

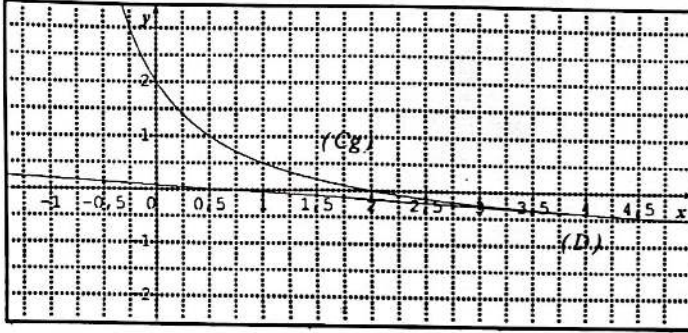
البكالوريا التجريبي في مادة الرياضيات

على المترشح اختيار احد الموضوعين

الموضوع الأول

التمرين الأول [100²]:

لتكن الدالة g المعرفة على المجال $] -1, +\infty[$. (C_g) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(0, \vec{i}, \vec{j})$



الوثيقة

← الوثيقة التالية تمثل تغيرات الدالة g على Dg

← حيث : $A(4, -\frac{2}{5})$ و $B(\frac{7}{10}, 0)$

و المستقيم ذو مماس ل (C_g) في

الفصلة $x = 4$ و (C_g) يقبل مقارب افقي

عند $+\infty$ معادلته $y = -1$.

• المطلوب :

1. من منحنى الدالة g حدد النهايات التالية مع التبرير :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{g\left(4\sqrt{\frac{x+2}{x+4}} + g\left(\frac{1}{4} + \frac{x-1}{4x+2}\right) - 1\right) - \frac{1}{6}} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x + g\left(\frac{2x+1}{e^x}\right)}{x - g\left(\frac{2x+1}{e^{-x}}\right)} \right) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x e^{xg\left(\frac{x+2}{2x+1}\right) - x + 2}}{1 + \frac{1}{x}}$$

• في مايلي نعرف الدالة f بمايلي : $f(x) = \ln\left(-g\left(2 + \frac{1}{x}\right) + \alpha\right) + x + \frac{1}{\alpha}$ مع $\alpha \in \mathbb{R}^*$

2. حدد مجال تعريف الدالة f . مع التعليل موضحا الطريقة .

3. جد عبارة المشتقة $f'(x)$.

4. بين ان : $f(x) > x$.

5. جد قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون : $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{73}{85}$.

نضع $\alpha = 3$. علل صحة العبارات التالية :

أ. (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = x - \frac{1}{3} + \ln(3)$ عند $+\infty$.

ب. f متناقصة تماما على المجال $]-\frac{1}{3}, 0[$ و متزايدة تماما لما $x > 0$.

ت. $f'(0) = \frac{1}{4}$.

6. في مايلي نعرف المتتالية (u_n) كمايلي :

$$\begin{cases} u_0 = f\left(\frac{1}{2}\right) \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}f(u_n) \end{cases}$$

أ. تحقق ان : $2(u_{n+1} - u_n) = f(u_n) - u_n$.

ب. استنتج تغيرات المتتالية u_n .

ت. برهن بالتراجع ان : $1 < u_n < \frac{3}{2}$.

ث. علل على تقارب المتتالية (u_n) . ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

ج. نعتبر الجداء التالي : $p_n = \frac{2u_1}{\sqrt{5}} \times \frac{2u_2}{\sqrt{5}} \times \dots \times \frac{2u_n}{\sqrt{5}}$.

جد حصرا لجداء p_n . ثم حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

التمرين الثاني : [110 ن]

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث $u_0 = -u_1 = \frac{1}{2}$ $v_n = e^{4+\frac{u_n}{n}}$ المعرفة على $\mathbb{N}^*$ ب

1. اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}$ فان : $u_{n+1} - u_n = -(-1)^n$
2. احسب الحدود u_4, u_3, u_2
3. جد عبارة المتتالية (u_n) بدلالة n
(أ) ناقش حسب قيم العدد الطبيعي n رتبة المتتالية (u_n)
(ب) هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟ علل اجابتك
4. برهن باستعمال مبدأ التراجع انه من اجل كل $n \in \mathbb{N}$ فان : $\cos(\pi n + \theta) = (-1)^n \cos(\theta)$
(أ) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $u_n = \cos(\pi n + \theta)$. يطلب تعيين θ
(ب) تحقق ان المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول
(ت) بين ان : $u_{n+1} \times u_{n+3} = (u_{2n})^2$
5. ليكن المجموع التالي : $s_n = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \dots + u_n$
برهن ان : $s_n = \frac{1}{2}(u_n + u_{2n})$
6. احسب المجموع التالي : $s'_n = C_n^0 U_0 - C_n^1 U_1 + C_n^2 U_2 - C_n^3 U_3 + \dots + C_n^n U_n$
7. جد حصرا للمتتالية v_n . ثم اثبت انها متقاربة نحو نهاية يطلب تعيينها .
• لتكن المتتاليتين (T_n) و (p_n) المعرفتان على $\mathbb{N} (n \geq 2)$ كمايلي :

$$T_n = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{n}\right) + \dots + \cos\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$$

$$p_n = \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) \times \cos\left(\frac{2\pi}{2n}\right) \times \cos\left(\frac{3\pi}{2n}\right) \times \dots \times \cos\left(\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)$$

1. ليكن مجموع k_n كمايلي : $k_n = \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \cos(3\theta) + \dots + \cos(n\theta)$

$$(أ) \text{ برهن ان : } k_n = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \times \cos\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

(ب) استنتج T_n . ماذا تلاحظ ؟

2. برهن بالتراجع انه من اجل عدد طبيعي $n \geq 2$ فان : $P_n = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$

$$(أ) \text{ حدد } \lim_{n \rightarrow +\infty} (p_n)^{2n} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$$

- (ب) جد قيمة الاعداد الطبيعية (α, β, γ) حتى يكون : $p_\alpha \times p_\beta \times p_\gamma = 9 \times 2^{-153}$

3. هل T_n و p_n متجاورتان ؟ علل اجابتك .

- جزء هذا مستقل عن الأول . ليكن z عدد حقيقي بحيث : $z \neq 0[2\pi]$

من اجل عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}^*$ نضع المجموع (s_n) حيث : $s_n = 1 + e^{iz} + e^{2iz} + \dots + e^{inz}$

1. اثبت ان : $\{\theta \in \mathbb{N}^*\}$ فان : $1 - e^{i\theta} = \left(-2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$

2. اثبت انه من اجل عدد طبيعي غير معدوم فان : $s_n = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)z}{2}\right)}{\sin\left(\frac{z}{2}\right)} \times e^{i\frac{nz}{2}}$

3. نأخذ في هذا الجزء ان : $Z = \frac{\pi}{n} (n \geq 2)$

$$\begin{cases} A_n = 1 + \cos\frac{\pi}{n} + \cos\frac{2\pi}{n} + \dots + \cos\frac{(n-1)\pi}{n} \\ B_n = \sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \dots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n} \end{cases}$$

نعتبر العددين A_n و B_n حيث :

4. تحقق ان : $s_{n-1} = A_n + iB_n$. ثم استنتج ان : $B_n = \frac{1}{\tan(\frac{1}{2}z)}$

التمرين الثالث [11²] :

لدينا n من الصناديق التي يمكن ان تحتوي على 0 الى n من الكرات . مرقمة من 1 الى n .

← نضع الكرات n بصفة عشوائية في الصناديق n .

(1) نرمز ب P_n الى احتمال وجود كرية واحدة بالضبط في كل صندوق .

(أ) بين ان : $p_n = \frac{n!}{n^n}$

(ب) بطريقتين مختلفتين احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$

(2) بين ان : $\frac{p_n}{p_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. استنتج انه من اجل $n \in \mathbb{N}^*$ فان : $\frac{p_n}{p_{n+1}} \leq e \leq \frac{p_{n+1}}{p_{n+2}}$

(3) برهن بالتراجع انه من اجل كل $n \in \mathbb{N}$ فان : $(1+x)^n \geq 1+nx$

(4) بين ان : $\frac{p_n}{p_{n+1}} \geq 2$

(5) استنتج ان : $p_n \leq \sqrt{\frac{n}{2}} \times \sqrt{\frac{n}{4}} \times \sqrt{\frac{n}{8}} \times \dots \times \sqrt{\frac{n}{2^n}}$

(6) جد مرة أخرى $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$

التمرين الرابع [111²] :

نعتبر الدالة g_n المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $\begin{cases} g_n(x) = x + x \ln(|x|^n) & x \neq 0 \\ g(0) = 0, x = 0 \end{cases}$ حيث $(n \in \mathbb{N}^*)$

1. برهن ان جميع المنحنيات (c_{g_n}) تمر من ثلاث نقاط ثابتة يطلب تعيينهم .

2. ادرس شفيعة الدالة g_n . ثم فسر النتيجة هندسيا .

3. عين نهايات الدالة g_n .

4. بين انه من اجل كل $(x \in Dg)$ فان : $g'_n(x) = \ln(|x|^n) + n + 1$

أ. ادرس تغيرات الدالة g_n . ثم شكل جدول التغيرات .

ب. ناقش حسب قيم $(m, n) \in \mathbb{N}^*$ حلول المعادلة : $\ln\left(\frac{m(1+\ln|x|^n)}{x}\right) = \ln(1 + e^{\ln(n)+\ln(\ln|m|)})$

5. اثبت ان المعادلة $g_n(x) = 0$ تقبلين حلين هما α_n و β_n حيث $0 < \alpha_n < 1$ و الاخر استنتج حصرا له

6. تحقق ان $\alpha_1 = e^{-1}$, ثم بين ان $n \geq 2$ فان $\ln(\alpha_n) + \frac{1}{n} = 0$

أ. استنتج تغيرات المتتالية α_n , ثم علل على تقاربها .

ب. احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \alpha_n$ ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$

ت. اكتب معادلة المماس (Δ) عند الفاصلة α_n .

ث. استنتج إشارة الدالة g_n .

7. باستعمال المكاملة بالتجزئة جد اصلية $t \rightarrow t \ln|t|^n$ و التي تنعدم عند القيمة 1 .

8. نعرف المتتالية u_n و v_n كمايلي : $u_n = \int_1^e g_n(x) dx$, $v_n = e^{u_n}$

أ. اثبت ان من خلال المكاملة بالتجزئة ان $u_1 = \frac{3e^2-1}{4}$. ثم جد عبارة u_n بدلالة n

ب. بين ان مساحة جميع المنحنيات $(c_{g_{n+1}})$ و (c_{g_n}) و المستقيمت $x = 1$ هي $\frac{e^2+1}{4}$

ت. اثبت ان v_n هندسية أساسها $q = \sqrt[4]{e^{e^2+5}}$ و يطلب تعيين حدها الأول .

ث. احسب المجموع التالي : $s_n = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + \dots + v_{n-1} u_{n-1}$

• نعرف الدالة f على $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ بالعلاقة التالية :

$$f(x) = \ln \left(|\cos(x)|^{\sin(x)} \times \sqrt{\frac{\sin(x) + 1}{1 - \sin(x)}} \right)$$

1. اثبت ان الدالة f مستمرة على D_f .
 2. اثبت ان الدالة f فردية.
 3. تحقق ان الدالة f دورية دورها $T = 2\pi$.
 4. برهن ان : $|f(x)| < \ln(2)$.
 5. بين ان كل $x \in D_f$ فان : $f'(x) = g_1(\cos(x))$.
- أ. استنتج تغيرات الدالة f على المجال $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.
- ب. شكل جدول التغيرات الدالة f على نفس المجال السابق.
- ت. استنتج الوضع النسبي لكل من (c_f) و منحنى الدالة $\ln|\cos(x)|^{\sin(x)}$.

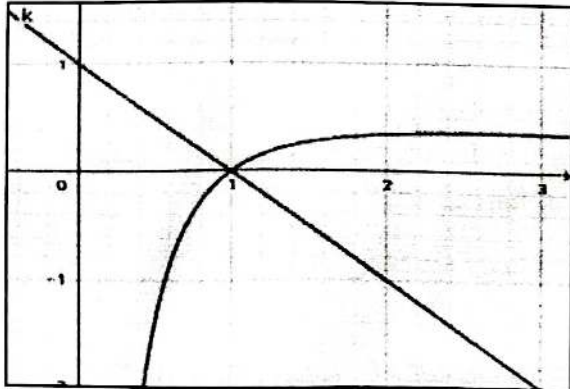
بالتوفيق لكم

أتمنى لكم النجاح الدائم في مسيرتكم المتبقية
لو النجاح كان ساهل لكانت كل الناس ناجحة

الموضوع الثاني :

التمرين الرابع :

(1) لتكن الدالتين h و k المعرفتين على $]0, +\infty[$ بـ $h(x) = \ln^2 x$ و $k(x) = 1 - x$.



الوثيقة المقابلة تمثل تغيرات كل من h و k .

• نعتبر الدالة $g(x) = k(x) - h(x)$.

(1) استنتج تبعا لقيم x إشارة $g(x)$ على نفس المجال.

(2) ليكن α عدد حقيقي $\alpha \in]0,1[$ وليكن $A(\alpha)$ حيث

$$A(\alpha) = \int_{\alpha}^1 g(x) dx$$

جد $A(\alpha)$ بدلالة α ثم فسر ذلك هندسيا.

• نعتبر الدالة f المعرفة بـ $f(x) = \sqrt{x - \ln(x)}$.

(1) عين مجموعة تعريف الدالة f .

(2) احسب النهايات عند اطراف مجال التعريف. ثم فسر النتائج هندسيا.

(3) بين ان المعادلة $e^{\sqrt{x - \ln(x)} - 1} - e = 0$ تقبل حلين احدهما β حيث : $5,7 < \beta < 5,8$.

(4) بين ان : $f'(x) = -\frac{k(x)}{2xf(x)}$

(أ) استنتج اتجاه تغير الدالة f . ثم شكل جدول تغيرات.

(ب) بين ان من اجل كل $x \in Df$: $x \geq 1 + \ln(x)$

(5) استنتج ان : $f(\beta) = 2$

(6) بين ان : $f(x) - x = \frac{g(x)}{f(x)+x}$. ثم استنتج ال وضع النسبي لكل من (C_f) و $y = x$.

(7) ارسم كل من (C_f) و $y = x$.

(8) اثبت انه من اجل $1 \leq x \leq e$ فان : $\ln(x+1) \leq f(x) \leq x$

(أ) استنتج حصرا $A = \int_1^e f(x) dx$.

• في مايلى نعرف المتتالية (u_n) العددية كمايلي : $\begin{cases} u_0 = e \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

(1) مثل اربع حدود الاولى دون جسابها مبرزا خطوط الانشاء.

(2) برهن بالتراجع انه من اجل كل $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq \ln(u_n) \leq 1$.

(3) استنتج تغيرات المتتالية (u_n) . ثم علل على تقارب (u_n) .

(4) بين ان : $|1 - u_{n+1}| \leq \frac{1}{2} |1 - u_n|$

(5) استنتج انه : $|1 - u_n| \leq \frac{e-1}{2^n}$

(6) حدد : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(7) نعتبر الجداء : $p_n = \sqrt[3]{\frac{2}{u_2^2 + \ln(u_1)}} \times \sqrt[9]{\frac{4}{u_3^2 + \ln(u_2)}} \times \sqrt[27]{\frac{8}{u_4^2 + \ln(u_3)}} \times \dots \times \sqrt[3^n]{\frac{2^n}{u_{n+1}^2 + \ln(u_n)}}$

جد حصرا للجداء P_n .

حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$

التمرين الثاني :

ليكن z_1 و z_2 و z_3 اعداد مركبة حلا للمعادلة $z^3 + 64e^{i\frac{\pi}{2}} = 0$. حيث ان : $z_3 + \bar{z}_2 = 0$.
 $\text{Re}(z_2) < 0$

- (1) جد كل من z_1 و z_2 و z_3 . ثم اكتبهم على الشكل الاسي .
- (2) استنتج طبيعة المثلث الناتج موضحا الخطوات .
- في مايلى نعتبر صندوق (φ) يحتوي على (n) كرية حمراء تحمل العدد z_1 و $(n+1)$ كرية خضراء تحمل العدد z_2 و $(n+2)$ كرية بيضاء تحمل العدد z_3 . حيث n عدد اولي اصغر تماما من 10 . نسحب من الصندوق (φ) 3 كريات على التوالي دون ارجاع و نعتبر الحوادث التالية :

A « سحب على الأقل كرية حمراء » B « الكرية الثانية تحمل عدد تخيلي صرف »

- (1) جد $p(A \cap B)$ بدلالة n .
- في مايلى نسحب الكريات البيضاء من الصندوق (φ) و نفرغ الكريات الباقية في صندوق اخر (ζ) و نسحب على التوالي كرتين دون ارجاع . نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل $\arg(\alpha) +$ حيث $\arg(\beta)$ و β العددين الظاهرين على الكرية المسحوبة .
- (أ) جد قيم المتغير العشوائي . ثم عرف قانون احتماله .
- (ب) عين مايلى : $p(X < \int_e^{e+1} \frac{1}{x \ln(x)} dx + \int_{e+1}^{e+2} \frac{1}{x \ln(x)} dx + \dots + \int_{e+2023}^{e+2024} \frac{1}{x \ln(x)} dx)$ و $p(X \leq \int_{\pi}^{\pi^2} te^{-t} dt)$.

التمرين الثالث :

- (1) برهن انه مهما كان $n \in \mathbb{N}$ فان : $4^{3n} \equiv 3^{6n} [7]$.
- (2) استنتج باقي قسمة العدد $9999^{2026^{2024}}$ على 7 .
- (3) ليكن العدد $A(n) = 9999^{2026^n} + 2025^{2n} + 199^n + 2 \times 2026^n$.
(أ) جد قيم العدد الطبيعي n حتي يكون $A(n) \equiv 0 [7]$.
(ب) هل العدد $A(2024^{1962})$ مضاعف ل 7 ؟
(ت) استنتج باقي قسمة العدد $A(2024)$ على 77 .
- (4) نعتبر المجموعتين التاليتين :
 $\begin{cases} S_n = 36 + 288 + 1728 + \dots + 9n \cdot 4^n \\ S'_n = 12 + 72 + 324 + \dots + 4n \cdot 3^n \end{cases}$
(أ) برهن بالتراجع انه : $S_n - S'_n = (3 - 6n) \cdot 3^n + (12n - 4) \cdot 4^n + 1$.
(ب) بين ان : $S_{1954} \equiv S'_{1954} [7]$.
(ت) جد باقي قسمة العدد $(S_{2024} - S'_{2024})^{2005^{2024}}$ على 7 .
(ث) جد قيم العدد الطبيعي n حتي يكون $S_n \equiv S'_n [7]$.
- نضع العددين الطبيعيين الغير معدومين X و Y المكتوبان في نظام ذي الأساس n .
حيث : $X = 4343^n$ و $Y = 50601^n$ و نضع ان $\text{PGCD}(X, Y) = d$.
- (1) استنتج القيم الممكنة ل d .
- (2) جد قيم العدد الطبيعي n حتي يكون : $d = 50$ و $d = 101$.
- (3) هل توجد قيم للعدد الطبيعي n حتي يكون $d = 2024$. علل اجابتك .
- (4) تحقق انه اذا كان d/x و d/y فان : $d/2c_n^2 + n - 1$.
- (5) استنتج قيمة d في حالة $n = 2024^{2023}$.
- (6) نضع ان $n = 9$ تحقق ان العدد $y^{2027} - 2025^x - 2024^{2023} + y - 6$ مضاعف ل 7 .

التمرين الأول :

لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بالعلاقة : $g(x) = \frac{\ln(2)\sqrt{x}}{x}$ يعطى جدول تغيراتها :
(1) انطلاقا من جدول التغيرات حدد إشارة $g(x)$.

x	0	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	0

• في ما يلي نعرف المتتاليتين (u_n) و (w_n) على $\mathbb{N}^*$ كمايلي :

$$w_n = \frac{eu_n}{(e-1)} \text{ و } u_n = \int_1^e \frac{n}{x} \ln\left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt[n]{x}}\right) dx$$

(1) بين ان : $u_1 = \ln(2)(2\sqrt{e} - 2) - \frac{1}{2}$. ثم استنتج w_1 .

(2) اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم $u_{n+1} - u_n = \int_1^e g(x) dx$.
استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(3) بين انه $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{n}{e} \ln\left(\frac{2}{\sqrt[n]{e}}\right)(e-1) \leq u_n \leq n \ln(2\sqrt{e})(e-1)$

(أ) استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. ماذا تستنتج .

(ب) جد حصرا لمتتالية w_n . ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$.

(4) نعتبر الجداء p_n حيث : $p_n = \sqrt[n]{e^{w_1}} \times \sqrt[n]{e^{w_2}} \times \sqrt[n]{e^{w_3}} \times \dots \times \sqrt[n]{e^{w_n}}$

(أ) بين انه من اجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ فان : $\frac{1}{e} \sqrt{2^{n+1}} \leq p_n \leq \sqrt{2^{(n+1)\sqrt{e}}}$

(ب) استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{p_n}$

(5) بين انه من اجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} - u_n = \ln(2)(2\sqrt{e} - 2)$. ثم استنتج طبيعة المتتالية (u_n)

• في ما يلي نضع : $v_n = e^{u_n}$ و نضع ان $u_0 = -\frac{1}{2}$.

(1) بين ان v_n هندسية أساسها $q = 4\sqrt{e}-1$ يطلب تعيين حدها الأول وعبارتها .

(2) جد مرة اخرى عبارة u_n ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(3) نضع المجموع التالي :

$$s_n = c_{2n}^0 \frac{1}{v_0} + c_{2n}^1 \frac{2^{2\sqrt{e}-2}}{v_1} + c_{2n}^2 \frac{2^{4\sqrt{e}-4}}{v_2} + \dots + c_{2n}^{2n} \frac{(2^{2\sqrt{e}-2})^{2n}}{v_n}$$

(أ) برهن انه من اجل كل عدد طبعين k و n : $0 < k \leq n$ فان : $Kc_n^k = nc_{n-1}^{k-1}$.

(ب) احسب s_n بدلالة n . ثم بين انه مهما كان n فان : $s_n = \sqrt{e} 4^n$.