $\alpha > \frac{100}{3} \approx 33.33$.

ومنه اصغر قيمة للعدد α حتى تكون اللعبة ليست في صالح اللاعب هي 34 .

* التمرين الثاني : (04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{\sqrt{4 - (u_n)^2}}$.

1) أ) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq \sqrt{2}$.

• من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 0$ و $0 \leq 0 \leq \sqrt{2}$ أي $0 \leq u_0 \leq \sqrt{2}$ ومنه صحة الخاصية من أجل $n = 0$.

• نفرض صحة الخاصية من أجل عدد طبيعي كفي n ، ونبرهن صحتها من أجل $n + 1$.

لدينا من فرض التراجع $0 \leq u_n \leq \sqrt{2}$ ومنه بتطبيق قواعد الحصر نجد $0 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{2}$. ومنه صحة الخاصية من أجل $n + 1$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq \sqrt{2}$.

ب) لدينا : $(u_{n+1})^2 - (u_n)^2 = \frac{4}{4 - (u_n)^2} - (u_n)^2 = \frac{4 - 4(u_n)^2 + (u_n)^4}{4 - (u_n)^2} = \frac{(2 - (u_n)^2)^2}{4 - (u_n)^2}$.

لدينا $(u_{n+1})^2 - (u_n)^2 \geq 0$ ومنه $(u_{n+1} - u_n)(u_{n+1} + u_n) \geq 0$ وبالتالي $u_{n+1} - u_n \geq 0$ لان (u_n) موجبة (ومنه المتتالية (u_n) متزايدة .

(2) الاستنتاج : لدينا المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد $\sqrt{2}$ وبالتالي فهي متقاربة .

$$(3) \text{ لتكن المتتالية } (v_n) \text{ المعرفة على } \mathbb{N} : v_n = \frac{(u_n)^2}{2 - (u_n)^2} .$$

$$(أ) \text{ لدينا } 1 = \frac{(u_{n+1})^2}{2 - (u_{n+1})^2} - \frac{(u_n)^2}{2 - (u_n)^2} = \frac{2}{2 - (u_n)^2} - \frac{(u_n)^2}{2 - (u_n)^2} = 1 \text{ ومنه } (v_n) \text{ حسابية أساسها } 1 .$$

$$(ب) \text{ لدينا } v_n = v_0 + nr \text{ ومنه } v_n = n \text{ ولدينا } u_n = \sqrt{2 - \frac{2}{v_n + 1}} \text{ ومنه } u_n = \sqrt{2 - \frac{2}{n+1}} .$$

$$\text{ ومنه } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2 - \frac{2}{n+1}} = \sqrt{2} .$$

$$(4) \text{ لدينا : } w_n = \ln\left(\frac{u_n}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{\frac{n}{n+1}}\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \ln\left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right) = -\ln(\sqrt{2}) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$S_n = w_1 + w_2 + \dots + w_n = -n \ln(\sqrt{2}) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \dots \times \frac{n}{n+1}\right)$$

$$= -\frac{n \ln 2}{2} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) \text{ ومنه :}$$

$$S_n = -\frac{1}{2} [n \ln 2 + \ln(n+1)]$$

التمرين الثالث : (05 نقاط)

$$(1) \text{ حلول المعادلة : } (z + \sqrt{3} - 3i)(z^2 - 6z + 12) = 0 \text{ هي } S = \{-\sqrt{3} + 3i ; 3 - i\sqrt{3} ; 3 + i\sqrt{3}\} .$$

$$(2) \text{ (أ) لدينا : } |z_A| = |3 + i\sqrt{3}| = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} ,$$

$$\text{ لتكن } \theta_A \text{ ، عمدة لـ } z_A \text{ ومنه } \begin{cases} \cos(\theta_A) = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta_A) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ ومنه } \theta_A \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi] \text{ وبالتالي : } z_A = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$\checkmark \text{ وب نفس الطريقة نجد : } z_C = 2\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\text{ ومنه نجد } \frac{z_C}{z_A} = \frac{2\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}}{2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{e^{i\frac{2\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{ ومنه نستنتج أن } \begin{cases} OC = OA \\ (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{2} \text{ أي } \end{cases} \begin{cases} \left| \frac{z_C}{z_A} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_C}{z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{z_C}{z_A}\right)^{2024} - i \left(\frac{z_C \times z_B}{12}\right)^{1445} &= \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{2024} - i \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{1445} \\ &= e^{i(1012\pi)} - ie^{i\left(722\pi + \frac{\pi}{2}\right)} \\ &= \cos(1012\pi) + i \sin(1012\pi) - i \left[\cos\left(722\pi + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(722\pi + \frac{\pi}{2}\right) \right] : \text{لدينا} \\ &= 1 + 0 - i(0 + i) \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$(3) \text{ لدينا } z_D = \overline{z_C} \text{ ومنه نجد : } \frac{z_D - z_A}{z_C - z_B} = i$$

$$\arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_C - z_B}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ ومنه } \frac{z_D - z_A}{z_C - z_B} = i \text{ لدينا}$$

ومن المستقيمان (AD) و (BC) متعامدان .

$$(4) \text{ لدينا : } z_G = \frac{z_A + z_B + z_O}{3} = 2$$

$$(5) \text{ أ- لدينا : } \|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = 6 \text{ ومنه } \|3\overrightarrow{MG}\| = 6 \text{ أي } MG = 2$$

ومن (γ) هي الدائرة التي مركزها G ونصف قطرها 2 .

$$\text{ب- لدينا : } z = 3 + i\sqrt{3} + (1+i)ke^{i\frac{\pi}{6}} = z_A + \sqrt{2}ke^{i\frac{5\pi}{12}}$$

ومن (E) هي نصف المستقيم $[AM)$ حيث $(\overline{u}; \overline{AM}) = \frac{5\pi}{12}$.

* التمرين الرابع : (07 نقاط)

الجزء الأول :

(1) الوضع النسبي لـ (C) و (d) .

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
الوضع النسبي لـ (C) و (d)	(C) فوق (d)	(C) يقطع (d)	(C) تحت (d)	(C) فوق (d)

(2) إشارة الدالة g .

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-	+

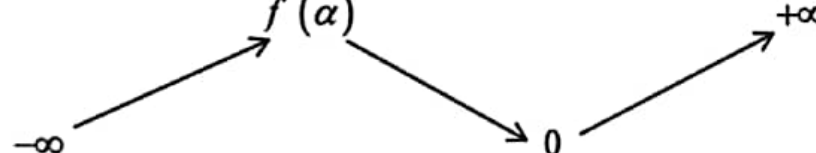
الجزء الثاني : لدينا : $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$

$$(1) \text{ لدينا } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} \left[1 - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} \right] = +\infty$$

$$\text{ولدينا } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} - xe^x - e^x = 0 \text{ ومنه محور الفواصل مستقيم مقارب للمنحنى } (C_f) \text{ عند } -\infty .$$

$$(2) \text{ أ) لدينا : } f'(x) = 2e^{2x} - 2e^x - xe^x = e^x g(x) \text{ ومنه إشارة } f'(x) \text{ من إشارة } g(x) \text{ وعليه الدالة } f \text{ متزايدة تماما على كل من المجالين }]-\infty; \alpha] \text{ و } [0; +\infty[\text{ ومتناقصة تماما على المجال } [\alpha; 0] .$$

* جدول تغيرات الدالة f *

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					

ج- لدينا : $g(\alpha) = 2e^\alpha - \alpha - 2$ ومنه $e^\alpha = \frac{\alpha+2}{2}$

ومنه وبالتعويض في عبارة $f(\alpha) = e^{2\alpha} - (\alpha+1)e^\alpha$ نجد : $f(\alpha) = -\frac{\alpha(\alpha+2)}{4}$

➤ لدينا : $-1.6 < \alpha < -1.5$ وبتطبيق خواص المتباينات نجد $0.15 \leq f(\alpha) \leq 0.2$

➤ $f(1) = e^2 - 2e$. رسم (C_f) *

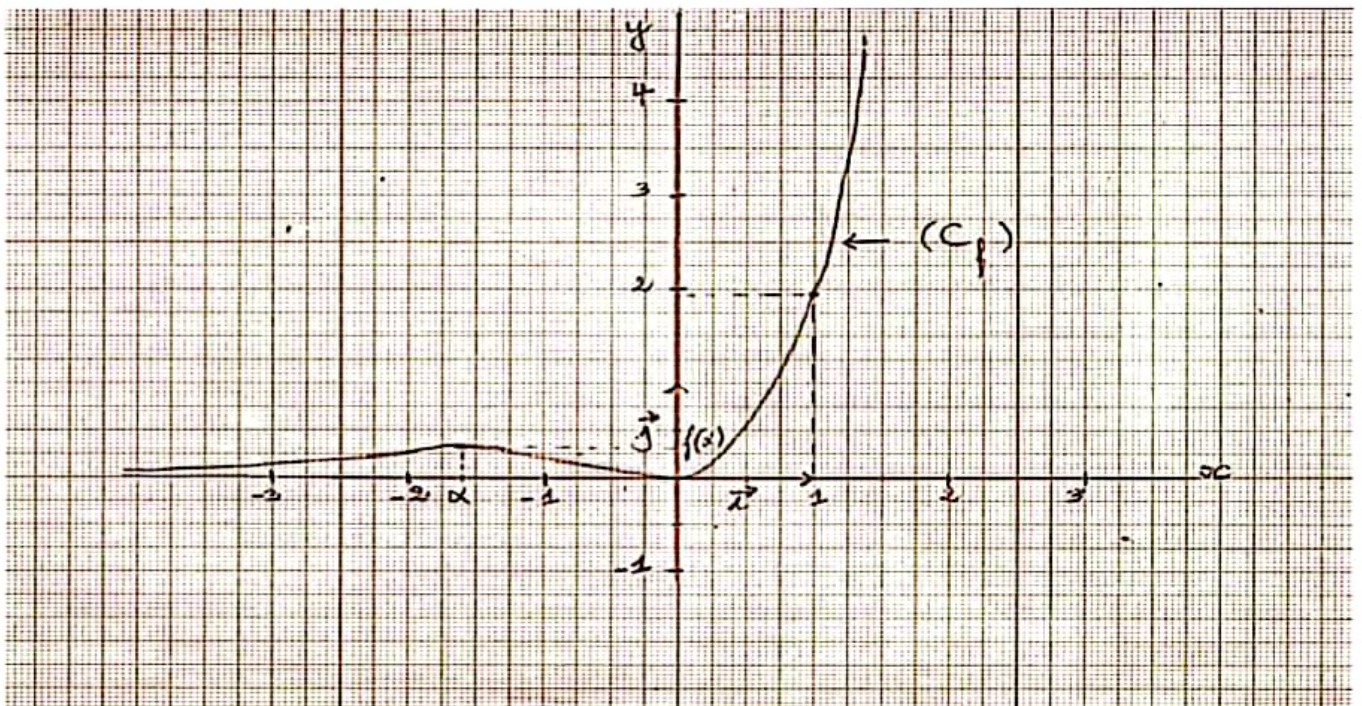
(3) أ. لتكن F الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto (x+1)e^x$ على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم عند القيمة 0

➤ ومنه $F(x) = \int_0^x (t+1)e^t dt = [(t+1)e^t]_0^x - \int_0^x e^t dt = xe^x$

ب- لدينا

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= 4 \int_{\lambda}^0 f(x) dx = 4 \int_{\lambda}^0 [e^{2x} - (x+1)e^x] dx \\ &= 4 \left[\frac{1}{2} e^{2x} - xe^x \right]_{\lambda}^0 \\ &= 2 - 2e^{2\lambda} + 4\lambda e^{\lambda} \end{aligned}$$

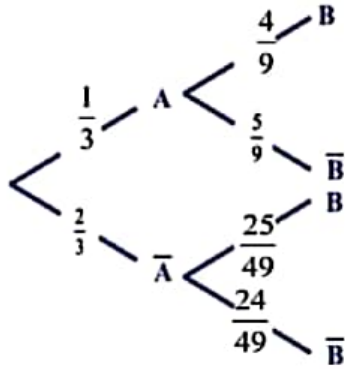
➤ تفسير النتيجة هندسيا : $A(\lambda)$ هي مساحة الحيز من المستوى المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل ومحور الترتيب والمستقيم الذي معادلته $x = \lambda$.



تصحيح مقترح للباكالوريا التجريبية لمادة الرياضيات ماي 2024 نهائي علوم تجريبية

الموضوع الثاني

* التمرين الأول : (04 نقاط)



(1) تكملة شجرة الاحتمالات .

(2) لدينا : $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} + \frac{2}{3} \times \frac{25}{49} = \frac{646}{1323}$

(3) لدينا : $P_B(\bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(B)} = \frac{225}{323}$

(4) أ - قانون الاحتمال للمتغير X

ب - لدينا $E(X) = \frac{205}{441}$

* التمرين الثاني : (04 نقاط)

أ.

لدينا : $\begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ \alpha - \beta = 3 + 2i \end{cases}$ أي $\begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ \overline{\alpha - \beta} = \overline{3 - 2i} \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ \overline{\alpha} - \overline{\beta} = 3 - 2i \end{cases}$

بالجمع والتعويض نجد : $\alpha = 1 + i$ و $\beta = -2 - i$

إ.

(1) لدينا : $z_B = \sqrt{2} + i\sqrt{6} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، $z_A = 2 + 2i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

(2) لدينا : $\frac{z_B}{z_A} = e^{i\frac{\pi}{12}}$ ومن جهة أخرى $\frac{z_B}{z_A} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

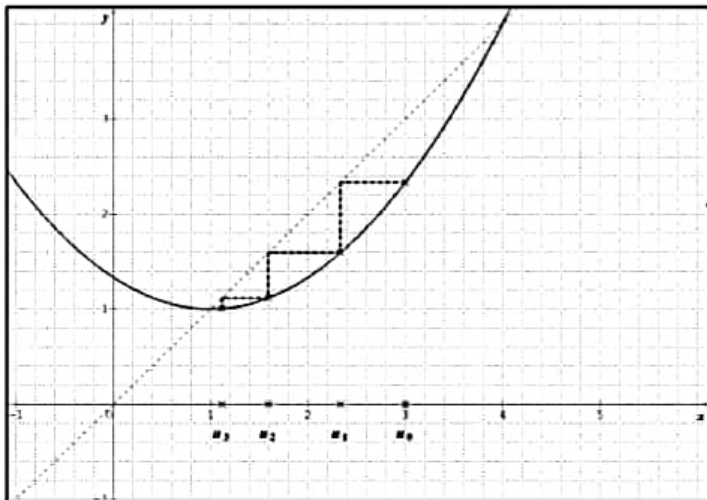
ب - حسب تساوي عددين مركب ننتج أن : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

(3) لدينا : $\frac{z_B}{z_C} = -1$ ومنه : $(\overline{OC}; \overline{OB}) = \pi$ ومنه الشعاعان $\overline{OB}$ و $\overline{OC}$ مرتبطان خطيا

ومنه ننتج ان النقط O ، B و C في إستقامة .

(4) لدينا : $|i(\bar{z} - 2) - 2| = 3$ ومنه $\left| i \left[(\bar{z} - 2) - \frac{2}{i} \right] \right| = 3$ أي $|\bar{z} - 2 + 2i| = 3$ ومنه $|z - 2 - 2i| = 3$

ومنه $|z - z_A| = 3$ أي $AM = 3$ وبالتالي (E) هي الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها 3.



* التمرين الثالث : (05 نقاط)

(1) أ - تمثيل على محور الفواصل الحدود U_0 ، U_1 ، U_2 و U_3 .

ب - التخمين المتتالية (U_n) متناقصة تماما وتتقارب نحو العدد 1

(2) أ - البرهان بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n : 1 \leq U_n \leq 4$

نفس منهجية الموضوع الاول.

ب- من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{3}(U_n - 1)^2 + 1 - U_n = \frac{U_n^2 - 5U_n + 4}{3} = \frac{1}{3}(U_n - 1)(U_n - 4)$$

لدينا $1 \leq U_n \leq 4$ ومنه $(U_n - 1)(U_n - 4) \leq 0$ أي $U_{n+1} - U_n \leq 0$ ومنه المتتالية (U_n) متناقصة.

ج- المتتالية (U_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 1 وبالتالي فهي متقاربة ،

وبالتالي يوجد عدد حقيقي L بحيث $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = L$ وهو حل للمعادلة $f(x) = x$ أي $\frac{1}{3}(L - 1)^2 + 1 = L$

ومنه $\frac{1}{3}(L - 1)(L - 4) = 0$ ومنه إما $L = 1$ أو $L = 4$ ومنه $L = 1$ لأن المتتالية متناقصة و $U_0 = 3$

وبالتالي $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$

$$(3) \text{ لدينا : } V_n = \ln\left(\frac{U_n - 1}{3}\right)$$

$$1- \text{ لدينا } V_{n+1} = \ln\left(\frac{U_{n+1} - 1}{3}\right) = \ln\left[\left(\frac{U_n - 1}{3}\right)^2\right] = 2 \ln\left(\frac{U_n - 1}{3}\right) = 2V_n$$

ومنه المتتالية (V_n) هندسية أساسها 2 وحدها الأول V_0 حيث $V_0 = \ln\left(\frac{U_0 - 1}{3}\right) = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$

ب- لدينا $V_n = V_0 \times q^n = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \times 2^n$ ولدينا : $U_n = 3e^{2^n \ln\left(\frac{2}{3}\right)} + 1$ ومنه $U_n = 3e^{2^n \ln\left(\frac{2}{3}\right)} + 1$

$$(\ln\left(\frac{2}{3}\right) < 0) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 3e^{2^n \ln\left(\frac{2}{3}\right)} = 0 \quad \text{لان} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3e^{2^n \ln\left(\frac{2}{3}\right)} + 1 = 1$$

$$(4) \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ نضع : } W_n = \frac{(U_0 - 1)(U_1 - 1)(U_2 - 1) \times \dots \times (U_n - 1)}{3^n}$$

لدينا : .

$$\begin{aligned} W_n &= \frac{(U_0 - 1)(U_1 - 1)(U_2 - 1) \times \dots \times (U_n - 1)}{3^n} \\ &= \frac{\left(3 \times e^{2^0 \ln\left(\frac{2}{3}\right)}\right) \left(3 \times e^{2^1 \ln\left(\frac{2}{3}\right)}\right) \left(3 \times e^{2^2 \ln\left(\frac{2}{3}\right)}\right) \times \dots \times \left(3 \times e^{2^n \ln\left(\frac{2}{3}\right)}\right)}{3^n} \\ &= \frac{3^{n+1} \times e^{\ln\left(\frac{2}{3}\right)(2^0 + 2^1 + \dots + 2^n)}}{3^n} \\ &= 3e^{\ln\left(\frac{2}{3}\right)(2^{n+1} - 1)} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3e^{\ln\left(\frac{2}{3}\right)(2^{n+1} - 1)} = 0 \quad \text{ومنه :}$$

* التمرين الرابع : (07 نقاط)

الجزء الأول : لدينا : $g(x) = x - 1 - \ln x$

(1) لدينا $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$ إشارة $g'(x)$ من إشارة $x-1$. وعليه الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0;1]$

ومتزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$.
* جدول تغيرات الدالة g *

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	0
$g(x)$	$+\infty$		$+\infty$

(2) من جدول تغيرات الدالة g نستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \in]0;+\infty[$: $g(x) \geq g(0) = 0$.

الجزء الثاني : f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - x \ln x & ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(1) أ- لدينا $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - x \ln x = 0 = f(0)$ ومنه الدالة f مستمرة على يمين 0 .

ب- لدينا $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - \ln x = +\infty$ ومنه الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يمين

0

والمنحنى (C_f) يقبل نصف مماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 موازي لمحور الترتيب متجه نحو الأعلى

(2) لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

(3) أ- من أجل كل عدد حقيقي $x \in]0;+\infty[$: $f'(x) = 2x - \ln x - 1 = x + g(x)$.

ب- لدينا $f'(x) \geq 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.
* جدول تغيرات الدالة f *

x	0	$+\infty$
$f(x)$	0	$+\infty$

(4) أ- لدينا $f'(1)(x-1) + f(1) = 1(x-1) + 1 = x$

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مماس للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1 .

ب- من أجل كل $x \in]0;+\infty[$: $f(x) - x = xg(x)$ ،

ومنه $f(x) - x \geq 0$ ومنه المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) .

(5) لدينا $f(e) = e^2 - e \approx 4.67$.

* إنشاء كل من المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) * (في نهاية التصحيح)

(6) باستعمال المكاملة بالتجزئة من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$ لدينا :

$$\int_1^x t \ln(t) dt = \left[\frac{1}{2} t^2 \ln t \right]_1^x - \frac{1}{2} \int_1^x t dt = \frac{1}{2} x^2 \ln(x) - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4}$$

(7) أ- لدينا : $A_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) dx = \frac{7}{12} - \frac{\ln(n)}{2n^2} - \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{3n^3}$

ب- لدينا $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \frac{7}{12}$. ومنه نستنتج ان مساحة الحيز الواقع تحت (C_f) بين 0 و 1 هي $\frac{7}{12} ua$.

