

على المترشح ان يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأولالتمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي كيس على خمس كريات حمراء مرقمة 1، 2، 3، 4، 5 وأربع كريات سوداء مرقمة 6، 7، 8، 9 (الكرات متشابهة لا نفرق بينها عند اللمس). نسحب عشوائيا ثلاث كريات على التوالي مع إعادة الكرة إلى الكيس في كل مرة. نعتبر الحادثين التاليين:

A " الحصول على ثلاثة أرقام زوجية " و B " الحصول على ثلاث كريات مختلفة الألوان ".

$$(1) \text{ احسب } P(A) \text{ ثم بين أن: } P(B) = \frac{20}{27}.$$

(2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب لثلاث كريات عدد الأرقام الزوجية المسحوبة.

أ - عين مجموعة قيم المتغير العشوائي $X(\Omega)$ مع التوضيح.

ب - عرّف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X .

$$(3) \text{ احسب } P(\log|X| \leq 0,25).$$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بعدها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3u_n + 2n + 7$.

(1) أحسب u_1 ، u_2 و u_3 ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq 0$.

ب- حدد اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln(u_n + n + 4)$.

أ- أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\ln 3$.

ب- أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

ت- هل المتتالية (u_n) متقاربة؟ برر اجابتك.

أحسب S_n و T_n بدلالة n حيث $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

- (1) أ - ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 13.
 ب - بين أن العدد $2025^{1446} + 10 \times 1962^{1954} + 5 \times 2024^{1445}$ مضاعف للعدد 13.
 ج - ماهو باقي قسمة العدد $2024^{2026^{2027}}$ على 13؟
 (2) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(E) : 5x - 2y = 13$.
 تحقق أن الثنائية $(1; 3)$ حل للمعادلة (E) . ثم استنتج مجموعة حلولها.
 عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق:

$$\begin{cases} n + 3^{2n} + 2 \equiv 2025[4] \\ n \equiv 1445[3] \end{cases}$$

التمرين الرابع: (08 نقاط)

- I. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x) = x - (x^2 + 1)e^{-x+1}$$

 نسمي (C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
 1- أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
 ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = 1 + (x-1)^2 e^{-x+1}$
 ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f . ثم شكل جدول تغيراتها .
 2- بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$ ثم أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .
 3- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث ، $1.8 < \alpha < 1.9$.
 4- أكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.
 5- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f''(x) = -(x-1)(x-3)e^{-x+1}$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما .
 6- أحسب $f(0), f(3)$ ثم أرسم (Δ) ، (T) و (C_f) .
 7- ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية :

$$(E) : f(x) = x + m$$

 II. نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x+1} dx$$

 1- أ) بين أن الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $G(x) = -(x+1)e^{-x+1}$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^{-x+1}$
 ب) أحسب I_1 .
 2- أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن : $I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$ لكل عدد طبيعي غير معدوم n .
 ب) أحسب I_2 .
 3- أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيم (Δ) والمستقيمين الذين معادلتيهما :
 $x = 0$ و $x = 1$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثانيالتمرين الأول: (04 نقاط)

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات الآتية مع التبرير .

(1) صندوق U_1 يحتوي على 6 كريات حمراء و 4 سوداء و صندوق U_2 يحتوي على 3 كريات حمراء و 1 زرقاء جميع الكرات متماثلة. نسحب كرية واحد من صندوق U_1 وكرية واحدة من الصندوق U_2 . وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات السوداء المسحوبة فإن أمله الرياضي هو:

- (أ) $\frac{3}{5}$ (ب) $\frac{2}{5}$ (ج) 1 .

نضيف n كرية سوداء الى الصندوق U_1 و n كرية حمراء الى الصندوق U_2 . و نسحب كرية من الصندوق U_1 وكرية من الصندوق U_2 . فإن قيمة n بحيث يكون احتمال الحصول على كرتين من لونين مختلفين $\frac{7}{12}$ هي :

- (أ) 1 (ب) 2 (ج) 3

(2) حلول المعادلة $(z-2)(z^2+2z+4)=0$ ذات المجهول z في $\mathbb{C}$ هي :

- (أ) $S = \{2, -1+i\sqrt{3}, -1-i\sqrt{3}\}$ (ب) $S = \{2, 1+i\sqrt{3}, 1-i\sqrt{3}\}$ (ج) $S = \{2, 1+i\sqrt{3}, -1-i\sqrt{3}\}$

نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$ النقط C, B, A لواحقتها على الترتيب $z_A = -1+i\sqrt{3}$, $z_B = -1-i\sqrt{3}$ و $z_C = 2$. فإن $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ تساوي :

- (أ) $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ (ب) $e^{i\frac{-\pi}{3}}$ (ج) $e^{i\frac{\pi}{3}}$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

(1) الدالة العددية f معرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{6x+5}{x+2}$,

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد

المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$, (D) المستقيم ذو المعادلة $y = x$.

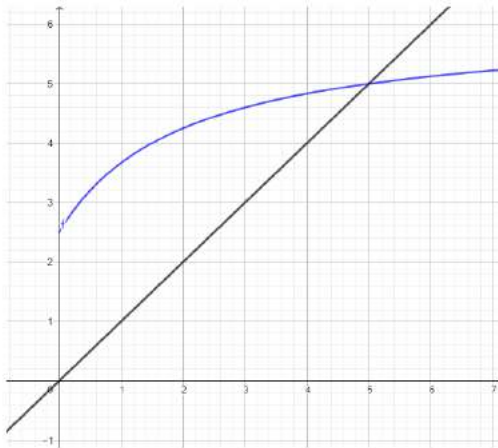
المتتالية العددية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$.

(أ) أعد رسم الشكل على ورقة الاجابة ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود U_0 , U_1 و U_2 (دون حسابها مبررا خطوط التمثيل).

(ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) و تقاربها .

(2) أ / برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq U_n \leq 5$.

ب / ادرس اتجاه تغير (U_n) ثم استنتج أنها متقاربة .



(3) المتتالية العددية (V_n) معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $V_n = \frac{U_n - 5}{U_n + 1}$.

أ / أثبت أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب / اكتب كلا من U_n و V_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

(4) احسب بدلالة n المجموع : $S_n = \frac{1}{U_0 + 1} + \frac{1}{U_1 + 1} + \dots + \frac{1}{U_n + 1}$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

(1) نعتبر المعادلة $(E) : 9x + 4y = 22$ ، ذات المجهولين الصحيحين x و y .

بين أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $x \equiv 2[4]$ ثم استنتج حلول المعادلة (E) .

(2) N عدد طبيعي يكتب $133\alpha\beta3$ في نظام التعداد ذو الأساس 4، ويكتب $56\alpha0$ في نظام التعداد ذو الأساس 7

حيث α و β عدنان طبيعيان.

عين α و β ثم أكتب N في النظام العشري

(3) نضع $a = 88n + 22$ و $b = 198n + 44$ حيث n عدد طبيعي .

أ) بين أن الثنائية $(a; -b)$ حل للمعادلة (E) .

ب) باستعمال مبرهنة بيزو بين أن العددين $4n + 1$ و $9n + 2$ أوليان فيما بينهما . ثم جد $\text{PGCD}(a; b)$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

أ. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كمايلي : $g(x) = x^2 - 2 + \ln x$

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$.

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.

(3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1.31 < \alpha < 1.32$ ثم استنتج إشارة $g(x)$.

II. لتكن الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = x - e + \frac{1 - \ln x}{x}$ ، (C_f) المنحني الممثل للدالة f

في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$)

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ وفسر النتيجة الأولى هندسيا .

(2) أثبت أن المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (D) يطلب تعيين معادلته .

(3) أدرس الوضعية النسبية للمنحني (C_f) والمستقيم (D) .

(4) بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ فإن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

(5) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(6) أثبت أن : $f(\alpha) = 2\alpha - e - \frac{1}{\alpha}$, ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

(7) أ) بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (D) في نقطة يطلب تعيين احداثياتها.
ب) أكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) .

(8) أنشئ (T) والمنحني (C_f) .

(9) نسمي $A(\alpha)$ مساحة الحيز من المستوي المحددة بالمنحني (C_f) والمستقيم (D) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = \alpha$

و $x = e$

- بين أن : $A(\alpha) = 2(\alpha^2 - 1)^2 \text{ cm}^2$

انتهى الموضوع الثاني