الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المدرسة العليا للأساتذة بورقلة
مصلحة النشاطات الثقافية والرياضية
دورة أفريل 2024
الشعبة: رياضيات
المادة: الرياضيات
المدّة: 4 ساعات و 30 د

امتحان البكالوريا التجريبي

على المترشّح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:
الموضوع الأوّل

التمرين الأوّل (4 ن)

نعتبر في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة (E) المعرّفة كما يلي

$$(E): 650x - 732y = 486$$

1. أ. أُحسب $PGCD\,(650;732)$ ثمّ استنتج أنّ المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$
   ب. تحقّق أنّ الثنائية $(3;2)$ حلّ للمعادلة (E) ثمّ استنتج مجموعة حلولها.
2. نعتبر L عددا طبيعيا يكتب $\overline{\alpha 0\alpha\beta\beta}$ في نظام التعداد الذي أساسه 5 ويكتب $\overline{\beta 6\beta 0}$ في نظام التعداد الذي أساسه 9 حيث α و β عددان طبيعيان.
   • عيّن كُلّا من α و β ثمّ اُكتب L في النظام العشري.
3. حلّل العدد 1962 إلى جداء عوامل أوليّة ثمّ استنتج قيم العدد الطبيعي n التي تحقّق $1962 \equiv 0\,[n^2]$
4. نضع : $PGCD\,(a;b)=d$ و $PPCM\,(a;b)=m$ حيث $(a;b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$
   • عيّن كلّ الثنائيات $(a;b)$ التي تحقّق

$$\begin{cases} m - 91d = 0 \\ a^2 + b^2 = 1962 \end{cases}$$

التمرين الثاني (4 ن)

المتتالية العددية (U_n) معرّفة بـ $U_0 = 0$ ، ومن أجل كلّ عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \dfrac{3}{\sqrt{6-U_n^2}}$

I) 1. برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $0 \le U_n < \sqrt{3}$

2. أ. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $U_{n+1}^2 - U_n^2 = \dfrac{(U_n^2-3)^2}{6-U_n^2}$
   ب. بيّن أنّ المتتالية (U_n) متزايدة على $\mathbb{N}$ ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

II) المتتالية العددية (V_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $V_n = \dfrac{U_n^2}{3-U_n^2}$

1. أ. بيّن أنّ المتتالية (V_n) حسابية أساسها 1 ويُطلب تعيين حدّها الأوّل V_0

ب. بيّن أنّه من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$: $U_n = \sqrt{\dfrac{3n}{n+1}}$ ثمّ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

2. من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ نضع : $S_n = \dfrac{2024}{n+\sqrt{V_1}} + \dfrac{2024}{n+\sqrt{V_2}} + \cdots + \dfrac{2024}{n+\sqrt{V_n}}$

أ. بيّن أنّه من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$: $\dfrac{2024n}{n+\sqrt{n}} \leq S_n \leq \dfrac{2024n}{n+1}$

ب. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

التمرين الثالث (5 ن)

عيّن الاقتراح الصّحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثّلاثة في كلّ حالة من الحالات الآتية مع التّبرير

1. حلّ المعادلة التفاضلية $y'' = \pi^2 e^{\pi x+\pi}$ الذي يحقّق $y(0) = e^{\pi}$ و $y'(-1) = \pi$ هو الدّالة h المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي

أ) $h(x) = e^{\pi x+\pi}$ ب) $h(x) = \pi x + e^{\pi}$ ج) $h(x) = e^{\pi x+\pi} + \pi x$

2. عدد الإمكانيات لتشكيل عدد مضاعف للعدد 5 ومكوّن من ثلاثة أرقام متمايزة مثنى مثنى باستخدام مجموعة الأرقام $\{0;1;9;5;4\}$ هو

أ) 5 ب) 24 ج) 21

3. إذا كان n عددا من $\mathbb{N}^*$ فإنّ المجموع : $\int_1^2 \dfrac{\log x}{x}dx + \int_2^3 \dfrac{\log x}{x}dx + \cdots + \int_n^{n+1} \dfrac{\log x}{x}dx$ يساوي

أ) $\dfrac{[\log(n+1)]^2}{2\ln 10}$ ب) $\dfrac{\log(n+1)}{\ln 100}$ ج) $\dfrac{\ln(n+1)\times\log(n+1)}{2}$

4. إذا كان z عددا مركّبا حيث $z = \sin\dfrac{\pi}{8} + i\cos\dfrac{\pi}{8}$ فإنّ

أ) $\arg(z) \equiv \dfrac{3\pi}{8}\,[2\pi]$ ب) $\arg(z) \equiv \dfrac{3\pi}{4}\,[2\pi]$ ج) $\arg(z) \equiv \dfrac{5\pi}{8}\,[2\pi]$

5. مجموعة حلول المتراجحة $4^x + 2^{x+1} \leq 3$ ذات المجهول الحقيقي x هي المجال

أ) $[0;+\infty[$ ب) $]-\infty;0]$ ج) $[-3;1]$

التمرين الرّابع (7 ن)

I) الدّالة العددية g معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x) = xe^{x-1} - 1$

1. بيّن أنّ الدّالة g متزايدة تماماً على المجال $]0;+\infty[$

2. أ. بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 1$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $1,3 < \alpha < 1,4$

ب. استنتج حسب قيم x من المجال $]0;+\infty[$ إشارة العبارة : $g(x) - 1$

II) الدّالة العددية f معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = e^{x-1} - 2\ln x - 1$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث $\|\vec{j}\| = 1cm$

1. أ. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وفسّر النتيجة هندسيا ثمّ أحسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$

ب. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)-1}{x}$

ج. أُدرس اتجاه تغيّر الدّالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها

2. أ. أُكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة التي فاصلتها 1

ب. أنشئ كُلّا من (T) و (C_f). (تُعطى: $f(\alpha)\approx -0,2$).

ج. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $e^x+e^{m+1}(x-1)=e(\ln x^2+1)$

3. نعتبر λ عددا حقيقيا حيث $0<\lambda<1$

أ. أُكتب بدلالة λ العدد $\mathcal{A}(\lambda)$ المعرّف بـ : $\mathcal{A}(\lambda)=\int_{\lambda}^{1} f(t)dt$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

ب. بيّن أنّ $\lim\limits_{\lambda \overset{>}{\to} 0}\mathcal{A}(\lambda)=(2-e^{-1})\,cm^2$

انتهى الموضوع الأوّل

الموضوع الثاني

التمرين الأوّل (4 ن)

صندوق به 6 بطاقات متماثلة لا نفرّق بينها عند اللّمس، منها ثلاث بطاقات حمراء، بطاقتين خضراوين وبطاقة بيضاء.
البطاقات الحمراء تحمل الحروف: E ، N و N ، البطاقتين الخضراوين تحملان الحرفين: N و S ، أمّا البيضاء تحمل الحرف S
نسحب عشوائيا من الصندوق ثلاث بطاقات في آن واحد.

I) 1. أُحسب احتمال كلّا من الحدثين الآتيين

أ. A: " الحصول على بطاقتين من نفس اللّون بالضّبط ".

ب. B: " الحصول على ثلاث بطاقات يُمكن أنّ تشكّل كلمة ENS ".

2. أ. بيّن أنّ $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ ، ثمّ استنتج أنّ الحدثين A و B ليسا مستقلين.

ب. أُحسب $P_A(\overline{B})$ (احتمال الحدث $\overline{B}$ علما أنّ الحدث A محقّق)

II) نضيف إلى الصندوق n بطاقة تحمل الحرف E حيث $n \in \mathbb{N}^*$ ، ونسحب عشوائيا من الصندوق بطاقتين على التوالي وبإرجاع، وليكن X المتغيّر العشوائي الذي يُرفق بكل سحب لبطاقتين عدد مرّات ظهور الحرف S

1. أ. برّر أنّ مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X هي $\{0;1;2\}$

ب. عرّف قانون احتمال المتغيّر العشوائي X

2. عيّن قيمة العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $P\left(\int_0^X te^t dt = 1\right) = \frac{3}{8}$

التمرين الثاني (4 ن)

I) حلّ في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z^2+2z+2)\left(\overline{2iz+\sqrt{3}}+i\right)=0$

II) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A ، B ، C و D التي لاحقاتها z_A، z_B، z_C و z_D على الترتيب حيث: $z_A=-1+i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $2z_C=z_A\times\left(1+i\sqrt{3}\right)$ و $z_A+z_D=0$

1. أ. أُكتب z_A على الشّكل المثلّثي ثمّ استنتج كتابة z_C على الشّكل المثلّثي.

ب. أُكتب z_C على الشّكل الجبري ثمّ استنتج القيمة المضبوطة لكلّ من $\cos\frac{13\pi}{12}$ و $\sin\frac{13\pi}{12}$

2. بيّن أنّ العدد المركّب $\frac{z_B-z_D}{z_B-z_A}$ تخيّلي صرف ثمّ استنتج طبيعة المثلّث ADB

3. عيّن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللّاحقة z حيث : $\frac{\overline{z}-z_B}{\overline{z}-z_A}\times\frac{z-z_A}{z-z_B}=1$

التمرين الثالث (5 ن)

المتتالية العددية (U_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي

$$\begin{cases} U_0=0 \ ; \ U_1=1 \\ U_{n+2}=3U_{n+1}-2U_n \end{cases}$$

1. من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ نضع : $V_n=U_{n+1}-U_n$

أ. بيّن أنّ المتتالية (V_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل

ب. برهن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $U_n = 2^n - 1$

ج. استنتج أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $PGCD\,(U_n; U_{n+1}) = 1$

2. من أجل كلّ عدد طبيعي n نضع : $L_n = 3^n + (U_n + 1)^{2024} + U_n$

أ. أُدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لكلّ من العددين 2^n و 3^n على 5

ب. بيّن أنّ العدد L_n يقبل القسمة على 5 إذا وفقط إذا كان العدد الطبيعي n فرديا.

3. أ. بيّن أنّه من أجل كلّ n و p من $\mathbb{N}$ حيث $n \geq p$: $U_n = 2^p \times U_{n-p} + U_p$

ب. استنتج أنّ $PGCD\,(U_{1962}; U_{1954}) = 3$

التمرين الرّابع (7 ن)

I) الدّالة العددية g معرّفة على المجال $]-1; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = \dfrac{x}{x+1} - \ln(x+1)$

1. أُدرس اتجاه تغيّر الدّالة g على المجال $]-1; +\infty[$

2. أُحسب $g(0)$ ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$

II) الدالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \dfrac{2\ln(e^x+1)}{e^x} - 1$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$

1. أ. أُحسب كُلّا من $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ مفسّرا النتيجتين هندسيا.

ب. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = 2e^{-x} \times g(e^x)$

ج. استنتج أنّ الدّالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2. أ. بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $0,9 < \alpha < 1$

ب. أنشئ المنحنى (C_f)

3. أ. بيّن أنّه من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$: $f(x) + f'(x) = 1 - \dfrac{2e^x}{e^x+1}$

ب. استنتج دالة أصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$

III) المتتالية العددية (β_n) معرّفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $\beta_n = 2\displaystyle\int_0^1 e^{-\frac{x}{n}} \ln(1+e^x)\,dx$

1. أ. أُحسب β_1 ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

ب. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي غير معدوم n : $\beta_n \leq 2\ln(1+e)$

ج. بيّن أنّ المتتالية (β_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}^*$ ثمّ استنتج أنّها متقاربة نحو عدد حقيقي l

2. أ. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي غير معدوم n : $\left(1 - e^{-\frac{1}{n}}\right)\ln 4^n \leq \beta_n \leq \left(1 - e^{-\frac{1}{n}}\right)\ln(1+e)^{2n}$

ب. استنتج حصراً للعدد l

انتهى الموضوع الثاني