

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: 05 نقاط

نعتبر المتالتين العدديتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ بـ:
$$v_n = \ln \left(\frac{u_n - 1}{u_n - e} \right) \text{ و } \begin{cases} u_0 = e + 1 \\ u_{n+1} = e + 1 - \frac{e}{u_n} \end{cases}$$

1. أ) برهن بالتراجع أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $u_n > e$.

ب) بين أن (u_n) متناقصة تماما و بررتقارها.

2. أ) بين أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $0 < u_{n+1} - e < e^{-1}(u_n - e)$.

ب) استنتج أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $0 < u_n - e < e^{-n}$ ، ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

3. أ) بين أن (v_n) متتالية حسابية أساسها 1 يطلب حساب حدها الأول.

ب) اكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

4. نعتبر المجموع S_n بحيث:
$$S_n = \frac{e-1}{u_0-1} + \frac{e-1}{u_1-1} + \dots + \frac{e-1}{u_n-1}$$

✓ تحقق أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $\frac{e-1}{u_n-1} = 1 - \frac{1}{e^{v_n}}$ ، ثم استنتج أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $S_n = n + 1 + \frac{e^{-n-1} - 1}{e - 1}$.

التمرين الثاني: 04 نقاط

يحتوي كيس على أربع كريات حمراء مرقمة بـ: $0, a, a, -a$ وثلاث كريات بيضاء مرقمة بـ: $0, 0, -a$ وكريّة

خضراء مرقمة بـ: 0 بحيث $a \in \mathbb{Z}^*$ والكريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس.

نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات ونعتبر الحادثتين: A : الحصول على ثلاث كريات مختلفة اللون مثني مثني.

B : الحصول على ثلاث كريات مجموع أرقامها معدوم.

1. أ) احسب كلا من $P(A)$ و $P(B)$.

ب) بين أن $P(A \cap B) = \frac{1}{14}$ ، ثم استنتج $P(A \cup B)$.

2. نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب مجموع أرقام الكريات المسحوبة.

أ) برر أن مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي: $\{-2a; -a; 0; a; 2a\}$ ، ثم عرف قانون احتماله.

ب) احسب كلا من الأمل الرياضي $E(X)$ و $V(X)$.

ج) عين قيم العدد الصحيح a التي من أجلها يكون $V(14X) = A_7^3$.

التمرين الثالث: 04 نقاط

نعتبر المعادلة $(E) \dots\dots 11x - 17y = 1$ بحيث x و y عددان صحيحان.

1. أ) عين الحل الخاص $(x_0; y_0)$ للمعادلة (E) والذي يحقق $y_0 - x_0 = 1$.
ب) بين أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي: $\{(17k + 14; 11k + 9); k \in \mathbb{Z}\}$.
2. أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على العدد 11.
ب) بين أن $\beta \equiv 3[11]$ بحيث $\beta = 2018^{2x+y}$.
ج) عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $0[11] \equiv 5^n \times (4\beta + 4)^{2024} - 3$.
3. العدد الطبيعي N يكتب 5λ في النظام ذي الأساس a و 6γ في النظام ذي الأساس b بحيث $\lambda = 11$ و $\gamma = 17$.
✓ عين العددين a و b علما أن $|a - b| \leq 11$ ، ثم اكتب N في النظام العشري.

التمرين الرابع: 07 نقاط

- الجزء الأول: نعتبر الدالة g المعرفة والمتزايدة تماما على المجال $]-1; +\infty[$ بحيث: $g(x) = \ln(x+1) + \frac{x-1}{x+1}$.
- ✓ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $0,44 < \alpha < 0,46$ ، ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.
- الجزء الثاني: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x \ln(x^2 + 1) - x$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$ بحيث $\|\vec{i}\| = 2cm$.
1. بين أن الدالة f فردية وأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ، ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 2. أ) بين أنه من أجل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = g(x^2)$.
ب) بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty; -\sqrt{\alpha}]$ و $[\sqrt{\alpha}; +\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $[-\sqrt{\alpha}; \sqrt{\alpha}]$.
ج) شكل جدول تغيرات الدالة f .
 3. اكتب معادلة للمماس (T) لـ (C_f) في مبدأ المعلم. ثم ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (T) وفسر النتيجة هندسيا.
 4. أ) عين احداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.
ب) انشئ (T) ثم ارسم (C_f) على المجال $[-\sqrt{e-1}; \sqrt{e-1}]$ ، يعطى $f(\sqrt{\alpha}) \approx -0,42$.
ج) ارسم (C_{-f}) التمثيل البياني للدالة $-f$ ، موضحا طريقة رسمه انطلاقا من (C_f) .
 5. أ) بين أن الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $F(x) = \frac{1}{2}((x^2 + 1)\ln(x^2 + 1) - 2x^2)$ دالة أصلية لـ f على $\mathbb{R}$.
ب) لتكن $A(\alpha)$ مساحة الحيز المحدد بـ: (C_f) والمستقيمتين التي معادلاتها: $y = 0$ ، $x = \sqrt{\alpha}$ و $x = -\sqrt{\alpha}$.
✓ بين أن $A(\alpha) = 4(3\alpha - 1)cm^2$.

انتهى الموضوع الأول

نعتبر المتتاليتين العدديتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + \ln(n) \end{cases}$ و $v_n = e^{u_n}$.

1. أ) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .
ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n = \ln[(n-1)!]$.
2. استنتج عبارة الحد العام v_n بدلالة n ، ثم تحقق أنه من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{v_{n+1}}{v_n} = n$.
3. بين أنه من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $\ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) + \ln\left(\frac{v_3}{v_2}\right) + \dots + \ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right) = u_n$.
4. نعتبر الجداء P_n بحيث: $P_n = 2025^{\frac{v_2}{v_1}} \times 2025^{\frac{v_3}{v_2}} \times \dots \times 2025^{\frac{v_{n+1}}{v_n}}$.
أ) بين أنه من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n = 45^{n(n+1)}$.
ب) عين قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $P_n = 2025^{2016}$.

التمرين الثاني: 05 نقاط

الجزء الأول: نعتبر الأعداد الطبيعية a, b, A, B و d بحيث $a = 4n + 3$, $b = 3n + 1$, $A = 8n^2 + 10n + 3$, $B = 6n^2 + 5n + 1$ و $d = \text{PGCD}(a; b)$ مع $n \in \mathbb{N}$.

1. أ) بين أن $d = 1$ أو $d = 5$.
ب) بين أنه إذا كان $d = 5$ فإن $n \equiv 3[5]$.
2. بين أن A و B يقبلان القسمة على $2n + 1$ ، ثم عين تبعاً لقيم n وبدلالة n : $\text{PPCM}(A; B)$.

الجزء الثاني: نعتبر العدد الطبيعي λ بحيث $\lambda = (1962^a + 2024^a)^{2025}$.

1. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على العدد 5.
2. بين أن $\lambda \equiv 2[5]$ ، ثم استنتج $\text{PGCD}(4\lambda + 3; 3\lambda + 1)$.
3. عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $A \equiv B[5]$.

التمرين الثالث: 04 نقاط

نعتبر في المستوى المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط $A(z_A = -2 + 2i)$ و $B(z_B = -2z_A)$ و $C(z_C = 4 + 8i)$.

1. أ) بين أن $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

ب) استنتج طبيعة التحويل النقطي الذي يحول C إلى B محددا عناصره المميزة.

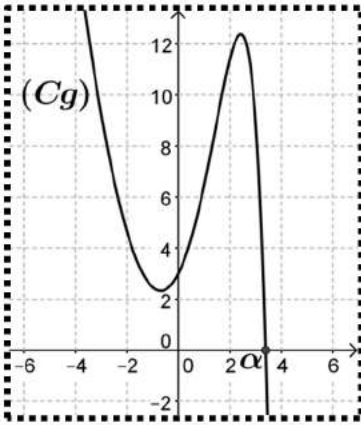
2. عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $\left(\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}\right)^n$ حقيقي موجب تماما.

3. بين أن مجموعة النقط $M(z)$ التي تحقق $(z - 4 - 2i)(\bar{z} - 4 + 2i) = 36$ هي الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

4. نعتبر التحويل النقطي h الذي يحول النقطة $M(z)$ إلى النقطة $M'(z')$ بحيث: $z' = -z + 8 + 4i$.

أ) بين أن h تحاكي يطلب تعيين عناصره المميزة.

ب) عين لاحقة النقطة D صورة A بالتحاكي h ، ثم حدد بدقة طبيعة الرباعي $ABDC$.



التمرين الرابع: 07 نقاط

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$.

الجزء الأول: في الشكل المقابل (C_g) هو التمثيل البياني للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$g(x) = x^2 - (x-3)e^x$ ، و العدد الحقيقي α هو فاصلة نقطة تقاطع (C_g) و حامل محور الفواصل بحيث: $3,38 < \alpha < 3,4$.

✓ بقراءة بيانية حدد حسب قيم x إشارة $g(x)$.

الجزء الثاني: الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + e^x}$ و (C_f) تمثيلها البياني بحيث $\|\vec{i}\| = 2cm$.

1. بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ وأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

2. أ) بين أنه من أجل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{x^2 g(x)}{(x^2 + e^x)^2}$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

ب) بين أن $f(\alpha) = \alpha - 1 - \frac{2}{\alpha - 2}$ ، ثم اعط حصر لـ $f(\alpha)$.

3. أ) تحقق أنه من أجل $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = x - \frac{xe^x}{x^2 + e^x}$.

ب) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$ ، ثم ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) .

4. أ) بين أن (C_f) يقبل مماسين يشعلان مبدأ المعلم أحدهما حامل محور الفواصل والآخر (T) معادلة له هي: $y = \frac{4}{4+e^2}x$.

ب) ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) و حامل محور الفواصل، ثم فسر النتيجة هندسيا.

5. أ) أنشئ كلامن (Δ) و (T) ، ثم ارسم (C_f) . نأخذ $f(-0,59) \approx -0,23$ ، $f(\alpha) \approx 0,95$.

ب) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $f(x) = mx$ أربع حلول متمايضة.

انتهى الموضوع الثاني