الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية ميلة — ثانوية كتامة –عين البيضاء احريش –

امتحان : بكالوريا تجريبي — دورة: مـــــــاي 2024

الشعبة : علــوم تجريبية — يـوم : 13 مـــاي 2024

اختبار في مادة الرياضيات — المدّة: 3 ساعات ونصف

على المترشّح أن يختار أحد الموضوعين الثّاليين

الموضوع الأوّل

التمرين الأول (04 نقاط) :

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاث في كلّ حالة من الحالات التالية ، مع التبرير:

	الاقتراح(أ)	الاقتراح(ب)	الاقتراح (ج)
نعرف المتتالية (u_n) من أجل كل عدد طبيعي n $u_n=(4^{2\alpha}+4^{\alpha}-5)^n+3$ قيم العدد الحقيقي α التي تكون من أجلها $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ هي	$\ln 2$	$]\ln 2;\ln 4[$	$\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$
(u_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\frac{2}{x}(1+\ln x)dx$ قيمة المجموع : $S=u_0+u_1+.....+u_{43}$ هي	$S=2024$	$S=1012$	$S=2023$
z عدد مركب ، معامل z^6 في منشور العدد $(z+2i)^8$ هو	$S=1792i$	$S=-448i$	$S=448$
إذا كان $\frac{\pi}{12}$ عمدة للعدد المركب z فإن عمدة العدد $\frac{1}{\bar{z}^2}$ هي	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{12}$
إذا كان $z=-i\sqrt{3}+e^{i\frac{\pi}{3}}$ فإن الشكل الأسي للعدد z هو	$e^{-i\frac{\pi}{6}}$	$e^{-i\frac{\pi}{3}}$	$e^{i\frac{\pi}{6}}$

التمرين الثاني (05 نقاط) :

I. (w_n) متتالية حسابية متزايدة تماما معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول w_0 واساسها r :

أ) أحسب w_2 والأساس r علما أنّ : $\begin{cases}2w_1+3w_2+2w_3=35\\ w_1^2+10w_2-w_4^2=-22\end{cases}$

ب) اكتب عبارة الحد العام w_n بدلالة n

ج) بيّن أن العدد 4049 حد من حدود هذه المتتالية ثم عين رتبته وأحسب المجموع S حيث : $S=w_0+w_1+.....w_{2024}$

II. لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=3u_n+2n+1$

1) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=3^n-n-1$

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=u_n+n+1$

أ) برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها 3 ، يطلب حساب حدها الأول v_0

ب) اكتب بدلالة n عبارة v_n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n وأحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n$

ت) احسب بدلالة n المجموعين S_n و T_n حيث : $S_n=v_0+v_1+.....+v_n$

$T_n=u_0+u_1+.....+u_n$

ث) عين قيمة n حتى يكون : $S_n-T_n=1830$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

يحتوي صندوق U على (12) كرية متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس منها (5) كريات بيضاء مرقمة كما يلي :

0 , 4 , 4 , 2 , 2 وأربع كريات سوداء مرقمة كما يلي : 1 , 1, 2 , 2 وثلاث كريات حمراء مرقمة كما يلي: 1 , 2 , 0

I. نقوم بسحب اربع كريات في ان واحد وبطريقة عشوائية

✓ أحسب احتمال الأحداث التالية : A : " الكريات المسحوبة من نفس اللون "

B : " الحصول على أربع كريات تحمل أرقاما تشكل العدد 2024"

C : " الحصول على أربع كريات مجموع أرقامها 8 " D : " الحصول على كرية بيضاء على الأقل"

1) بيّن أنّ : $P(A\cap B)=\frac{2}{495}$ ثم استنتج $P(\overline{A\cup B})$

II. نقوم الآن باستبدال الكريات البيضاء بـ n كرية سوداء تحمل الرقم 2 ونسحب من الصندوق عشوائيا كرتين على التوالي وبدون ارجاع ، ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب مجموع الرقمين المسجلين على الكرتين .

أ) عين القيم الممكنة التي يأخذها المتغير العشوائي X و عرف قانون احتماله .

ب) أحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ للمتغير العشوائي X .

التمرين الرابع (06 نقاط) :

I. لتكن الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=(4-2x)e^{x}-4$

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$.

2) ادرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها .

3) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما 0 والاخر α حيث : $1.59<\alpha<1.6$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا

4) استنتج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\frac{2x-2}{e^{x}-2x}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ حيث $\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|=2cm$

1) أ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ، ثمّ فسر النتيجتين بيانيا

ج- بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ فإن : $f'(x)=\frac{g(x)}{(e^{x}-2x)^{2}}$

د- استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

2) بين أن : $f(\alpha)=\frac{2-\alpha}{\alpha-1}$ ، واستنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

3) أنشئ المنحنى (C_f)

4) لتكن الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $F(x)=-x+\ln(e^{x}-2x)$

أ- بيّن أن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

ب- أحسب بالسنتمتر مربع مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات ذات المعادلات

$x=0$ ، $x=2$ ، $y=0$

مديرية التربية لولاية ميلة

الثانوية: ثانوية كتامة عين البيضاء احريش

المستوى: ثالثة علوم تجريبية

السنة الدراسية: 2023/2024

التصحيح النموذجي وسلم التنقيط لامتحان البكالوريا التجريبي في مادة الرياضيات

الموضوع الأول: / سلم التنقيط

حل التمرين الأول: / 4 نقاط

1) نعرف المتتالية (u_n) من أجل كل عدد طبيعي n:

$u_n = (4^{2\alpha} + 4^{\alpha} - 5)^n + 3$ قيم α التي تكون من أجلها:

$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ حيث:

الاقتراح الصحيح هو: ب) $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ — 0,25

التعليل:

لدينا: $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ يكافئ: $4^{2\alpha} + 4^{\alpha} - 5 > 1$ — 0,25

ومنه: $4^{2\alpha} + 4^{\alpha} - 6 > 0$

نضع: $4^{\alpha} = y$ ومنه: $4^{2\alpha} + 4^{\alpha} - 6 = 0$

$y^2 + y - 6 = 0$

معادلة من الدرجة الثانية نؤول حلها إلى حساب المميز Δ: — 0,25

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(1)(-6) = 25 > 0$

للمعادلة حلين:

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-5}{2} = -\dfrac{6}{2} = -3 \text{ مرفوض} \\ y_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+5}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

$4^{\alpha} = 2$ يكافئ: $\alpha \ln 4 = \ln 2$

ومنه: $\alpha = \dfrac{\ln 2}{\ln 4}$ إذن: $\alpha = \dfrac{1}{2}$

إشارة $4^{2\alpha} + 4^{\alpha} - 5 = (4^{\alpha} + 3)(4^{\alpha} - 2)$ من إشارة $4^{\alpha} - 2$ لأن $4^{\alpha} + 3 > 0$ أيا كان $\alpha \in \mathbb{R}$

n	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$4^{\alpha} - 2$		$-$	0	$+$	
$4^{2\alpha} + 4^{\alpha} - 6$		$-$	0	$+$	

ومنه: $4^{2\alpha} + 4^{\alpha} - 5 > 1$ يكافئ: $\alpha \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ — 0,25

2) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$: $u_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{2}{n}(1 + \ln x)\,dx$

قيمة المجموع $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{43}$ حيث:

الاقتراح الصحيح هو: ب) $S = 2024$ — 0,25

$$S' = \int_{e^0}^{e^1} \frac{2}{n}(1+\ln x)\,dx + \int_{e^1}^{e^2} \frac{2}{n}(1+\ln x)\,dx + \dots + \int_{e^{43}}^{e^{44}} \frac{2}{n}(1+\ln x)\,dx$$ — 0,25

$$S = \int_{e^0}^{e^{44}} \frac{2}{n}(1+\ln x)\,dx = 2\left[\ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 + c\right]_{e^0}^{e^{44}}$$ — 0,25

$$= 2\left[44 + \frac{1}{2}(44)^2\right]$$

$S = 2024$

13 z عدد عركبي، معامل z^5 في مشتق العدد $(z+2i)^8$ هو:

الإقتراح الصحيح هو: ب) $5 = -448i$ (0,25)

$(z+2i)^8 = C_8^0 z^8 (2i)^0 + C_8^1 z^7 (2i)^1 + C_8^2 z^6 (2i)^2 + C_8^3 z^5 (2i)^3 + C_8^4 z^4 (2i)^4 + C_8^5 z^3 (2i)^5 + C_8^6 z^2 (2i)^6 + C_8^7 z^1 (2i)^7 + C_8^8 z^0 (2i)^8$ (0,26)

إذن: $C_8^3 z^5 (2i)^3 = -448i\, z^5$ (0,26)

ومنه معامل z^5 هو: $-448i$

14 إذا كان $\frac{\pi}{12}$ عدة للعدد المركب z فإن:

عدة العدد $\frac{1}{\bar{z}^2}$ هي: $\frac{\pi}{6}$ (0,25)

الإقتراح الصحيح هو: أ)

لدينا: $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$ (0,25)

$-\arg(\bar{z}) = -\frac{1}{2}\arg(\bar{z}^2) = -\frac{1}{2}\cdot(-\arg(\frac{1}{\bar{z}^2})) = \frac{1}{2}(\arg(\frac{1}{\bar{z}^2}))$

إذن: عدة $\frac{1}{\bar{z}^2}$ هي: $\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\arg(\frac{1}{\bar{z}^2})$ (0,25)

$\arg(\frac{1}{\bar{z}^2}) = \frac{\pi}{6}$

15 إذا كان: $z = -i\sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{5}}$ فإن الشكل الأسي للعدد z هو:

الإقتراح الصحيح هو: أ) $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ (0,25)

لدينا: $z = -i\sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{5}}$

كتابة z على الشكل الجبري: $z = -i\sqrt{3} + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (0,25)

$= \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

كتابة على الشكل الأسي: $r = \sqrt{x^2+y^2} = 1$

Q26 $z = -i\sqrt{3} + e^{i\frac{\pi}{5}} = e^{-\frac{\pi}{3}i}$ ومنه $\arg(z)$: $\begin{cases}\cos\theta = \frac{1}{2}\\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

5 نقاط

حل التمرين الثاني:

I/ (w_n) متتالية حسابية متزايدة تماما معرفة على $\mathbb{N}$ حدها الأول w_1 وأساسها r.

1- حساب w_1 و r:

لدينا: $\begin{cases}2w_1 + 3w_2 + 2w_3 = 35\\ w_1^2 + 10\,w_2 - w_4^2 = -22\end{cases}$

من الوسط الحسابي نجد: $2(w_1 + w_3) = 4w_2$ (0,25)

بالتعويض نجد: $4w_2 + 3w_2 = 35$ ومنه $7w_2 = 35$

إذن: $w_2 = \frac{35}{7} = 5$ ومنه $w_2 = 5$

- كتابة عبارة الحد العام بدلالة w_2: $w_n = w_p + (n-p)r$

$w_n = 5 + (n-2)r$

إذن: $\begin{cases}w_1 = 5-r\\ w_4 = 5+2r\end{cases}$ (0,5)

بالتعويض في المعادلة (1) نجد: $(5-r)^2 + 50 - (5+2r)^2 = -22$

$25 - 10r + r^2 + 50 - 25 - 4r^2 - 20r + 22 = 0$

$-3r^2 - 30r + 72 = 0$

حساب المميز Δ: $\Delta = b^2 - 4ac = 1764 > 0$

للمعادلة حلين: $r_1 = 2$

$r_2 = -12$ (مرفوض لأن (w_n) متزايدة تماما)

إذن: $r = 2$ و $w_2 = 5$

ب- كتابة عبارة الحد العام:

$w_n = w_2 + (n-2)r$

$= 5 + (n-2)2$ (0,25)

$= 5 + 2n - 4$

إذن: $w_n = 1 + 2n$

صفحة 2

جـ/ تبيان أن: 4049 حد من حدود المتتالية:

$u_n = 4049$ يكافئ $1 + 2n = 4049$

إذن: $2n = 4048$ $n = 2024$ (0,25)

ومنه: 4049 حد من حدود المتتالية حيث:

$u_{2024} = 2049$

- حساب رتبتها:

$X = n - n_0 + 1$

$= 2024 - 0 + 1$

$X = 2025$ (0,25)

إذن رتبة الحد 4049 هي 2025

- حساب S:

$S' = u_0 + u_1 + \dots + u_{2024}$

$S' = \frac{2025}{2}[u_0 + u_{2024}] = \frac{2025}{2}[1 + 4049]$ (0,25)

$S' = 4100625$

II/ $u_0 = 0$ ، $u_{n+1} = 3u_n + 2n + 1$

1- البرهان بالتراجع:

- نضع $p(n)$: $u_n = 3^n - n - 1$

- من أجل $n = 0$:

$u_0 = 3^0 - 0 - 1$

$= 1 - 1 = 0$

ومنه: $u_0 = 0$ إذن $p(0)$ محققة.

- نفرض أن $p(n)$ صحيحة أي أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n = 3^n - n - 1$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_{n+1} = 3^{n+1} - n - 2$.

لدينا: $u_n = 3^n - n - 1$

بالضرب في (3) $3u_n = 3(3^n - n - 1)$ (0,25)

$= 3^{n+1} - 3n - 3$

بإضافة: $3u_n + 2n + 1 = 3^{n+1} - 3n - 3 + 2n + 1 = 2n + 1$

$= 3^{n+1} - n - 2$

ومنه: $u_{n+1} = 3^{n+1} - n - 2$ (0,25) ومنه $p(n+1)$ صحيحة.

إذن: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن $p(n)$ صحيحة.

2/ $v_n = u_n + n + 1$

أ/ تبيان أن (v_n) هندسية:

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 3 = q$ يكافئ: (v_n) هندسية أساسها: $q = 3$

- $v_{n+1} = u_{n+1} + n + 1 + 1 = 3^{n+1} - n - 2 + n + 2 = 3^{n+1}$

- $v_n = u_n + n + 1 = 3^n - n - 1 + n + 1 = 3^n$ (0,25)

إذن:

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} = \frac{3^n \times 3^1}{3^n} = 3^1 = 3$

ومنه: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 3$

- حساب v_0: $v_0 = u_0 + 0 + 1 = 0 + 1 = 1$ (0,25)

ب/ عبارة v_n: $v_n = v_0 \times q^n = (3)^n$ (0,25)

عبارة u_n: لدينا: $v_n = u_n + n + 1$

ومنه: $u_n = v_n - n - 1$ إذن: $u_n = 3^n - n - 1$ (0,25)

- حساب النهاية: لدينا $\lim_{n \to +\infty} 3^n - n - 1 = +\infty - \infty$ شكل

$= \lim_{n \to +\infty} 3^n \left(1 - \frac{n}{3^n} - \frac{1}{3^n}\right) = 0$ (0,25)

- $\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{3^n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{e^{n \ln 3}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\ln 3} \frac{n \ln 3}{e^{n \ln 3}}$

$= \frac{1}{\ln 3} \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

نضع: $x = n \ln 3$

لما: $n \to +\infty$ فإن: $x \to +\infty$

صفحة 3 من 3

طريقة رقم 1 : لإثبات أن (v_n) هندسية

$$v_{n+1} = u_{n+1} + (n+1) + 1 = 3u_n + 2n + 1 + n + 1 + 1$$

$$= 3u_n + 3n + 3 = 3u_n + 3(n+1) = 3(u_n + n + 1)$$

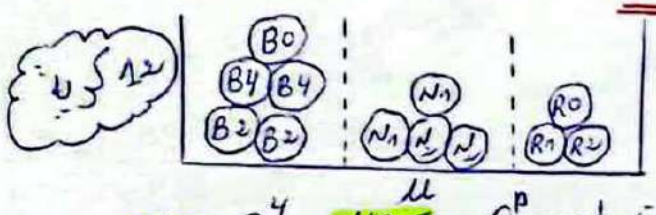
$$= 3v_n$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3v_n}{v_n} = 3$$ ومنه

إذن: (v_n) هندسية أساسها $q = 3$

5 نقاط

حل التمرين الثالث:



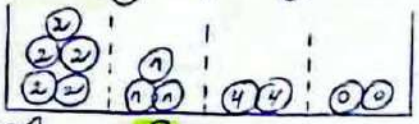
$\Omega = C_{12}^{4} = 495$ عدد سحب 4 كرات في آن واحد. C_n^p

حساب احتمال الحادثة:

A: "الكرات المسحوبة من نفس اللون"

0,25 $\cdot p(A) = \dfrac{C_4^4 + C_5^4}{C_{12}^4} = \dfrac{2}{165}$

B: "الحصول على 4 كرات تحمل أرقام تشكل 2024"



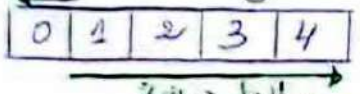
0,25 $\cdot p(B) = \dfrac{C_5^2 \times C_2^1 \times C_2^1}{C_{12}^4} = \dfrac{8}{99}$

C: "الحصول على 4 كريات مجموع أرقامها يساوي 8"

هيا: سحبا 4 كرات تحمل الرقم (2) أو سحبا كريتين تحملان الرقم (1) وكريتين تحملان الرقم (0) أو سحبا كريتين تحملان الرقم (2) وكريتة تحمل الرقم (1) وكريتة تحمل الرقم (0) أو سحبا كريتين تحملان الرقم (1) وكرة تحمل الرقم 4 وكرة تحمل الرقم (2)

0,5 $\cdot p(C) = \dfrac{C_5^4 + (C_2^2 \times C_2^2) + (C_5^2 \times C_2^1 \times C_2^1) + (C_3^2 \times C_2^1 \times C_5^1)}{C_{12}^4} = \dfrac{76}{495}$

D: "الحصول على كرة بيضاء على الأقل"



حادثة المعاكسة سحب 4 كرات ليست بيضاء.

0,5 $\cdot p(D) = 1 - p(\bar{D}) = 1 - \dfrac{C_7^4}{C_{12}^4} = \dfrac{92}{99}$

صفحة 4

حساب كل من:

0,25 1) $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

$S_n = 1 \times \left[\dfrac{(3)^{n+1} - 1}{3 - 1}\right] = \dfrac{1}{2}(3^{n+1} - 1)$

0,5 2) $T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

$u_n = v_n - n - 1$

$u_0 = v_0 - 1$

$T_n = v_0 - 1 + v_1 - 2 + \cdots + v_n - n - 1$

$T_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n - (1 + 2 + \cdots + n + 1)$

$T_n = S_n - \left[\dfrac{n+1}{2}(1 + n + 1)\right]$

$T_n = S_n - \dfrac{n^2 + 3n + 2}{2} = \dfrac{1}{2}(3^{n+1} - 1 - n^2 - 3n - 2)$

$= \dfrac{1}{2}(3^{n+1} - n^2 - 3n - 3)$

ب- تعيين قيمة n حتى يكون: $S_n - T_n = 1830$

لدينا: $T_n = S_n - \dfrac{n^2 + 3n + 2}{2}$

ومنه: $S_n - T_n = \dfrac{n^2 + 3n + 2}{2}$

0,5 بالتالي: $S_n - T_n = 1830$

$\dfrac{n^2 + 3n + 2}{2} = 1830$

$n^2 + 3n - 3658 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4(1)(-3658) = 14641 > 0$

للمعادلة حلين:

$\begin{cases} n_1 = -62 & \text{مرفوض} \\ n_2 = 59 \end{cases}$

1/ بيّن أن: $p(A\cap B)=\frac{2}{495}$

A∩B = "سحب 4 كرات أرقامها تشكل العدد 2024 وتحمل نفس اللون"

$p(A\cap B)=\frac{C_2^2\times C_n^1\times C_2^1}{C_{12}^4}=\frac{2}{495}$ (0,25)

استنتاج $p(\overline{A\cup B})$.

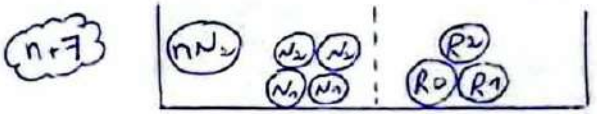
$p(\overline{A\cup B})=1-p(A\cup B)$ (0,5)

لكن $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$

$=\frac{2}{165}+\frac{8}{99}-\frac{2}{495}=\frac{4}{45}$

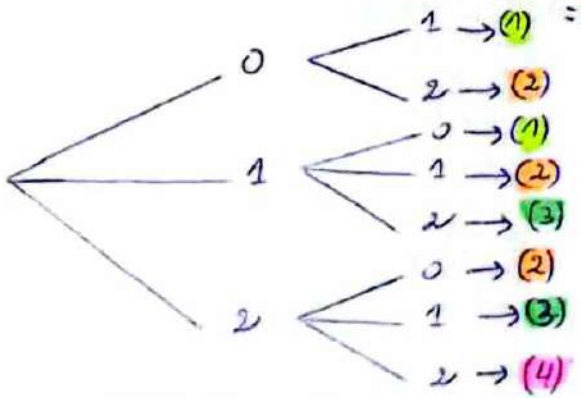
ومنه $p(\overline{A\cup B})=1-p(A\cup B)=1-\frac{4}{45}=\frac{41}{45}$

II



$\Omega=A_{n+7}^2=\frac{(n+7)!}{(n+5)!}=\frac{(n+7)(n+6)(n+5)!}{(n+5)!}=(n+7)(n+6)$

X قيم: $X=\{1,2,3,4\}$ (0,5)



$x=1$: سحب كرية تحمل الرقم (1) وكرية تحمل الرقم (0).

$p(x=1)=\frac{2(A_3^1\times A_n^1)}{A_{n+7}^2}=\frac{6}{(n+7)(n+6)}$ (0,25)

$x=2$: سحب كريتين تحملان الرقم (1) أو سحب كرية تحمل الرقم (0) وكرية تحمل (2).

$p(x=2)=\frac{A_3^2+2(A_n^1\times A_{n+3}^1)}{A_{n+7}^2}$ (0,25)

$A_{n+3}^2=\frac{(n+3)!}{(n+2)!}=\frac{(n+3)(n+2)!}{(n+2)!}=n+3$ لكن

$p(x=2)=\frac{6+2(n+3)}{(n+7)(n+6)}=\frac{6+2n+6}{(n+7)(n+6)}=\frac{2n+12}{(n+7)(n+6)}$ (0,5) ومنه

$x=3$: سحب كرية تحمل الرقم (2) وكرية تحمل الرقم (1).

$p(x=3)=\frac{2(A_3^1\times A_{n+3}^1)}{A_{n+7}^2}=\frac{6(n+3)}{(n+7)(n+6)}$ (0,25)

$x=4$: سحب كريتين تحملان الرقم (2).

$p(x=4)=\frac{A_{n+3}^2}{A_{n+7}^2}=\frac{\frac{(n+3)!}{(n+2)!}}{\frac{(n+7)!}{(n+5)!}}=\frac{(n+3)(n+2)(n+1)!}{(n+7)!}$

$p(x=4)=\frac{(n+3)(n+2)}{(n+7)(n+6)}$ (0,5)

$x_i=x$	1	2	3	4
$p(x_i=x)$	$\frac{6}{(n+7)(n+6)}$	$\frac{2n+12}{(n+6)(n+7)}$	$\frac{6(n+3)}{(n+7)(n+6)}$	$\frac{(n+3)(n+2)}{(n+7)(n+6)}$

(0,25)

ب- حساب $E(x)$:

$E(x)=\sum_{i=1}^{4}x_i\times p_i$

$=\frac{6}{(n+7)(n+6)}+\frac{4n+24}{(n+6)(n+7)}+\frac{18n+54}{(n+7)(n+6)}+\frac{4n^2+20n+24}{(n+7)(n+6)}$ (0,5)

$=\frac{4n^2+42n+108}{(n+7)(n+6)}$

5 نقاط

حل التمرين الرابع :

$g(x) = (4-2x)e^x - 4$ I

1/ حساب النهايات :

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (4-2x)e^x - 4 = -\infty$ (0,25)

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (4-2x)e^x - 4$ لأن

$= \lim_{x\to+\infty} 4e^x - 2xe^x - 4 = -4$ (0,25)

2/ دراسة تغيرات g(x) :

حساب المشتقة : g قابلة للاشتقاق على R حيث :

$g'(x) = -2e^x + e^x(4-2x)$ (0,25)

$= e^x(-2+4-2x) = e^x(-2x+2)$

إشارة المشتقة : إشارة $g'(x)$ من إشارة $-2x+2$

لأن مهما يكن $x\in R$ فإن : $e^x > 0$

$-2x+2$ يلغى عند : $x = 1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$-2x+2$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

(0,25)

- لما : $x\in]-\infty;1]$ فإن : $g'(x) \geq 0$ و g متزايدة تماما.
- لما : $x\in[1;+\infty[$ فإن : $g'(x) \leq 0$ و g متناقصة تماما.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	-4	↗	$g(1)$	↘	$-\infty$

(0,25)

3/ نبين أن $g(x)=0$ تقبل حلين حل 0 و آخر α :

(0,25) $g(0) = (4-0)e^0 - 4 = 4-4 = 0$

- من جدول التغيرات نلاحظ أن الدالة g مستمرة ورتيبة على $[1;+\infty[$ فهي مستمرة ورتيبة على $]1,59;1,6[$ ولدينا :

(0,25) $g(1,59) = 0,02 > 0$

(0,25) $g(1,6) = -0,03 < 0$

ومنه : $g(1,59)\times g(1,6) < 0$

إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $g(x)=0$ تقبل حل α على المجال $]1,59;1,6[$ $\Leftarrow$ (C_g) يقطع حامل محور التراتيب في نقطة فاصلتها α

ومنه : $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما 0 والآخر α.

4/ إشارة g(x) :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

(0,25)

II $f(x) = \dfrac{2x-2}{e^x-2x}$, R

1/ حساب النهايات :

(0,25) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x-2}{e^x-2x}$ لأن $\lim_{x\to+\infty} e^x - 2x = +\infty$

(0,25) $= \lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x(1-\frac{2}{2x})}{e^x(1-\frac{2x}{e^x})} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{e^x} = 0$

(0,25) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{2x-2}{e^x-2x} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{x(2-\frac{2}{x})}{-x(-\frac{e^x}{x}+2)} = \lim_{x\to-\infty} -\dfrac{x}{x}$

$= -1$

التدقيق :

(0,25) بجوار $-\infty$: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ فإن (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي $y=0$

(0,25) بجوار $+\infty$: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ فإن (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي $y=-1$

صفحة 6

جـ/ تبيّن أنّ: $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 2x)^2}$

f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث،

$$f'(x) = \frac{2(e^x - 2x) - (e^x - 2)(2x - 2)}{(e^x - 2x)^2}$$

$$= \frac{2e^x - 4x - 2xe^x + 2e^x + 4x - 4}{(e^x - 2x)^2}$$

$$= \frac{e^x(4 - 2x) - 4}{(e^x - 2x)^2} = \frac{g(x)}{(e^x - 2x)^2}$$ (0,5)

د/ إتجاه التغير:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ لأنّ مهما يكن $x \in \mathbb{R}$ فإنّ: $(e^x - 2x) > 0$ وعليه،

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

(0,25)

- ملاحظة: $x \in]-\infty, 0[\cup]\alpha, +\infty[$ فإنّ $f'(x) < 0$ و f متناقصة تماما.
- ملاحظة: $x \in]0, \alpha[$ فإنّ $f'(x) > 0$ و f متزايدة تماما.
- ملاحظة: $x = 0$ و $x = \alpha$ فإنّ $f'(x) = 0$ نقطة حرجة.

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	↘	$f(0)$	↗	$f(\alpha)$	↘	0

(0,25)

2/ تبيّن أنّ: $f(\alpha) = \frac{2-\alpha}{\alpha-1}$

لكن: من أجل α حل المعادلة $g(x) = 0$ يكافئ: $(4 - 2\alpha)e^\alpha - 4 = 0$ وعليه:

$$\begin{cases} g(\alpha) = (4 - 2\alpha)e^\alpha - 4 \\ f(\alpha) = \frac{2\alpha - 2}{e^\alpha - 2\alpha} \end{cases}$$

$$e^\alpha = \frac{4}{4 - 2\alpha}$$

بالتعويض في $f(\alpha)$:

$$f(\alpha) = \frac{2\alpha - 2}{\frac{4}{4-2\alpha} - 2\alpha} = \frac{2\alpha - 2}{\frac{4 - 8\alpha + 4\alpha^2}{4 - 2\alpha}}$$ (0,5)

$$= \frac{(2\alpha - 2)}{\frac{(2\alpha - 2)^2}{4 - 2\alpha}} = \frac{4 - 2\alpha}{2\alpha - 2} = \frac{2(2 - \alpha)}{2(\alpha - 1)} = \frac{2 - \alpha}{\alpha - 1}$$

حصر $f(\alpha)$:

- لدينا: $1,59 < \alpha < 1,6$
- بإضافة (-1): $0,59 < \alpha - 1 < 0,6$
- بالمقلوب: $1,66 < \frac{1}{\alpha - 1} < 1,69 \ldots (1)$ (0,25)
- لدينا: $1,59 < \alpha < 1,6$
- بالضرب في (-1): $-1,6 < -\alpha < -1,59$
- بإضافة (2): $0,4 < 2 - \alpha < 0,41 \ldots (2)$ (0,25)
- بضرب (1) و (2) نجد:

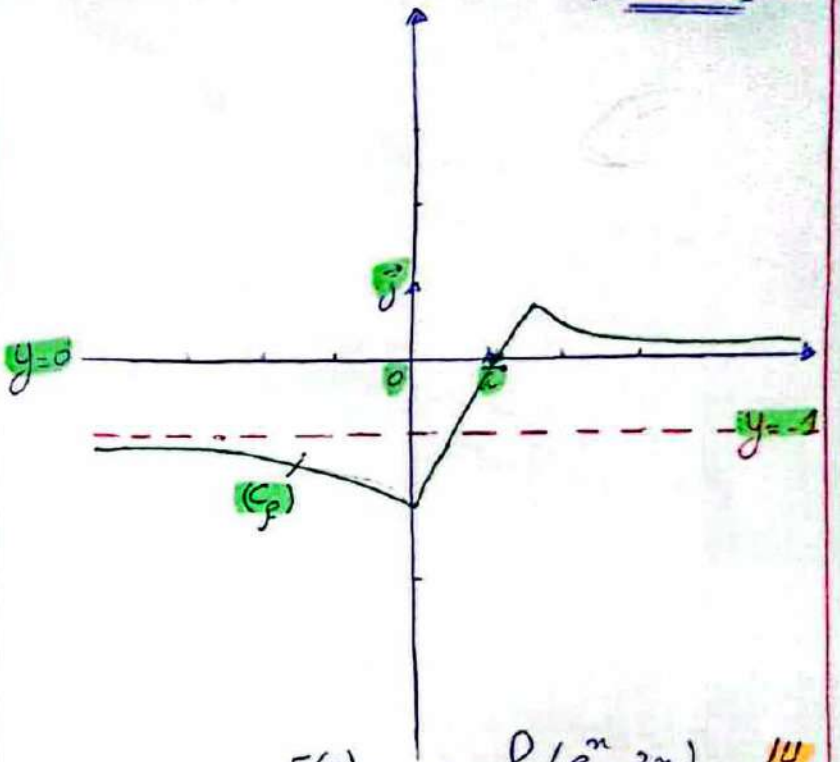
$$0,664 < \frac{2-\alpha}{\alpha - 1} < 0,692$$

إذن:

$$0,664 < f(\alpha) < 0,692$$

حلول أخرى

13/ الإنشاء :



0,75

14/ $F(x) = -x + \ln(e^x - 2x)$

1- نبين أن $F(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$:

$F(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$ يكافئ: $F'(x) = f(x)$

$F(x)$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث:

$$F'(x) = -1 + \frac{e^x - 2}{e^x - 2x} = \frac{-e^x + 2x + e^x - 2}{e^x - 2x}$$

$$= \frac{2x - 2}{e^x - 2x} = f(x)$$

0,25

إذن: $F'(x) = f(x)$

ومنه $F(x) = -x + \ln(e^x - 2x)$ هي دالة أصلية للدالة $f(x)$.

ب/ حساب المساحة :

$$S' = \int_0^2 -f(x)\,dx = -\int_0^2 f(x)\,dx$$

0,5

$$= -\left[-x + \ln(e^x - 2x) + c\right]_0^2$$

$$= -\left(F(2) - F(0)\right) = -4\left(-2 + \ln(e^2 - 4)\right) cm^2$$

$$S' = 8 - 4\ln(e^2 - 4)\ cm^2$$

- انتهى الموضوع الأول -

صفحة 4 من 8