

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين :

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

يحتوي صندوق على خمس كريات بيضاء تحمل الأرقام 3 ; 2 ; 1 ; 0 ; -1 و ثلاث كريات حمراء تحمل الأرقام 3 ; -4 ; 0 و 0 . وكريتين خضراء تحملان الرقمين 4 ; 0 . الكريات كلها متماثلة ولا نفرق بينها عند اللمس . نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من الصندوق .

(1) أحسب احتمال كل حدث من الأحداث التالية :

A : " الحصول على ثلاث كريات مختلفة اللون " B : " الحصول على ثلاث كريات مجموع أرقامها معدوم " (2) أ . أحسب احتمال الحادثة : $\bar{A} \cap B$.

ب . استنتج أنّ احتمال الحادثة ، $\bar{A} \cup B$ هو $\frac{19}{120}$.

(3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب لثلاث كريات عدد الكريات المتبقية التي تحمل الرقم 0 .

أ . عيّن القيم الممكنة لـ X ثم عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X .

ب . أحسب احتمال الحادثة : " $2 - \ln X \geq 0$ "

التمرين الثاني : (04.5 ن)

(1) $P(z)$ كثير حدود للمتغير المركب z المعروف كمايلي :

$$P(z) = z^3 + (2 - \sqrt{3})z^2 + (3 - 2\sqrt{3})z + 6$$

أ . أحسب $P(-2)$ ثم عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون : $P(z) = (z + 2)(z^2 + az + b)$ ب . حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z) = 0$.

(2) نعتبر في المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(0; \vec{u}; \vec{v})$.النقط A ، B و C لواحقتها: $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = \bar{z}_A$ و $z_C = -2$ على الترتيب .

أ . أكتب كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي ثم استنتج أنّ النقط A ، B و C تنتمي الى نفس الدائرة . ب . عين z_E و z_F لواحق النقطتين E و F حتى يكون المثلثين ABF و ACE قائمين في A و C على الترتيب .

ج . عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ حقيقي .

(3) أ . أكتب العدد L على الشكل الأسّي حيث : $L = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$.

ب . حدد مع التعليل طبيعة المثلث ABC .

ج. عيّن z_D لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع .

(4) عيّن ثم أنشئ (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $z = ke^{-i\frac{2\pi}{3}}$ عندما k يسمح $\mathbb{R}_+^*$.

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2^{1-n}(u_n)^2$

- (1) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 2^{n-1}$.
- (2) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثمّ استنتج أنّها متقاربة نحو عدد حقيقي يطلب تعيينه .
- (3) نعتبر المجموع S_n حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.
- بيّن أنّ : $0 \leq S_n \leq 2^n - \frac{1}{2}$.

نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = n - \frac{\ln(u_n)}{\ln 2}$.

- (1) برهن أنّ المتتالية (v_n) هندسية ، ثمّ أكتب v_n بدلالة n .
- (2) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2^{n-2^n}$ ، ثمّ أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- (3) أكتب T_n بدلالة n حيث : $T_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $[1; +\infty[$ بـ : $g(x) = (1-x)e^x + 1$.

- (1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ثمّ أدرس اتجاه تغيّرات الدالة g على المجال $[1; +\infty[$ و شكل جدول تغيّراتها .
- (2) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $1,27 < \alpha < 1,28$.
- (3) استنتج إشارة $g(x)$ على $[1; +\infty[$.

II. لتكن الدالة f المعرفة على $[1; +\infty[$ بـ : $f(x) = e^x - \ln(x-1)$. (C_f) تمثيلها البياني في المستوي

المنسوب الى معلم متعامد $(O; \vec{i}; \vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\| = 1cm$ و $\|\vec{j}\| = 0,5cm$

- (1) بين أنّ : $f(\alpha) = \alpha + \frac{1}{\alpha-1}$ ثمّ أعط حصرا لـ $f(\alpha)$.
- (2) أ. بيّن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1; +\infty[$ أنّ : $f(x) = x \left(\frac{e^x}{x} - \frac{x-1}{x} \times \frac{\ln(x-1)}{x-1} \right)$.
ب. استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.
- (3) أحسب : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ثمّ فسر النتيجة بيانيا .
- (4) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{-g(x)}{x-1}$ ،
- (5) هل المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ؟ علل .
- (6) شكل جدول تغيّرات الدالة f ثمّ أنشئ المنحنى (C_f) على المجال من $[1; e]$.
- (7) أ. تحقق أنّ الدالة $x \mapsto (x-1)\ln(x-1) - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln(x-1)$ على المجال $[1; +\infty[$.

ب. أحسب بالسنتمتر المربع المساحة $\mathcal{A}$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين

الذين معادلتهما : $x = 1,5$ و $x = 2$.

انتهى الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

- نعتبر في المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(0; \vec{u}; \vec{v})$. النقط A ، B و C لواحقتها:
- (1) حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z : $z^2 - 2z + 4 = 0$.
- (2) أحسب كلا من $|z_A|$ ، $|z_B|$ و $|z_C|$ ثم استنتج أنّ النقط A ، B و C تنتمي الى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .
- (3) أ. أكتب كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي .
ب. أكتب $\frac{z_A}{z_B}$ على الشكل الأسّي ثم استنتج طبيعة المثلث ABO .
- (4) عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ حقيقي موجب تماما ثم اكتب $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2024}$ على الشكل الجبري .
- (5) عيّن مجموعة النقط من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $\left|\frac{iz - \sqrt{3} - i}{\bar{z}}\right| = 1$

التمرين الثاني : (04.5 نقاط)

- I. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ كمايلي : $f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$.
- أدرس اتجاه تغير الدالة f .
- II. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$
- (1) أ. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq 3$.
ب. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .
ج. هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟ برر اجابتك .
- (2) أ. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $3 - u_{n+1} \leq \frac{3}{4}(3 - u_n)$.
ب. استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq 3 - u_n \leq 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$.
ج. أحسب نهاية المتتالية (u_n) .
- (3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$
- أ. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $3(n+1) \leq S_n \leq 8\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1\right) + 3(n+1)$.
ب. أحسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

التمرين الثالث : (04.5 نقاط)

- يحتوي كيس U_1 على خمس كريات حمراء وأربع كريات بيضاء ، ويحتوي كيس U_2 على أربع كريات حمراء و ثلاث كريات بيضاء ، (الكرات كلها متماثلة و لانفرق بينها باللمس) .
نرمي زهر نرد غير مزيف ، اذا حصلنا على رقم مضاعف لـ 3 نسحب كرتين في آن واحد من الكيس U_1 ، وفي باقي الحالات نسحب كرتين على التوالي معارجاع الكرة المسحوبة من U_2 .

نسمي الحدث A : " الحصول على رقم مضاعف لـ 3 "

B : " الحصول على كرتين من نفس اللون "

(1) أنقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثم أكملها .

(2) أحسب $P(B)$.

(3) علما أن الكرتين المسحوبتين من نفس اللون ماهو احتمال ان تكونا من الكيس U_2 .

(4) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحبة العدد 2 في حال كانت الكرتان من نفس اللون و العدد 1- في حال كانت الكرتان مختلفتين في اللون .

أ. عرّف قانون احتمال المتغير العشوائي X .

ب. بيّن أن $E(X) = \frac{205}{441}$.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I. الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (2-x)e^x + 2$ و (C_g) تمثيلها البياني في مستو منسوب

الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (كما في الشكل)

(1) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث :

$$2,21 < \alpha < 2,22$$

(2) بقراءة بيانية عيّن إشارة $g(x)$ ثم استنتج إشارة $g(-x)$ على $\mathbb{R}$

II. الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{x^2}{1+e^{-x}}$

، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أحسب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم فسر بيانيا نتيجة النهاية الأخيرة .

(2) أ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{x.g(-x)}{(1+e^{-x})^2}$.

ب. استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

ج. بيّن أن $f(-\alpha) = \alpha(\alpha - 2)$ ثم أعط حصرا للعدد $f(-\alpha)$

(3) أ. بيّن أن المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا β حيث : $1,1 < \beta < 1,2$.

ب. حل في المعادلة $E(f(x)) = 0$ حيث E هي دالة الجزء الصحيح .

(4) ليكن (Γ) المنحنى الممثل للدالة $x^2 \mapsto x$ على $\mathbb{R}$.

أ. بيّن أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^2] = 0$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا .

ب. أدرس الوضعية النسبية للمنحنيين (C_f) و (Γ) .

(5) أنشئ (Γ) و (C_f) . (تعطى : $f(-\alpha) \approx 0.48$)

(6) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماما m عدد حلول المعادلة : $f(x) = x^2 + \ln(m)$.

(7) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $0 \leq f(x) \leq x^2$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $\mathcal{A}$ الذي يمثل مساحة الحيز

المستوي المحدد بـ (C_f) ، محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما $x = 0$ و $x = 1$.

انتهى الموضوع الثاني .