

السنة الدراسية : 2023/2024
الدورة : 13 ماي 2024
الشعبة : علوم تجريبية
الأستاذ : الحسين رميلي



وزارة التربية الوطنية
مديرية التربية لولاية البرج
ثانوية 18 فيفري الحمادية

المدة : 3 ساعات ونصف

الإمتحان التجريبي في مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار موضوعا واحدا

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

لكل سؤال جواب واحد صحيح عينه مع التبرير في كل حالة :

(1) مجموعة حلول المتراجحة : $\ln(x^2 - 2x) \leq \ln(12 - x)$ في المجموعة الأعداد الحقيقية هي :
(أ) $S = [12; +\infty[$ (ب) $S = [-3; 0[\cup]2; 4]$ (ج) $S =]0; 2[$

(2) المتتالية I_n المعرفة على IN بـ : $I_n = \int_n^{n+1} 3e^{1-x} dx$ هي متتالية هندسية أساسها يساوي :

(أ) $\frac{1}{e}$ (ب) $3e^2$ (ج) $3\sqrt{e}$

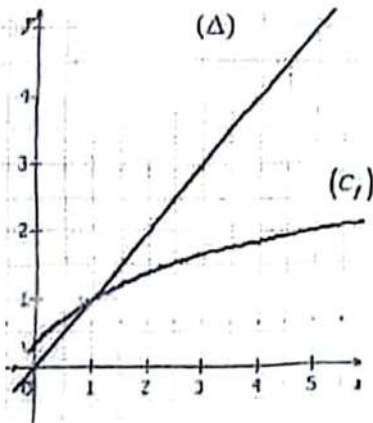
(3) الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $2y - y' = 2$ هو الدالة h التي تحقق : $h(0) = 2024$ والمعرفة بالعلاقة :
(أ) $h(x) = 2023e^{2x} + 1$ (ب) $h(x) = 2022e^{2x} + 2$ (ج) $h(x) = 2024e^{2x} - 1$

(4) حل المعادلة التفاضلية $y'' - e^{-x} - 2 = 0$ والتي تحقق $y(0) = 1$ و $y'(0) = 1$ هي الدوال :

(أ) $y = -e^{-x} + 2x$ (ب) $y = x^2 + e^{-x} + 2x - 1$ (ج) $y = x^2 + e^{-x} + 2x$

التمرين الثاني : (04.5 نقاط)

f دالة معرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{3x+1}{x+3}$ و (C_f) تمثيلها البياني و (Δ) مستقيم معادلته $y = x$ أنظر الشكل



نعتبر متتالية عددية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 5$ ومن أجل كل $n \in IN$: $u_{n+1} = f(u_n)$
(1) أعد الرسم ثم مثل الحدود u_0, u_1, u_2 على محور الفواصل مبرزاً خطوط الرسم .
(ب) أعط تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .

نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(1) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول، ثم برر تقاربها ؟

(2) (أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

(ب) تحقق أن : $1 - v_n = \frac{2}{u_n + 1}$ ، ثم أكتب u_n بدلالة n ، و أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $S_n = \frac{4}{(u_0 + 1)^2} + \frac{4}{(u_1 + 1)^2} + \dots + \frac{4}{(u_n + 1)^2}$

(أ) أحسب المجموعين S_1 و S_2 حيث : $S_1 = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $S_2 = (v_0)^2 + (v_1)^2 + \dots + (v_n)^2$

(ب) استنتج حساب المجموع S_n

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

يحتوي صندوق u_1 على 4 كريات حمراء و 3 كريات خضراء وصندوق آخر u_2 يحتوي على 3 كريات حمراء و 2 كرية خضراء، لا يمكن التمييز بينها عند اللمس.

نقوم بسحب كرية واحدة من الصندوق u_1 ونضعها في الصندوق u_2 ثم نسحب كرتين في آن واحد من الصندوق u_2 .

نرمز للحدث A : سحب كرية حمراء من الصندوق u_1 ، و للحدث B : سحب كرتين حمراوين من الصندوق u_2 .

(1) احسب احتمال $p(A)$ و $p(A \cap B)$.

(2) نتحقق أن: $p(B) = \frac{11}{35}$ ، هل الحدثان A و B مستقلان ؟ علل.

(3) علما أن الكرتين المسحوبتين من u_2 حمراوين ، ما احتمال أن تكون الكرية المسحوبة من u_1 حمراء

(4) نفرغ محتوى الصندوق u_1 والصندوق u_2 في صندوق آخر u_3 ثم نسحب عشوائيا 3 كريات في آن واحد من الصندوق u_3 بحيث يربح اللاعب $10DA$ عند كل سحبة لكزية خضراء ، ويخسر $5DA$ لكل سحبة لكزية حمراء ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي مجموع أرباح اللاعب .

(1) بين أن قيم المتغير العشوائي X هي: $\{-15; 0; 15; 30\}$

(ب) عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X . هل هذه اللعبة مربحة ؟ علل .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

g الدالة العددية المعرفة على IR^* بـ: $g(x) = x^2 - \ln x^2$

(1) بين أن الدالة g زوجية .

(2) أدرس تغيرات الدالة g على المجال $]0; +\infty[$ ، ثم استنتج اتجاه تغيرها على IR^* .

(ب) شكل جدول تغيرات الدالة g على IR^* .

(3) استنتج أنه من أجل كل x من IR^* فإن $g(x) \geq 1$.

لتكن الدالة f على المجال IR^* بـ: $f(x) = 1 + x + \frac{-1 + \ln x^2}{x}$ و (c_i) تمثيلها البياني في M متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وفسر النتيجةين بيانيا ثم احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$.

(2) (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من IR^* فإن: $f'(x) = \frac{g(x) + 3}{x^2}$.

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 1 + x$ مقارب مائل لـ (c_i) ، ثم أدرس وضعية (c_i) بالنسبة لـ (Δ) .

(4) احسب $f(x) + f(-x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا .

(5) بين أن (c_i) يقبل مماس (T) يمر بالنقطة $A(0;1)$ وبمسحة في نقطتين معادلته: $y = ax + 1$ حيث a عدد حقيقي يطلب تعيينه.

(6) ارسم كل من (Γ) و (Δ) والمنحنى (c_i) .

(أ) m وسيط حقيقي ، بين أن المستقيمتان (Δ_m) ذو المعادلة $y = mx + 1$ تمر من النقطة A ،

(ب) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تكون للمعادلة $f(x) = mx + 1$ أربع حلول متميزة .

(8) (أ) بين أن: $x \mapsto (\ln x)^2$ دالة أصلية لدالة $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ على المجال $]0; +\infty[$.

(ب) احسب A مساحة الحبر المسنوي المحدد بالمنحنى (c_i) والمستقيمتان التي معادلتيها: $x = e$ و $x = e^2$ و $y = 1 + x$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

التحق أحد الطلبة بثانوية خاصة فأراد مدرسه للمواد المتميزة اختبار مستواه الدراسي فقاموا بوضع 9 أسئلة في أطرفة متماثلة بصندوق غير شفاف ، 3 منها خاصة بمادة الرياضيات ، و 2 منها خاصة بمادة الفيزياء و 4 خاصة بمادة العلوم الطبيعية ، وعلى هذا الطالب أن يسحب عشوائيا ثلاثة أطرفه على التوالي دون إرجاع للإجابة على الأسئلة الموجودة داخلها ، نعتبر الحوادث الآتية:

A : الأطرفة المسحوبة تحتوي على أسئلة لنفس المادة ، C : الأطرفة المسحوبة تحتوي على أسئلة لمادتين فقط B : الأطرفة المسحوبة تحتوي على أسئلة لمواد مختلفة ،

$$(1) \text{ احسب : } p(A), p(B), \text{ ثم بين أن : } p(C) = \frac{55}{84}.$$

(2) أحسب احتمال الحدث D : الطرف المسحوب الأول يحتوي على أسئلة لمادة الرياضيات .

(3) علما أن الأطرفة المسحوبة تحتوي على أسئلة لمواد مختلفة ، ما احتمال أن يكون الطرف المسحوب الأول لمادة للرياضيات

(4) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد مواد الاختبار .

(أ) عين قيم المتغير العشوائي X .

(ب) عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X .

(ج) أحسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X ، ثم استنتج قيمة (E(2024 X + 1962) .

التمرين الثاني: (05 نقاط)

$$(u_n) \text{ متتالية عددية معرفة بدحا الأول } u_0 = \frac{7}{4} \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{3}{8}.$$

$$(1) \text{ أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي } n : u_n > \frac{3}{4}.$$

$$\text{ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية } (u_n) , \text{ و برر أنها متقاربة , ثم استنتج أن : } u_n \leq \frac{7}{4}.$$

$$(2) (v_n) \text{ متتالية عددية معرفة على } \mathbb{N} \text{ كمايلي : } v_n = \alpha \left(\frac{2}{3} \right)^n \left(u_n - \frac{\alpha}{4} \right).$$

$$- \text{ عين قيمة العدد الحقيقي } \alpha \text{ حتى تكون المتتالية } (v_n) \text{ هندسية أساسها } \frac{1}{3}.$$

فيما يلي نأخذ $\alpha = 3$

$$(1) \text{ أ) عبر عن } v_n \text{ بدلالة } n.$$

$$\text{ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي } n : u_n = \left(\frac{1}{2} \right)^n + \frac{3}{4} , \text{ ثم احسب } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n.$$

$$(2) \text{ أ) عبر عن } P_n \text{ بدلالة } n \text{ حيث : } P_n = \ln(v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n).$$

$$\text{ب) عين قيمة العدد الطبيعي } n \text{ بحيث : } P_n = 4949 \ln \left(\frac{1}{3} \right).$$

$$(3) \text{ احسب } S_n \text{ بدلالة } n \text{ حيث : } S_n = \frac{v_0}{u_0 - \frac{3}{4}} + \frac{v_1}{u_1 - \frac{3}{4}} + \dots + \frac{v_n}{u_n - \frac{3}{4}}. \text{ ثم احسب } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n.$$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة: $(z+1-i)(z^2+2z+4)=0$.

نعتبر المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومجاور $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، ولتكن النقط A, B, C التي نلاحظها على الترتيب $z_A = -1+i, z_B = -1+i\sqrt{3}, z_C = \overline{z_B}$.

(2) أكتب العدد $\frac{z_A}{z_B}$ على الشكل الجبري ثم الشكل الأسّي، ثم استنتج القيمة المضبوطة لـ $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

(3) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $\left(\frac{2z_A}{\sqrt{2}z_B}\right)^n$ حقيقي سالب، وبين أن: $\left(\frac{z_B}{2}\right)^{2024} + \left(\frac{z_C}{2}\right)^{1441} = -1$.

(4) عين وأنشئ (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق: $|z+1-i| = |z+\sqrt{3}+i|$.

(5) عين وأنشئ (δ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث العدد: $\frac{z-\overline{z_B}}{z-z_A}$ تخيلي صرف.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

g الدالة العددية المعرفة على IR بـ: $g(x) = 2 + (2-x)e^x$.

(1) أدرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث: $\alpha \in]2.21; 2.23[$.

(3) حدد من أجل كل عدد حقيقي x إشارة $g(x)$ ، ثم استنتج إشارة $g(-x)$ على IR .

نعتبر الدالة f المعرفة على IR بـ: $f(x) = \frac{x^2}{1+e^x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومجاور $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(4) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وفسر النهاية الأخيرة بيانياً.

(5) بين أنه من أجل كل x من IR فإن: $f'(x) = \frac{xg(-x)}{(1+e^x)^2}$.

(6) بين أن الدالة f متناقصة على المجال $]-\alpha; 0[$ ومتزايدة على المجال $]-\infty; -\alpha[$ و $]0; +\infty[$ وشكل جدول تغيراتها.

(7) بين أن: $f(-\alpha) = \alpha(\alpha-2)$ ، ثم جد حصر للعدد $f(-\alpha)$.

(8) بين أن المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حل وحيد β حيث: $\beta \in]1.1; 1.2[$.

(9) ليكن (Γ) المنحنى الممثل للدالة المعرفة على IR بـ: $x \mapsto x^2$.

(10) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x^2) = 0$ ثم فسر النتيجة بيانياً، ثم أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (Γ) و (C_f) .

(11) عين نقاط تقاطع (C_f) مع حاملتي محوري الإحداثيات ثم أرسم كل من (Γ) و (C_f) . (نأخذ $f(-\alpha) \approx 0.48$)

ب) ناقش بيانياً وحسب قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماماً m عند حلول المعادلة $f(x) = x^2 + \ln(m)$.

(12) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من IR فإن: $0 \leq f(x) \leq x^2$.

(13) استنتج حصر للعدد A الذي يمثل مساحة الحيز المسوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات $x=0, y=0$ و $x=1$.

انتهى الموضوع الثاني

* الأستاذ: الحسين رميلي * بالتوفيق في شهادة البكالوريا *