ثانوية: الشهيد البشير قصاب - العـمة -
السنة الدراسية : 2023- 2024

الشعبة : رياضيات و تقني رياضي
المدة : 4 ساعات ونصف

اختبار في مادة الرياضيات
دورة ماي 2024

على المترشح أن يختار احد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول : (نقاط 4,5)

نعتبر (U_n) متتالية عددية معرفة ب : $u_0 = 1$ و $u_1 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :
$u_{n+1} = 2\alpha u_n + 3\alpha^2 u_{n-1}$, حيث α عدد حقيقي من المجموعة $]-1;1[- \{0\}$
- نضع ومن أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_{n+1} - 3\alpha u_n$

1) أثبت أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول بدلالة α .
2) هل المتتالية (V_n) متقاربة ؟
3) أحسب بدلالة n و α المجموع S_n , حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$
4) عين قيمة العدد الحقيقي α علما أن $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{3}{4}$.
- استنتج عندئذ U_n بدلالة n ثم بين أن (U_n) متقاربة.
5) في كل مايلي نضع $\alpha = -\frac{1}{3}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $p_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$
أ - بين أن : $p_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n^2-n-2}{2}}$
ب - عين أصغر عدد طبيعي n حتى يكون $p_n \leq 3^{-44}$.

التمرين الثاني (4, 5 نقاط)

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث : $7x - 3y = 6$

1) أ - أ ثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x\ ,y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فان : $y \equiv 5[7]$
ب- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).
2) حل في $\mathbb{Z}^2$ الجملة : $\begin{cases} 7x - 3y = 6 \\ PGCD(x\ ,y\ ) = 3 \end{cases}$.

أ- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 11 .
ب – بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n. $5^{2n} - 3^n \equiv 0[11]$.
ج- حل في N^2 الجملة : $\begin{cases} 7x - 3y = 6 \\ 2(2018)^{2x} + (2016)^{5y} \equiv 0[11] \end{cases}$

التمرين الثالث : (5 نقاط)

المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O\ ;\vec{u};\vec{v})$

1) أوجد العددين z_1 و z_2 الجذران التربيعيان للعدد المركب $L = 2 - 2i\sqrt{3}$ ثم أكتبهما على الشكل الأسي .

2) نعتبر النقط C, B, A ذات اللواحق $z_A = 2i$, $z_B = \sqrt{3} + i$, $z_C = \sqrt{3} - i$.

أ- بين أن , $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$ و عين قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{AC})$

ب- استنتج طبيعة الرباعي $OABC$.

3) أ- أكتب العبارة المركبة للتشابه S الذي يحول A الى O و يحول C الى B محددا عناصره المميزة .

ب - تحقق أن SoS تشابه مباشر نسبته $\frac{1}{3}$ و أحد أقياسه زاويته π .

ج- نضع T التحويل النقطي المعرف ب : $T = \underbrace{SoSo \dots\dots oS}_{n \text{ مرة}}$.

4- عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون T تحاكيا نسبته سالبة.

التمرين الرابع : (6نقاط)

لتكن f الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ ب : $f(0) = 1$ و من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - 2lnx)$$

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$ (الوحدة $2\ cm$)

1) أ- أحسب $\lim_{x \to 0} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا .

ب- أحسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

2) أ – أدرس قابلية الاشتقاقية ل f عند 0 .

ب- أثبت أن f قابلية للاشتقاق على المجال $[0; +\infty[$ ثم أحسب $f'(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

ج- استنتج اتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيراتها

3) أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0; +\infty[$, تحقق أن : $4,6 < \alpha < 4,7$

4) أكتب معادلة للمستقيم (T) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

5) لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب : $g(x) = f(x) - 2x - \frac{1}{2}$

أ- أحسب $g'(x)$ و $g''(x)$ ثم أدرس اتجاه تغير الدالة g' , استنتج إشارة $g'(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة g , استنتج وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T)

ج- أحسب $f(6)$ ثم أنشئ (C_f) و (T) .

6) n عدد طبيعي غير معدوم باستعمال التكامل بالتجزئة

أ - أحسب $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} x^2 lnx\ dx$ بدلالة n .

ب- استنتج بدلالة n المساحة $A(n)$ ب cm^2 للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المماس (T) و المستقيمين ذا المعادلتين $x = \frac{1}{n}$ و $x = 1$ ثم

- أحسب $\lim_{n \to +\infty} A(n)$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول :(4 نقاط)

يحتوي صندوق على 4 كرات تحمل رقم a و 5 كرات تحمل الرقم $(a-1)$ ، $a \in \mathbb{R}$.

نسحب عشوائيا في آن واحد 3 كرات من الصندوق .

1)احسب احتمال الحوادث التالية:

A : سحب 3 كرات تحمل نفس العدد.

B : سحب 3 كرات منها كرتين بالضبط تحملان نفس العدد.

2)ليكن X المتغير العشوائي المرتبط بمجموع الأعداد المسجلة على الكرات المسحوبة لكل سحب.

أ- حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X.

ب- حدد قانون الاحتمال X.

جـ- أحسب الأمل الرياضياتي بدلالة aو حدد aمن أجل $E(x)=0$

التمرين الثاني :(4 نقاط)

1) أ) اوجد D_{119} مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 119 .

ب) عين الثنائيات $(a;b)$ من $(\mathbb{N}^*)^2$حيث :

$$\begin{cases} PGCD(a;b)=17 \\ PPCM(a;b)=2023 \end{cases}$$

2) لتكن في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $289x-34y=2023....(E)$

أ) أوجد $PGCD(289;34)$ ثم استنتج ان المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

ب) بين انه اذا كانت الثنائية $(x;y)$حلا للمعادلة (E) فان y مضاعف للعدد 17 .ثم استنتج في $\mathbb{Z}^2$ حلول المعادلة (E)

ج)اوجد الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E)التي تحقق : $x^2-y\leq 52$.

4) n عدد طبيعي فردي ,باقي قسمته على 17هو 16فما هو باقي قسمته على 34 .

التمرين الثالث :(5 نقاط)

نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ النقط A ، B ، C التي لواحقها على الترتيب $Z_A=-i$ ، $Z_B=2+3i$ ، $Z_C=-4+i$:

1) أ) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\dfrac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}$.

ب) عين طويلة و عمدة العدد المركب $\dfrac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

2) نعتبر التحويل النقطي (T) في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث:
$Z'=iZ-1-i$

أ) عين طبيعة التحويل T و عناصره المميزة.

ب) ماهي صورة النقطة B بالتحويل T.

3) لتكن D النقطة ذات اللاحقة $Z_D=-6+2i$.

أ) بين أن النقط A، B، C على استقامية .

ب) عين نسبة التحاكي h الذي مركزه A و يحول النقطة C الى النقطة D.

جـ) عين العناصر المميزة للتشابه S الذي مركزه A و يحول B الى D

التمرين الرابع :(7 نقاط)

لتكن الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل : $g(x)=1+x+e^x$

1) ادرس تغيرات الدالة g

2) برهن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلا وحيدا α. تحقق أن α من المجال $]-1.3;-1.2[$

3) حدد تبعا لقيم x إشارة $g(x)$ ، ثم استنتج إشارة $g(-x)$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x)=\dfrac{xe^x}{1+e^x}$ نسمي (Γ) المنحنى البياني لها

1 أ) اكتب $f'(x)$ بدلالة $g(x)$ ثم ادرس تغيرات الدالة f .ب) برهن أن $f(\alpha)=1+\alpha$.

جـ) برهن أن المنحنى (Γ) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) بجوار $+\infty$ معادلته: $y=x$.

د) اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (Γ) عند النقطة O مبدأ المعلم ، ثم ادرس وضعية المنحنى (Γ) بالنسبة للمماس (T).

هـ) ارسم في معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ المنحنى (Γ) و (Δ) (تؤخذ $2cm$ كوحدة).

2 H) نقطة فاصلتها x (حيث $x>0$) وترتيبها معدوم ،المستقيم الموازي للمحور (yy') والمار من H يقطع (Γ) في النقطة M ويقطع المقارب (Δ) في النقطة N ، نضع $\varphi(x)=MN$.

أ) بين أن $\varphi(x)=\dfrac{x}{1+e^x}$.

ب) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $\varphi'(x)=\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}.g(-x)$.

واستنتج أن MN يكون أكبر ما يمكن عندما $x=-\alpha$.

ج) برهن أن $f(-\alpha)=1$.

د) برهن أن المماس للمنحنى (Γ) عند النقطة A ذات الفاصلة $(-\alpha)$ يوازي المستقيم (Δ) .اكتب معادلته ثم ارسمه في نفس المعلم السابق.

3)ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة التالية: $me^x+m+x=0$

4) أ)برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x\geq 1$ لدينا : $\dfrac{e^x}{1+e^x}\leq f(x)\leq x$.

ب)استنتج باستعمال المتباينة السابقة حصرا لمساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (Γ) والمستقيمات التي معادلاتها :

$x=1$ ، $y=0$ و $x=-\alpha$

انتهى الموضوع الثاني