

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية الجزائر شرق

دورة: ماي 2024

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبي

الشعبة: رياضيات

المدة: 04 سا

إختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول:

التمرين الأول: (05 نقاط)

- I. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ لتكن p النقطة ذات اللاحقة $Z_p = 10$ و (Γ) الدائرة ذات القطر $[OP]$ نسمي Ω مركز الدائرة (Γ) . نعتبر النقط C, B, A التي لاحتاقتها على الترتيب $Z_A = 5 + 5i$, $Z_B = 1 + 3i$ و $Z_C = 8 - 4i$.
- (1) بين أن النقط C, B, A تنتمي إلى الدائرة (Γ) (يطلب إنشاء الشكل).
- (2) لتكن النقطة D ذات اللاحقة $Z_D = 2 + 2i$. بين أن النقطة D هي المسقط العمودي للنقطة O على المستقيم (BC) .
- II. من أجل كل نقطة M من المستوي مختلفة عن O ذات اللاحقة z نرفق النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z' = \frac{20}{z}$ علما أن $\bar{z}$ يرمز إلى مرافق z .
- (1) بين أن النقط O, M و M' على استقامة واحدة.
- (2) لبكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ و M نقطة من (Δ) ذات اللاحقة z .
- (أ) تحقق أن: $z + \bar{z} = 4$.
- (ب) عبر عن $z' + \bar{z}'$ بدلالة z و $\bar{z}$ ، ثم استنتج أن : $5(z' + \bar{z}') = z' \bar{z}'$.
- (ج) استنتج أن M' تنتمي إلى تقاطع المستقيم (OM) و الدائرة (Γ) ثم علم النقطة M' في الشكل.
- التمرين الثاني: (04 نقاط)

- (1) تحقق أن $5^6 \equiv 1[7]$ و استنتج $5^{2016} \equiv 1[7]$
- (2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع $S_n = 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n$
- (أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4S_n = 5^{n+1} - 1$ واستنتج أن S_n و 5^n أوليان فيما بينهما.
- (ب) ليكن العدد الصحيح a . بين أن $4S_n \equiv a[7]$ إذا وفقط إذا كان $S_n \equiv 2a[7]$.
- (ج) بين أن $4S_{2015} \equiv 0[7]$ واستنتج باقي قسمة S_{2015} على 7.
- (د) عين اصغر عدد طبيعي n غير معدوم بحيث يكون 7 قاسم لـ S_n .

(3) ليكن n عدد طبيعي غير معدوم , نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) : $5^n x + S_n y = 1$. تحقق أن $(-4, 5)$ حل للمعادلة (E) ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).

التمرين الثالث: (04 نقاط)

لتكن (z_n) متتالية أعداد مركبة معرفة بـ : $\left\{ \begin{array}{l} z_0 = e^{i\theta} \quad ; \quad \theta \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[\\ z_{n+1} = z_n + |z_n| \end{array} \right.$.

(1) بين أن : $e^{i\theta} + 1 = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \times e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

(2) نعتبر (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_n = \arg(z_n)$ حيث : $u_n \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$.

• بين أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، ثم أكتب u_n بدلالة n و θ .

(3) نعتبر (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = z_n - \overline{z_n}$.

(أ) أكتب v_{n+1} بدلالة v_n . ماذا تستنتج ؟

(ب) بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $|z_n| \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \sin \theta$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = e^{x-2} + 1 - x$

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.

(2) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = x - 1 + \frac{x}{e^{x-2}}$

(C_f) المنحنى الممثل لها في مستو مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول 1 cm).

(1) (أ) احسب النهايات عند حدود مجال التعريف.

(ب) اثبت أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

(ج) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (d) .

(2) اثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{g(x)}{e^{x-2}}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

(3) (أ) بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة واحدة فاصلتها α حيث $0,1 < \alpha < 0,2$

(ب) اثبت أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيين إحداثياتها.

(ج) عين معادلة المماس (T) الذي يوازي المستقيم (d) .

(4) ارسم (d) , (T) و (C_f) .

(5) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $\frac{x}{e^{x-2}} = m + 1$

(6) (أ) باستعمال الكاملة بالتجزئة عين H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$ حيث : $h(x) = xe^{2-x}$ والتي تتعدم عند $x = -1$.

(ب) احسب A مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (d) والمستقيمين $x = 0$ و $x = 2$.

الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (04 نقاط)

- (1) أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 7 .
 ب) ما هو باقي القسمة الاقليدية للعدد $2017^{4n+2} + 2019^{6n+4}$ على 7 .
- (2) نعتبر المعادلة ذات المجهولين الصحيحين x و y : $(E) : 343x - 648y = 76$
 أ) بين أن المعادلة (E) تقبل حولا في $\mathbb{Z}^2$.
 ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) .
- (3) ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين غير المعدومين x و y حلول المعادلة (E) .
 أ) ما هي القيم الممكنة للعدد d ؟
 ب) عين الثنائيات $(x; y)$ من الأعداد الطبيعية بحيث يكون $d = 76$.
- (4) λ عدد طبيعي يكتب $\overline{\beta 1 \alpha \beta}$ في نظام التعداد ذي الأساس 7 ، ويكتب $\overline{\alpha 1 \alpha \alpha \beta}$ في نظام التعداد ذي الأساس 5 .
 جد العددين الطبيعيين α و β ، ثم أكتب λ في نظام التعداد ذي الأساس 6 .

التمرين الثاني: (05 نقاط)

- (1) $P(z) = z^3 + (2 - \sqrt{3})z^2 + (3 - 2\sqrt{3})z + 6$ كثير الحدود للمتغير المركب z المعرف كما يلي:
 أ) احسب $P(-2)$ ، ثم عين العددين الحقيقيين α و β بحيث يكون: $P(z) = (z+2)(z^2 + \alpha z + \beta)$.
 ب) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z) = 0$.
- (2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقتها على الترتيب $z_A = 1 + \sqrt{3}i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = -2$.
 أ) أكتب كل من الأعداد z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي ، ثم استنتج أن النقط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة (C) التي يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .
 ب) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ حقيقي .
 ج) عين ثم أنشئ (Δ) مجموعة النقط ذات اللاحقة حيث: $\overline{z} = ke^{-i\frac{2\pi}{3}}$ عندما k يمسح $\mathbb{R}$.
- (3) أ) أكتب على الشكل الأسّي العدد : $L = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$.
 ب) استنتج أن صورة A بتحويل نقطي يطلب تعيين عناصره المميزة .
 ج) حدد مع التعليل طبيعة المثلث ABC .
 د) عين اللاحقة z_D للنقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية متزايدة حدودها موجبة معرفة على المجموعة $\mathbb{N}^*$ بـ :

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 100 \\ u_1 \times u_3 = 256 \end{cases}$$

- (1) أحسب u_2 ، u_1 و u_3 ثم عين أساس المتتالية q .
- (2) عبر عن عبارة الحد العام u_n بدلالة n .
- (3) أحسب بدلالة n كلا من المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ و الجداء $P_n = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$
- (4) أ) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 7^n على 5 .
ب) عين باقي القسمة الاقليدية للعدد $2016^{1436} + 49^{2n+1} + 5n - 3$ على 5 .
ج) نضع من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $S_n' = \frac{1}{\ln 2} [\ln 4 + \ln 4^2 + \dots + \ln 4^n]$
- أحسب S_n' بدلالة n ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $S_n' + 4n^2 + 7^{4n} \equiv 0 [5]$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

- (I) n عدد طبيعي غير معدوم ، نعتبر f_n الدالة المعرفة على $]-1; +\infty[$ بـ : $f_n(x) = \frac{e^{-x}}{(1+x)^n}$.
(C_n) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ وحدته $1cm$.
(1) أ) أحسب نهايات الدالة f_n عند حدود مجال التعريف .
ب) أحسب $f_n'(x)$ و ادرس إشارتها .
ج) أنشئ جدول تغيرات الدالة f_n .
(2) بَيِّنْ أَنْ جميع المنحنيات (C_n) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها .
(3) أ) أدرس حسب قيم العدد الحقيقي x الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) و (C_2) .
ب) أرسم بدقة و في نفس المعلم المنحنيين (C_1) و (C_2) .
(II) من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نعتبر المتتالية $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المعرفة بـ : $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.
(1) أكتب $f_n'(x)$ بدلالة $f_n(x)$ و $f_{n+1}(x)$.
(2) أ) بَيِّنْ أَنْ المتتالية $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متناقصة .
ب) إستنتج أَنْ المتتالية $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متقاربة .

- (3) أ) بَيِّنْ أَنَّهُ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ و $0 \leq x \leq 1$ لدينا : $\frac{e^{-1}}{(1+x)^n} \leq f_n(x) \leq \frac{1}{(1+x)^n}$.
ب) إستنتج أَنَّهُ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ لدينا : $\frac{e^{-1}}{n-1} \left[1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right] \leq I_n \leq \frac{1}{n-1} \left[1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right]$.
ج) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

- (4) أ) إعتادا على السؤال (1/II) بَيِّنْ أَنْ : $I_n + nI_{n+1} = 1 - \frac{e^{-1}}{2^n}$.

- ب) إستنتج : $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$.

- ج) أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي A المحدد بالمنحنيين (C_1) و (C_2) و المستقيمين $x=0$ و $x=1$.

الموضـوع الأول

التنقيط	الأعداد المركبة	تصحيح التمرين الأول (05 نقاط)
0.75		(I) -1) بما أن $\Omega A = 5i = 5$ و $\Omega B = -4 + 3i = 5$ و $\Omega C = 3 - 4i = 5$ إذن النقط A, B, C تنتمي إلى الدائرة (Γ) ذات القطر $[OP]$.
0.25		* إنشاء الشكل : تمثيل النقط : Ω, A, B, C و الدائرة (Γ)
0.75		(2-) لدينا من جهة $\overrightarrow{BC}(\frac{7}{-7})$ و $\overrightarrow{DB}(\frac{-1}{1})$ إذن $\overrightarrow{BC} = -7\overrightarrow{DB}$ و منه $D \in (BC)$ و من جهة ثانية : $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ أي $(OD) \perp (BC)$ نستنتج أن D هي المسقط العمودي للنقطة O على المستقيم (BC)
0.25		(II) -1) نفرض أن $M(x, y)$ نعلم أن $\arg(\frac{Z'}{Z}) = \arg(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ علما أن $Z' = \frac{20}{Z}$ و بالتالي : $\arg(\frac{Z'}{Z}) = \arg(\frac{20}{Z\bar{Z}})$
0.75		حيث : $Z\bar{Z} = x^2 + y^2$ أي $Z\bar{Z} \in \mathbb{R}_+^*$ و بالتالي $\frac{20}{Z\bar{Z}} \in \mathbb{R}_+^*$ إذن $\arg(\frac{Z'}{Z}) = 2k\pi$ مع k عدد صحيح و هذا يعني أن النقط : O, M, M' على استقامة واحدة
0.25		(2-) أ) بما أن $M \in (\Delta)$ فإن $Z = 2 + iy$ و منه $\bar{Z} = 2 - iy$ بالجمع نجد : $Z + \bar{Z} = 4$
0.5		ب) لدينا : $Z' + \bar{Z}' = \frac{20}{Z} + \frac{20}{\bar{Z}} = \frac{20Z + 20\bar{Z}}{Z\bar{Z}} = \frac{20(Z + \bar{Z})}{Z\bar{Z}} = \frac{80}{Z\bar{Z}}$
0.5		* حسب الجواب السابق : $\frac{20}{Z} \times \frac{20}{\bar{Z}} = \frac{400}{Z\bar{Z}} = 5(\frac{80}{Z\bar{Z}})$ إذن $5(Z' + \bar{Z}') = Z' \times \bar{Z}'$
01		ج- من جهة حسب الجواب (II - 1) النقط O, M, M' في استقامة و منه $M' \in (OM)$ من جهة ثانية : $\Omega M' = Z' - 5 $ (علما أن $Z \times \bar{Z} = Z ^2$ و بالتالي $\Omega M'^2 = (Z' - 5)(\bar{Z}' - 5)$ أي $\Omega M'^2 = Z'\bar{Z}' - 5(Z' + \bar{Z}') + 25$ و بما أن $Z' + \bar{Z}' = 4$ و $Z' \times \bar{Z}' = 5(Z' + \bar{Z}')$ \Omega M'^2 = 25 أي $\Omega M' = 5$ و منه $M' \in (\Gamma)$ و بالتالي M' تنتمي إلى تقاطع المستقيم (OM) و الدائرة (Γ) .

التنقيط	الأعداد والحساب	تصحيح التمرين الثاني (04 نقاط)
---------	-----------------	----------------------------------

	-1
0.25	$5^6 = 15625$ $5^6 \equiv 1 [7]$ ندرس بواقى قسمة 5^n على 7
0.25	$5^0 \equiv 1[7]$, $5^1 \equiv 5[7]$, $5^2 \equiv 4[7]$ $5^3 \equiv 6[7]$, $5^4 \equiv 2[7]$, $5^5 \equiv 3[7]$ $5^6 \equiv 1[7]$ دورية و دورها $k = 6n$
0.25	$5^6 \equiv 1[7]$ $5^{2016} \equiv 5^{6n} \equiv 1[7]$ $2016 = 6 \times 336 = 6n$
	-2
	$S_n = 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n$ (أ) بين أن من أجل كل عدد طبيعي n و $4S_n = 5^{n+1} - 1$ لذلك نحسب $S_n = 1 + 5^0 + 5^1 + 5 \times 5 \dots 5^n$ مجموع حدود متتالية هندسية حدها الاول 1 و أساسها $q = 5$
0.25	$S_n = 1 \left(\frac{5^{n+1} - 1}{5 - 1} \right)$
	و منه
0.25	$4S_n = 5^{n+1} - 1$
	لدينا
	$4S_n = 5^{n+1} - 1$ نكتب على الشكل 1 $5 \times 5^n - 4S_n = 1$
0.25	يوجد $(5, -4)$ بحيث $5 \times 5^n - 4S_n = 1$ ومنه $5^n S_n$, أوليان فيما بينهما
	(ب) بين اذا كان $4S_n \equiv a [7]$ فإن $S_n \equiv 2a [7]$ لدينا
0.25	$4S_n \equiv a [7]$ نضرب في 2
	$8S_n \equiv 2a [7]$ $8 \equiv 1 [7]$ ومنه $S_n \equiv 2a [7]$
	العكس : بين أنه إذا كان $S_n \equiv 2a [7]$ فإن $4S_n \equiv a [7]$ لدينا
	$S_n \equiv 2a [7]$ نضرب في العدد 4
	$4S_n \equiv 8a [7]$
0.25	$8a \equiv a [7]$ $4S_n \equiv a [7]$

0.25	(ج) بين أن : $4 S_{2015} \equiv 0 [7]$ باستعمال السؤال 1 نجد $5^{2016} \equiv 1 [7]$ و منه $4 S_{2015} \equiv 5^{2016} - 1 [7]$ $5^{2016} - 1 \equiv 0 [7]$ $4 S_{2015} \equiv 0 [7]$ استنتج باقي قسمة S_{2015} على 7 لدينا حسب ما سبق:
0.25	فان $4 S_{2015} \equiv 0 [7]$ $S_{2015} \equiv 2 \times 0 [7]$ ومنه باقي قسمة على 7 هو العدد 0
0.5	(د) عين اصغر عدد طبيعي n حيث يكون 7 قاسم لـ S_n معناه: $S_n \equiv 0 [7]$ $5^{n+1} - 1 \equiv 0 [7]$ $5^{n+1} \equiv 1 [7]$ $5^{n+1} \equiv 5^0 [7]$ $n + 1 = 0, \quad n = -1$, مرفوضة وهو المطلوب , $n + 1 = 6, \quad n = 5$
01	$S_n = \frac{5^{n+1} - 1}{4}$ 3- حلول المعادلة (E) هي : $(x, y) = (KS_n + 5, -K \times 5^n - 4), \quad K \in \mathbb{Z}$
التنقيط	تصحیح التمرين الثالث (04 نقاط) الأعداد المركبة + المتتاليات
01	$e^{i\theta} + 1 = e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2})} + e^{i(\frac{\theta}{2} - \frac{\theta}{2})} = e^{i(\frac{\theta}{2})} [e^{i(\frac{\theta}{2})} + e^{-i(\frac{\theta}{2})}] = 2 \cos(\frac{\theta}{2}) e^{i(\frac{\theta}{2})} - 1$
0.75	2- نضع $z_n = ae^{ib}$ حيث a عدد حقيقي و $b \in]0, \frac{\pi}{2}[$ ومنه $u_n = \arg(z_n) = b$ ومن جهة اخرى لدينا $u_{n+1} = \arg(z_{n+1}) = \arg(z_n + z_n) = \arg(a(e^{ib} + 1)) = \arg(2a \cos(\frac{b}{2}) e^{i\frac{b}{2}}) = \frac{b}{2} = \frac{u_n}{2}$ اساسها $\frac{1}{2}$
0.25	- $u_n = \theta \times (\frac{1}{2})^n$
0.5	3- $v_{n+1} = z_{n+1} - \overline{z_{n+1}} = z_n + z_n - (\overline{z_n} + z_n) = z_n - \overline{z_n} = v_n$

0.5	01	- نستنتج ان v_n متتالية ثابتة وان $v_n = v_0 = z_0 - \overline{z_0} = 2i \sin(\theta)$ (ب) لدينا مما سبق $v_n = z_n - \overline{z_n} = 2i \sin(\theta)$ لكن $v_n = z_n e^{i\theta \times (\frac{1}{2})^n}$ وبالتالي $z_n (\sin(\frac{\theta}{2^n})) = \sin(\theta)$ اي $z_n - \overline{z_n} = z_n (2i \times \sin(\theta \times (\frac{1}{2})^n)) = 2i \times \sin(\theta)$
-----	----	--

حل التمرين الرابع (07 نقاط)

0.25	I. 1) نحسب المشتقة: $g'(x) = e^{x-2} - 1$												
0.25	جدول التغيرات:												
0.25	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$g'(x)$</td><td></td><td>-</td><td>+</td></tr><tr><td>$g(x)$</td><td></td><td></td><td>↗ 0 ↘</td></tr></table>	x	$-\infty$	0	$+\infty$	$g'(x)$		-	+	$g(x)$			↗ 0 ↘
x	$-\infty$	0	$+\infty$										
$g'(x)$		-	+										
$g(x)$			↗ 0 ↘										
0.25	(2) إشارة: $g(x) \geq 0$												
0.25	II.												
0.25	1) أ) النهايات:												
0.25	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$												
0.25	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$												
0.25	ب)												
0.25	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y) = 0$												
0.25	ج) وضعية C_f بالنسبة الى (d)												
0.25	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x) - y$</td><td></td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>الوضعية</td><td></td><td>أسفل</td><td>أعلى</td></tr></table>	x	$-\infty$	0	$+\infty$	$f(x) - y$		0	+	الوضعية		أسفل	أعلى
x	$-\infty$	0	$+\infty$										
$f(x) - y$		0	+										
الوضعية		أسفل	أعلى										
0.5	2) حساب المشتقة: $f'(x) = \frac{g(x)}{e^{x-2}}$												
0.25	ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ اذن الدالة f متزايدة												
0.25	تماما على R												
0.25	جدول التغيرات:												
0.25	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>+</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$f'(x)$		+	$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$			
x	$-\infty$	$+\infty$											
$f'(x)$		+											
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$											
0.5	3) أ) معناه نحل المعادلة: $f(x) = 0$												
0.5	باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة.												
0.5	ب) نحسب المشتقة الثانية $f''(x) = 0$												
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													
0.5													

الموضوع الثاني

العلامة		عناصر الإجابة	محاور الموضوع														
كاملة	مجزأة																
04 ن	0.5 ن	(1) أ) بواقي قسمة 3^n على 7 . <table><tr><td>$n =$</td><td>$6k$</td><td>$6k + 1$</td><td>$6k + 2$</td><td>$6k + 3$</td><td>$6k + 4$</td><td>$6k + 5$</td></tr><tr><td>$3^n \equiv$</td><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>6</td><td>4</td><td>5</td></tr></table> ب) $2019 \equiv 3[7]$ ومنه $2019^{6n+4} \equiv 4[7]$ $2017 \equiv 1[7]$ ومنه $2017^{4n+2} \equiv 1[7]$ إذن $2 \times 2019^{6n+4} + 2017^{4n+2} \equiv 2[7]$.	$n =$	$6k$	$6k + 1$	$6k + 2$	$6k + 3$	$6k + 4$	$6k + 5$	$3^n \equiv$	1	3	2	6	4	5	التمرين الأول
	$n =$	$6k$	$6k + 1$	$6k + 2$	$6k + 3$	$6k + 4$	$6k + 5$										
	$3^n \equiv$	1	3	2	6	4	5										
	0.5 ن																
	0.25 ن	(2) أ) $PGCD(343; 648) = 1$ و 1 يقسم 76 ومنه المعادلة (E) تقبل حلولاً في $\mathbb{Z}^2$.															
	0.75 ن	ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) . $(x; y) = (648k + 4; 343k + 2)$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.															
	0.5 ن	(3) ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين غير المعدومين x و y حلول المعادلة (E) . أ) d يقسم x و d يقسم y ومنه d يقسم $343x - 648y$ أي d يقسم 76 ومنه $d \in \{1; 2; 4; 19; 38; 76\}$.															
	0.5 ن	ب) $d = 76$ معناه $\begin{cases} 648k + 4 \equiv 0[76] \\ 343k + 2 \equiv 0[76] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 40k + 4 \equiv 0[76] \\ 39k + 2 \equiv 0[76] \end{cases}$ و منه $k \equiv 74[76]$ أي $k \equiv 76\alpha + 74$ مع $\alpha \in \mathbb{N}$. ومنه $(x; y) = (49248\alpha + 47956; 26068\alpha + 25384)$ مع $\alpha \in \mathbb{N}$.															
	0.5 ن																
	0.75 ن																
0.25 ن																	
0.5 ن	(4) ومنه $\begin{cases} \lambda = 344\beta + 7\alpha + 49 \\ \lambda = 655\alpha + \beta + 125 \\ 0 < \alpha < 5 \\ 0 < \beta < 5 \end{cases}$ أي $(\alpha; \beta) = (2; 4)$ ومنه $\begin{cases} 343\beta - 648\alpha = 76 \\ 0 < \alpha < 5 \\ 0 < \beta < 5 \end{cases}$ كتابة λ في نظام التعداد ذي الأساس 6: $\lambda = 1439 = \overline{01355}_6$.																
05 ن	0.25 ن	(1) $P(z) = z^3 + (2 - \sqrt{3})z^2 + (3 - 2\sqrt{3})z + 6$	التمرين الثاني														
0.5 ن		أ) $P(-2) = 0$															

		$P(z) = (z+2)(z^2 - \sqrt{3}z + 3)$ ب) $P(z) = 0$ تكافئ $(z+2=0)$ أو $(z^2 - \sqrt{3}z + 3=0)$. $z+2=0$ يكافئ $z = -2$. $z^2 - \sqrt{3}z + 3=0$ $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ و $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$ ، $\Delta = -9 = (3i)^2$.	
0.5 ن		مجموعة الحلول: $S = \left\{ -2; \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i; \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \right\}$ 2) $z_C = -2$ و $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_A = 1 + \sqrt{3}i$	
0.75 ن		أ) كتابة كل من الأعداد z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي: $z_C = 2e^{i\pi}$ و $z_B = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ، $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$	
0.25 ن		الاستنتاج: لدينا $z_A = z_B = z_C = 2$ أي $OA = OB = OC = 2$ ومنه النقط A ، B و C تنتمي إلى الدائرة (C) التي مركزها O ونصف قطرها 2 .	
0.5 ن		ب) $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n \in \mathbb{R}$ معناه $e^{i\frac{2n\pi}{3}} \in \mathbb{R}$ ومنه $2n\frac{\pi}{3} = k\pi$ ومنه $2n = 3k$ ونجد $n = 3k'$ حيث $k' \in \mathbb{N}$.	
0.5 ن		ج) $\bar{z} = ke^{-i\frac{2\pi}{3}}$ معناه $z = ke^{i\frac{2\pi}{3}}$ ومنه $\arg z = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ومنه	
0.5 ن		$(\bar{u}; \overline{OM}) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ومنه (Δ) هو نصف المستقيم $[OE)$ باستثناء النقطة O حيث $z_E = -1 + i\sqrt{3}$.	
0.5 ن		3) أ) كتابة على الشكل الأسّي العدد: $L = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$	
0.5 ن		$L = \frac{3 + i\sqrt{3}}{3 - i\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}}{2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$	
0.25 ن		ب) لدينا $z_A - z_C = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_C)$ ومنه A صورة B بالدوران الذي مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{3}$	
0.5 ن		ج) طبيعة المثلث ABC: لدينا $\begin{cases} CB = CA \\ (\overline{CB}; \overline{CA}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$ ومنه ABC متقايس الأضلاع	
0.5 ن		د) $ABCD$ متوازي أضلاع معناه $\overline{AD} = \overline{BC}$ أي $z_D - z_A = z_C - z_B$ ومنه $z_D = z_C - z_B + z_A$ أي $z_D = -2 + 2i\sqrt{3}$.	

التمرين الثالث :		04.5 نقطة										
لدينا $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية متزايدة حدودها موجبة معرفة على المجموعة $\mathbb{N}^*$ ب :												
$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 100 \\ u_1 \times u_3 = 256 \end{cases}$												
(1) حساب u_2 ، u_1 و u_3 :												
لدينا : $u_1 \times u_3 = u_2^2$ لأن u_2 هو الوسط الهندسي للحددين u_1 و u_3 . ومنه : $u_2^2 = 256$ يكافئ $u_2 = 16$ أو $u_2 = -16$ وبالتالي $u_2 = 16$ (لأن حدود المتتالية موجبة) وبالتالي لدينا :												
3 × 0.25	$\begin{cases} u_1 + u_3 = 68 \\ u_1 \times u_3 = 256 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} u_1 + 32 + u_3 = 100 \\ u_1 \times u_3 = 256 \end{cases}$ إذن u_1 و u_3 هما حلتي للمعادلة $x^2 - 68x + 256 = 0$ حساب المميز $\Delta = (-68)^2 - 4 \times 256 = 3600$ المعادلة تقبل حلين متميزين هما : $x_1 = \frac{68 - 60}{2} = 4$ و $x_2 = \frac{68 + 60}{2} = 64$ بما أن المتتالية متزايدة فإن $u_1 = 4$ و $u_3 = 64$											
0.25	حساب الأساس q :											
	$q = \frac{16}{4} = 4$											
0.25	(2) التعبير عن الحد العام u_n بدلالة n :											
	لدينا : $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 4 \times 4^{n-1} = 4^n$ أي $u_n = 4^n$											
	(3) حساب كلا من المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ و الجداء $P_n = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$ بدلالة n :											
	لدينا : $S_n = u_1 \times \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right) = 4 \times \left(\frac{1 - 4^n}{1 - 4} \right) = -\frac{4}{3}(1 - 4^n) = \frac{4}{3} \times 4^n - \frac{4}{3}$											
0.5	$S_n = \frac{4}{3} \times 4^n - \frac{4}{3}$											
0.5	■ حساب الجداء :											
	$P_n = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n = 4 \times 4^2 \times \dots \times 4^n = 4^{1+2+\dots+n}$ أي $P_n = 4^{\frac{n(n+1)}{2}}$											
2 × 0.5	(4) أ) دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد 7^n على 5 تبعا لقيم العدد الطبيعي n :											
	لدينا : $7^4 \equiv 1[5] \quad 7^3 \equiv 3[5] \quad 7^2 \equiv 4[5] \quad 7^1 \equiv 2[5] \quad 7^0 \equiv 1[5]$ إذن بواقي القسمة الاقليدية للعدد 7^n على 5 تشكل متتالية دورية دورها $P = 4$ من أجل كل عدد طبيعي k لدينا :											
	<table><tr><th>n</th><th>$4k$</th><th>$4k+1$</th><th>$4k+2$</th><th>$4k+3$</th></tr><tr><td>باقي قسمة العدد 7^n على 5</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>3</td></tr></table>	n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	باقي قسمة العدد 7^n على 5	1	2	4	3	
n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$								
باقي قسمة العدد 7^n على 5	1	2	4	3								

0.5	(ب) تعيين باقي القسمة الاقليدية للعدد $2016^{1436} + 49^{2n+1} + 5n - 3$ على 5 : لدينا : $2016 \equiv 1[5]$ ومنه $2016^{1436} \equiv 1^{1436}[5]$ أي $2016^{1436} \equiv 1[5]$ و $49^{2n+1} \equiv (7^2)^{2n+1}[5]$ ومنه $49^{2n+1} \equiv 7^{4n+2}[5]$ أي $49^{2n+1} \equiv 4[5]$ وكذلك لدينا : $5n - 3 \equiv -3[5]$ ومنه $5n - 3 \equiv 2[5]$ وبالتالي : $2016^{1436} + 49^{2n+1} + 5n - 3 \equiv 1 + 4 + 2[5]$ أي $2016^{1436} + 49^{2n+1} + 5n - 3 \equiv 2[5]$ باقي القسمة الاقليدية للعدد $2016^{1436} + 49^{2n+1} + 5n - 3$ على 5 هو 2
0.5	(ج) حساب S_n' بدلالة n : $S_n' = \frac{1}{\ln 2} [\ln 4 + \ln 4^2 + \dots + \ln 4^n] = \frac{1}{\ln 2} \ln(4 \times 4^2 \times \dots \times 4^n)$ $S_n' = \frac{1}{\ln 2} \times \ln P_n = \frac{1}{\ln 2} \times \ln 4^{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{1}{\ln 2} \times \ln(4)^{\frac{1}{2} \times (n^2+n)}$ أي $S_n' = \frac{1}{\ln 2} \times (n^2 + n) \times \ln 2 = n^2 + n$ ومنه : أي $S_n' = n^2 + n$
0.25	تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $S_n' + 4n^2 + 7^{4n} \equiv 0[5]$: $S_n' + 4n^2 + 7^{4n} \equiv 0[5]$ يعني $n^2 + n + 4n^2 + 7^{4n} \equiv 0[5]$ ومنه $n + 5n^2 + 1 \equiv 0[5]$ أي $n \equiv -1[5]$ ومنه $n \equiv 4[5]$ وبالتالي $n \equiv 5\alpha + 4, (\alpha \in \mathbb{N})$

التنقيط	الدوال	تصحيح التمرين الرابع (07 نقاط)									
2x0.25		-1 حساب النهايات:									
0.5		$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -1} f_n(x) = +\infty$									
0.5		(ب) حساب المشتقة									
0.5		لدينا المقدار $1 + x + n > 0$ لان $x > -1$ ومنه المشتقة سالبة تماما									
0.5		(ج)									
0.5		<table border="1"> <tr> <td>x</td><td>-1</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr> <td>$f'_n(x)$</td><td></td><td>-</td></tr> <tr> <td>$f_n(x)$</td><td></td><td>$\searrow$</td></tr> </table>	x	-1	$+\infty$	$f'_n(x)$		-	$f_n(x)$		$\searrow$
x	-1	$+\infty$									
$f'_n(x)$		-									
$f_n(x)$		$\searrow$									
0.5		-2									
0.5		بما ان جميع المنحنيات تمر من نقطة ثابتة نضع $f_1(x_0) = f_2(x_0)$ وبالتالي									
0.5		$A(0,1)$ هي النقطة هي $x_0 = 0$ ومنه $x \neq -1$ لكن $\frac{e^{-x_0}}{(1+x_0)} = \frac{e^{-x_0}}{(1+x_0)^2} \Leftrightarrow (1+x_0)(x_0) = 0$									

01

(أ) دراسة الوضع النسبي للمنحنين (c_1) و (c_2) :

$$f_1(x) - f_2(x) =$$

$$\frac{e^{-x}}{(1+x)} = \frac{e^{-x}}{(1+x)^2} \Leftrightarrow e^{-x} \left[\frac{x}{(1+x)^2} \right]$$

ومنه من أجل $x < 0$ (c_2) فوق (c_1) ومن أجل $x = 0$ (c_1) و (c_2) منطبقانومن أجل $x > 0$ (c_1) فوق (c_2)

(ب)

0.5



II-

-1

لدينا مما سبق

$$f'_n(x) = \frac{-e^{-x}(1+x)^n - e^{-x}(n)(1+x)^{n-1}}{(1+x)^{2n}} = \frac{-e^{-x}(1+x+n)}{(1+x)^{n+1}}$$

0.5

$$f'_n(x) = -\frac{e^{-x}}{(1+x)^n} - \frac{ne^{-x}}{(1+x)^{n+1}} = -(f_n(x) + n \times f_{n+1}(x))$$

$$f'_n(x) = -(f_n(x) + n \times f_{n+1}(x))$$

-2

0.25

(أ) لدينا $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 [f_{n+1}(x) - f_n(x)] dx < 0$ لأن $f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0$ من أجل $x > 0$

0.25

وبالتالي تكامل دالة سالبة هو عدد سالب ومنه I_n متناقصة(ب) إستنتاج أن I_n متقاربة

-3

0.25

$$0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow e^{-1} \leq e^x \leq 1 \Leftrightarrow \frac{e^{-1}}{(1+x)^n} \leq f_n(x) \leq \frac{1}{(1+x)^n} \quad (أ)$$

	ب) مما سبق
0.25	$\int_0^1 \frac{e^{-1}}{(1+x)^n} dx \leq \int_0^1 f_n(x) dx \leq \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^n} dx \Leftrightarrow \frac{e^{-1}}{1-n} [(1+x)^{1-n}]_0^1 \leq I_n \leq \frac{1}{1-n} [(1+x)^{1-n}]_0^1$ $\Leftrightarrow \frac{e^{-1}}{n-1} [1 - \frac{1}{2^{n-1}}] \leq I_n \leq \frac{1}{n-1} [1 - \frac{1}{2^{n-1}}]$
0.5	ج) باستعمال الحصر نجد النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$
	-4
	()
0.5	$f'_n(x) = -(f_n(x) + n \times f_{n+1}(x)) \Leftrightarrow \int_0^1 f'_n(x) dx = - \int_0^1 [f_n(x) + n f_{n+1}(x)] dx$ $\Leftrightarrow \frac{e^{-1}}{2^n} - 1 = -(I_n + n.I_{n+1}) \Leftrightarrow I_n + n.I_{n+1} = 1 - \frac{e^{-1}}{2^n}$
0.25	ب) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n.I_n = 1$
0.25	ج) حساب مساحة الحيز