



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول (4 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_{n+1} = 1 - \frac{4}{u_n + 3}$

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $-1 < u_n \leq 0$

(2) ادرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها مقاربة.

(3) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \frac{1}{u_n + 1}$

(أ) بيّن أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدّها الأول.

(ب) اكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n و أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = e^{u_0 v_0} \times e^{u_1 v_1} \times e^{u_2 v_2} \times \dots \times e^{u_n v_n}$

- بيّن أن $S_n = e^{\frac{-n^2 - n}{4}}$ ، هل (S_n) متتالية مقاربة؟

التمرين الثاني (4 نقاط)

يحتوي صندوق U على 3 كريات حمراء و كرتين سوداوين ، و يحتوي صندوق V على 4 كريات حمراء و 3 كريات سوداء (كل الكريات متماثلة و لانيّز بينها باللمس).

نرمي زهرة نرد غير مزيفة مرقمة من 1 إلى 6 مرة واحدة ، إذا حصلنا على رقم مضاعف لـ 3 نسحب كرتين في آن واحد من الصندوق U ، وفي باقي الحالات نسحب كرتين على التوالي و بدون إرجاع من الصندوق V .

نعتبر الحادثتين: A : الحصول على رقم مضاعف لـ 3 و B : الحصول على كرتين من نفس اللون

(1) بين أن إحتمال سحب كرتين من نفس اللون من الصندوق V هو $\frac{3}{7}$

(2) أ) اكمل شجرة الإحتمالات المقابلة ، ثم أحسب $P(B)$.

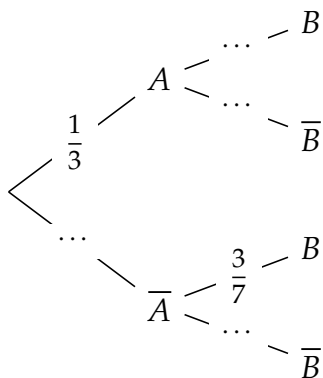
(ب) علماً أن الكرتين المسحوبتين من نفس اللون ما إحتمال أن تكونا من الصندوق V ؟

(3) نعتبر اللعبة التالية: للمشاركة يدفع اللاعب αDA (حيث α عدد حقيقي موجب تماماً)

فإذا سحب اللاعب كرتين من نفس اللون يربح $100 DA$ و إذا سحب كرتين مختلفتين في اللون يخسر ما دفعه.

و ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل قيمة ربح أو خسارة اللاعب.

- عيّن قيم المتغير العشوائي X ، ثم بيّن أن أمله الرياضي $E(X) = \frac{880}{21} - \alpha$





التمرين الثالث (4 نقاط)

نعتبر في المستوي المركب $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقطتين A و B لاحقتاهما على الترتيب: $z_A = 1 + i$ و $z_B = \sqrt{3} + i$

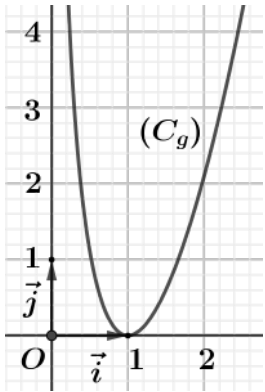
(1) اكتب z_A و z_B على الشكل الأسّي. ثم استنتج الشكل الأسّي للعدد $\frac{z_A}{z_B}$.

(2) اكتب $\frac{z_A}{z_B}$ على الشكل الجبري ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

(3) اكتب على الشكل الجبري العدد $\left(\frac{\sqrt{2}z_A}{z_B}\right)^{2024}$ ، ثم عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ عدداً حقيقياً موجباً.

(4) عين مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث $z = \sqrt{3} + i + e^{i\theta}$ و θ تسمح $\mathbb{R}$.

التمرين الرابع (8 نقاط)



(I) g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 - 1 + (\ln x)^2 - 2 \ln x$
تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$
كما هو موضح في الشكل المقابل.

- احسب $g(1)$ ، ثم بقراءة بيانية حدد حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(II) f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = x + \frac{1 - (\ln x)^2}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\text{cm}$.

(1) بيّن أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و فسّر النتيجة بيانياً.

(2) (أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

(ج) استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثيها.

(د) اكتب معادلة المماس (T) عند نقطة الإنعطاف.

(3) (أ) بيّن أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

(ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

(4) بيّن أنه توجد نقطتين من (C_f) يكون عندهما المماس يوازي المستقيم (Δ) يطلب تعيين فاصلتيهما (معدلتا المماسين غير مطلوبتين).

(5) بيّن أن (C_f) يقطع حامل محاور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $0,34 < \alpha < 0,35$

(6) ارسم كلاً من (Δ) ، (T) و المنحنى (C_f) .

(7) (أ) بيّن أن الدالة $x \mapsto \ln x - \frac{1}{3}(\ln x)^3$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{1 - (\ln x)^2}{x}$ على المجال $]0; +\infty[$.

(ب) احسب بالـ cm^2 مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمتان (Δ) ، $x = e^{-1}$ و $x = e$.

انتهى الموضوع الأول



الموضوع الثاني

التمرين الأول (4 نقاط)

يحتوي صندوق على 10 كريات متماثلة و لا نَمِيز بينها باللمس منها ثلاث كريات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 2 و ثلاث كريات حمراء تحمل الأرقام 0 ، 1 ، 2 و أربع كريات سوداء تحمل الأرقام 0 ، 1 ، 1 ، 2 .
نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كريات من الصندوق و نعتبر الحوادث التالية:

A: سحب ثلاث كريات من نفس اللون.

B: سحب ثلاث كريات مختلفة الأرقام مثلى مثلى.

C: سحب كرية حمراء على الأكثر.

(1) احسب $P(A)$ ، $P(B)$ و $P(C)$.

(2) بين أن $P(A \cap B) = \frac{1}{40}$ ثم استنتج $P(A \cup B)$ و $P_A(B)$. هل A و B حادثتان مستقلتان؟

(3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يُرفق بكل عملية سحب عدد الكريات الحمراء المتبقية في الصندوق.

(أ) برّر أن قيم المتغير العشوائي X هي $\{0; 1; 2; 3\}$.

(ب) عرّف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X و أحسب أمله الرياضي.

التمرين الثاني (4 نقاط)

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z التالية: $(z - 1)(z^2 + 4z + 7) = 0$

(II) نعتبر في المستوى المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب:

$$L = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{و نضع:} \quad z_C = \overline{z_B}, \quad z_B = -2 + i\sqrt{3}, \quad z_A = 1$$

(1) اكتب العدد L على الشكل المثلثي.

(2) (أ) اكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

(ب) استنتج أن C هي صورة B بدوران R يطلب تعيين عناصره المميزة.

(3) عيّن z_D لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي ABDC متوازي أضلاع ، ثم حدّد بدقة طبيعته.

(4) لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوى ذات اللاحقة z حيث: $|iz - i| = |\bar{z} + 2 + i\sqrt{3}|$

- عيّن مجموعة النقط (Γ) ، ثم استنتج صورتها بالدوران R.

التمرين الثالث (4 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ $u_0 = e^3$ و من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$

(1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > e^2$

(2) ادرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) . هل (u_n) متقاربة ؟

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \ln(u_n) - 2$

(أ) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدّها الأول.

(ب) عبّر عن v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n و أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(4) احسب P_n بدلالة n حيث : $P_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$

التمرين الرابع (8 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ بـ : $f(x) = 2x + \frac{1}{e^x - 1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (حيث $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$)

(1) (أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(ب) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ثم فسّر النتيجة بيانياً.

(2) (أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x)$ ، ثم فسّر النتيجتين بيانياً.

(ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لكل من المستقيمين $(\Delta_1) : y = 2x$ و $(\Delta_2) : y = 2x - 1$.

(3) (أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R} - \{0\}$ ، $f'(x) = \frac{(2e^x - 1)(e^x - 2)}{(e^x - 1)^2}$

(ب) استنتج أن الدالة f متزايدة تماماً على كل من المجالين $]-\infty; -\ln 2]$ و $[\ln 2; +\infty[$ و متناقصة تماماً على كل من المجالين $]-\ln 2; 0[$ و $]0; \ln 2]$ ثم شكّل جدول تغيراتها.

(4) من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ أحسب $f(-x) + f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة بيانياً.

(5) ارسم كلاً من (Δ_1) ، (Δ_2) و المنحنى (C_f) . (يعطى $f(\ln 2) = \ln 4 + 1$ و $f(-\ln 2) = -\ln 4 - 2$)

(6) ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) = 2x + m$.

(7) (أ) بيّن أن الدالة $x \mapsto -x + \ln(e^x - 1)$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{e^x - 1}$ على المجال $]0; +\infty[$.

(ب) احسب $\int_{\ln 2}^1 \frac{dx}{e^x - 1}$ و فسّر النتيجة بيانياً.

(8) h دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $h(x) = |f(x)|$

- اشرح كيفية رسم منحنى الدالة h إنطلاقاً من (C_f) ثم أرسمه في نفس المعلم السابق.