

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

إمتحان البكالوريا التجريبي
دورة: ماي 2024 م
الشعبة: رياضيات



وزارة التربية الوطنية
مديرية التربية لولاية جيجل
المقاطعة الأولى - جيجل

المدة: 4 سا و 30 د

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:
الموضوع الأول:

التمرين الأول: (05 نقاط)

- I/** في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A, B, C و D لواحقتها على الترتيب: $Z_A = 1 + i$ ، $Z_B = \overline{Z_A}$ ، $Z_C = -1 + i$ و $Z_D = -Z_A$.
- 1/** أكتب كلا من العددين Z_A و Z_C على الشكل الأسّي ثم استنتج الشكل الأسّي لكل من Z_B و Z_D .
- ب/** استنتج أن النقط A و B و C و D تنتمي إلى نفس الدائرة (Γ) معينا عناصرها المميزة.
- 2/** أكتب العدد $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$ على الشكل الأسّي، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .
- ب/** عين صورة B بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{AC}$ ، ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABDC$.
- 3/** بين أن مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z التي تحقق: $\bar{Z} = Z_A e^{i\theta}$ بحيث θ عدد حقيقي يسمح $\mathbb{R}$ هي نفسها الدائرة (Γ) .

II/ نضع في وعاء عشرة كريات متماثلة لا يمكن التمييز بينها باللمس، مرقمة بالأعداد المركبة:

$$Z_A, Z_B, Z_C, Z_D, 3i, -3i, 2, -2, \sqrt{5}, -\sqrt{5} .$$

نسحب عشوائيا كرتين في آن واحد من هذا الوعاء.

- 1/** أحسب احتمال الحدثين: E «الكرتان المسحوبتان تحمل كل منهما عددا حقيقيا صرفا»
- F «الكرتان المسحوبتان تحمل كل منهما عددا مركبا له عمدة θ حيث: $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ »
- 2/** أ/ أحسب $P_F(E)$.
- ب/** هل الحدثان E و F مستقلان؟ برّر إجابتك.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

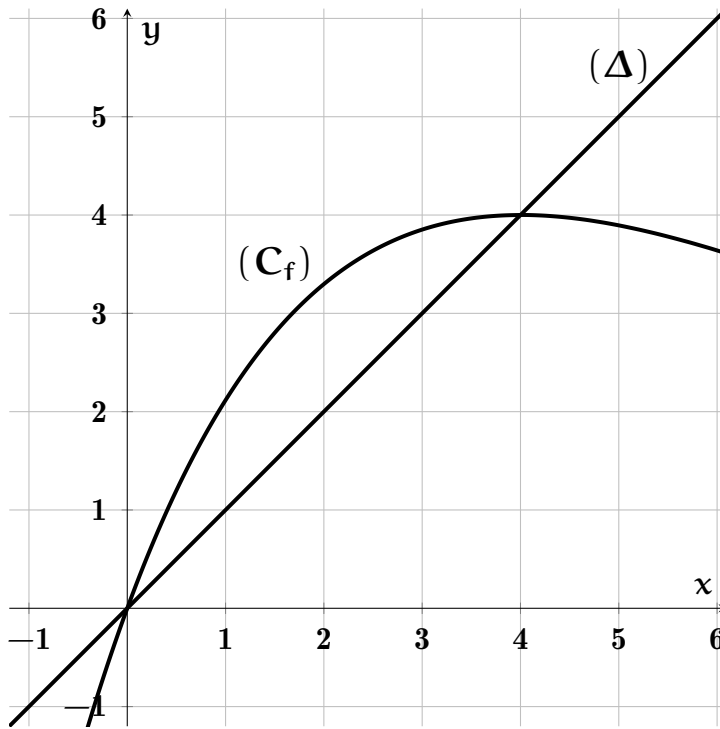
- 1/** عين قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n التي من أجلها يكون العدد: $M_n = 4C_{n+1}^2 - A_{n+3}^2 + 2$ مضاعفا للعدد 7 . (لاحظ أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $n^2 + 4n + 3 = (n + 2)^2 - 1$)
- 2/** أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7 .
- 3/** ليكن العدد الطبيعي T_n الذي يُكتب في نظام العد ذو الأساس خمسة بالشكل: $T_n = \overbrace{111 \dots 1}^{(n+1) \text{ رقمًا}}$.
- أ/** أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4T_n = 5^{n+1} - 1$ ، ثم استنتج أن: $\text{PGCD}(T_n; 5^n) = 1$.
- ب/** ليكن m عددا طبيعيا. بين أن: $(4T_n \equiv m [7])$ يكافئ $(T_n \equiv 2m [7])$.



ج/ استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد: $N = T_{2024} + 2T_{1445}$ على 7 .

4/ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $5^n x + T_n y = 1$. (E_n) .
• بين أن المعادلة (E_n) تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$ ، ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E_2) .

التمرين الثالث: (04 نقاط)



لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n e^{1-\frac{1}{4}u_n}$.

في الشكل المقابل المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث:

(C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:
 $f(x) = x e^{1-\frac{1}{4}x}$ ،

و (Δ) هو المستقيم ذو معادلة $y = x$.

1/ ا/ بقراءة بيانية، بين أنه من أجل كل x من المجال $[0; 4]$ فإن: $f(x) \in [0; 4]$.

ب/ أنقل الشكل المقابل، ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) .

(دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء)

ج/ ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2/ ا/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n \leq 4$.

ب/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

3/ استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

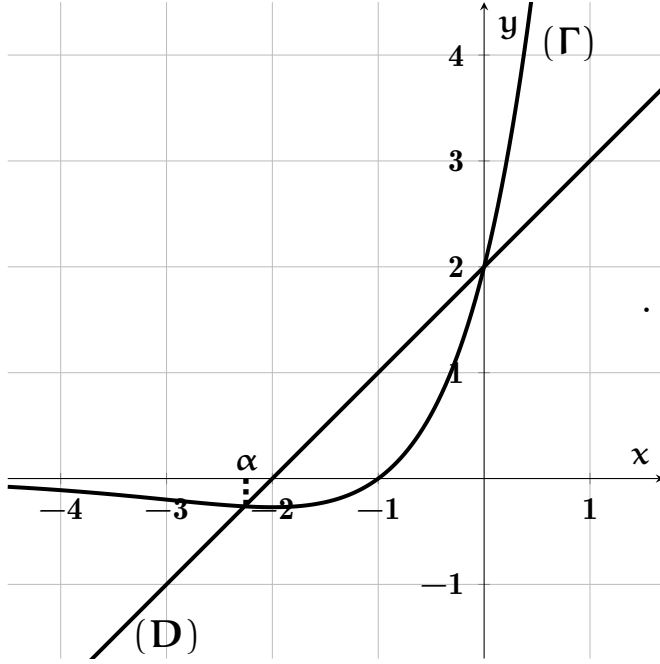
4/ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، نعتبر: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$.

ا/ أثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $u_n = e^{n-\frac{1}{4}S_n}$.

ب/ بين أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = 4$.



التمرين الرابع: (07 نقاط)



I/ في الشكل المقابل: (Γ) هو التمثيل البياني للدالة

المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $x \mapsto (2x + 2)e^x$

و (D) هو المستقيم ذو معادلة $y = x + 2$.

(Γ) و (D) يتقاطعان في نقطتين فاصلتيهما 0 و α

حيث $-2.3 < \alpha < -2.2$.

1/ بقراءة بيانية، حدد وضعية (Γ) بالنسبة إلى (D) .

2/ استنتج حسب قيم x من $\mathbb{R}$ إشارة:

$$g(x) = -x - 2 + 2(x + 1)e^x$$

II/ لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة:

$$f(x) = x(e^x - 1)^2$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب

إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1/ أ/ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب/ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$.

ج/ أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

2/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $x(e^x - 1) \geq 0$ ، ثم استنتج أن الدالة f متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$ وشكل جدول تغيراتها.

3/ أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f''(x) = 2e^x g(x)$ ، ثم استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف معينتا فاصلتيهما.

4/ أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 ، ثم أثبت أنه المماس الوحيد الذي يمر من المبدأ.

5/ أ/ أنشئ (Δ) و (C_f) بدقة. (الوحدة: 2cm)

ب/ عين قيم العدد الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x) = mx$ ثلاثة حلول مختلفة.

6/ أ/ باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن: $\int_0^{\ln 2} x \cdot e^x (e^x - 2) dx = \frac{1}{4}(5 - 8 \ln 2)$.

ب/ استنتج بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمتين: $x = 0$ و $x = \ln 2$.

و $y = x$.

انتهى الموضوع الأول.



الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي صندوق U_1 كرتين حمراوين وثلاث كريات خضراء، ويحتوي صندوق U_2 ثلاث كريات حمراء و كرتين خضراوين؛ بحيث كل الكريات متماثلة، لا يمكن التفريق بينها باللمس. نسحب ثلاث كريات كما يلي: نسحب كرية واحدة من الصندوق U_1 ونسجل لونها؛ فإذا كانت حمراء نعيدها إلى الصندوق U_1 ثم نسحب كرتين في آن واحد من U_1 ، وإذا كانت خضراء نضعها داخل الصندوق U_2 ثم نسحب كرتين في آن واحد من U_2 .

1/ أنقل ثم أتمم شجرة الاحتمالات المقابلة:

(نرمز للكرات الحمراء بـ R وللخضراء بـ V)

2/ أحسب احتمال الحدثين التاليين:

A «الكرات الثلاث المسحوبة من نفس اللون»

B «الحصول على كرية حمراء على الأقل»

3/ بيّن أن: $P_A(U_2) = \frac{3}{4}$.

4/ ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لثلاث كريات عدد الكريات الخضراء المتبقية في الصندوق U_1 .

ا/ برّر أن قيم المتغير العشوائي X هي: 1 ، 2 و 3 .

ب/ عيّّن قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم أحسب أمله

الرياضياتي $E(X)$.

ج/ أحسب الاحتمال: $P(C_3^X = 3)$.

التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

I/ في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ؛ نعتبر النقط A ، I و C

لواحقتها على الترتيب: $Z_A = -2$ ، $Z_I = -1$ و $Z_C = i$.

(γ) الدائرة التي مركزها I ونصف قطرها 1 ، و B نقطة من (γ) حيث: $(\overrightarrow{AO}; \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{8}$.

1/ علّم النقط A و I و C ، ثم أنشئ الدائرة (γ) . (الوحدة 2cm)

2/ استنتج طويلة العدد المركب $Z_B + 1$ وبين أن عمدة له هي: $\frac{\pi}{4}$ ، ثم استنتج الشكل الجبري لـ Z_B .

3/ أثبت أن العدد $\frac{Z_B + 1}{i + 1}$ حقيقي. ماذا تستنتج؟

II/ نرفق بكل نقطة M تختلف عن I ذات اللاهقة Z النقطة M' ذات اللاهقة Z' حيث: $Z' = \frac{i(Z + 2)}{Z + 1}$.

1/ ا/ أثبت أن $\arg(Z') = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{MI}; \overrightarrow{MA})$.

ب/ عين مجموعة النقط M بحيث يكون Z' تخيليا صرفا.



2/ /أ/ أثبت أن $Z' - i = \frac{i}{Z + 1}$.

ب/ نضع $Z = -1 + e^{i\theta}$ حيث $\theta \in]-\pi; \pi]$.

• استنتج أنه عندما تمسح النقطة M الدائرة (γ) فإن النقطة M' تمسح دائرة (γ') يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

1/ /أ/ عين باقي القسمة الإقليدية للعدد 2009^2 على 16.

ب/ استنتج أن: $2009^{8001} \equiv 2009 [16]$.

2/ نعرف المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$ كالتالي:

$$\begin{cases} u_0 = 2009^2 - 1 \\ u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1 \end{cases}$$

/أ/ بين أن u_0 يقبل القسمة على 5.

ب/ بين باستعمال دستور ثنائي الحد أن: $u_{n+1} = u_n [u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1)]$.

ج/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن u_n مضاعف لـ 5^{n+1} .

3/ /أ/ تحقق أن: $u_3 = 2009^{250} - 1$.

ب/ استنتج أن: $2009^{250} \equiv 1 [625]$ و $2009^{8001} \equiv 2009 [625]$.

4/ /أ/ لتكن a و b و c أعدادا صحيحة غير معدومة.

برهن أنه إذا كان a مضاعفا لـ b و c وكان $\text{PGCD}(b; c) = 1$ فإن a مضاعف للجداء bc .

ب/ بين أن: $2009^{8001} - 2009$ يقبل القسمة على 10000.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I/ نعتبر g الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$.

1/ أدرس تغيرات الدالة g ثم شكّل جدول تغيراتها.

2/ استنتج أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ يكون: $g(x) > 0$.

II/ لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ:

$$\begin{cases} f(x) = x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x + 1 ; & x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1/ /أ/ بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = 1$ ، ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب/ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 2$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.



- 2/ 1/ أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين 0 ، ثم فسّر النتيجة هندسياً.
 ب/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ يكون: $f'(x) = g(x) + 1$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.
- 3/ أحسب $f(1)$ ، ثم أنشئ (Δ) و (C_f) بدقة. (الوحدة: 2cm)
- 4/ 1/ بين أن الدالة F المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بالعلاقة: $F(x) = \frac{1}{2}xf(x) - \frac{1}{2}\ln(x+1) + x$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$.
 ب/ استنتج بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمتين: $x = 1$ و $x = \frac{1}{2}$ و $y = 0$.
- 5/ لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
 1/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون: $u_n = e^{f(n)-n-1}$.
 ب/ أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة تماماً. [يمكنك الاستفادة من نتيجة السؤال (II / 2 / ب)]
 ج/ بين أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e$ ، ماذا تستنتج؟

انتهى الموضوع الثاني.

رابط الإطلاع على الموضوع إلكترونيا، مع الإجابة النموذجية وسلم التنقيط:
 (تُرفع الإجابة النموذجية بعد انتهاء فترة الإختبار مباشرة)



☺☺ بالتوفيق للجميع في شهادة البكالوريا ☺☺