



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

(I) يحتوي صندوق U_1 على ثلاث كريات تحمل الأرقام 0 ، 1 ، 3. ويحتوي صندوق U_2 على أربع كريات تحمل الأرقام 4 ، 5 ، 8 ، 8. جميع الكريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس.

نسحب عشوائيا كرية واحدة من الصندوق U_1 .

- إذا كانت الكرية المسحوبة من U_1 تحمل الرقم 0 نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من الصندوق U_2

- إذا كانت الكرية المسحوبة من U_1 لا تحمل الرقم 0 نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من الصندوق U_2

نعتبر الحادثتين التاليتين: A : " الكرية المسحوبة من الصندوق U_1 تحمل الرقم 0 "

S : " مجموع أرقام الكريات المسحوبة من الصندوق U_2 عدد زوجي "

(1) أ) أنجز شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه التجربة.

ب) احسب $P_A(S)$ و $P(A \cap S)$.

ج) تحقق أن: $P(\bar{A} \cap S) = \frac{1}{6}$ ثم استنتج $P(S)$.

(2) علماً أن مجموع الأرقام التي تحملها الكريات المسحوبة من الصندوق U_2 زوجي ما احتمال أن تكون الكرية المسحوبة من U_1 لا تحمل الرقم 0.

(II) نضع محتوي الصندوقين في صندوق جديد U_3 ثم نسحب عشوائيا على التوالي بدون إرجاع 3 كريات.

(1) احسب احتمال الحادثة C : " الحصول على كرية واحدة فقط تحمل رقما أوليا ".

(2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب لثلاث كريات من U_3 عدد الكريات التي تحمل رقما زوجيا.

أ) عيّن قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم استنتج $P(|X - 1| < 1)$.

ب) احسب الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(1) نعتبر المعادلة $(E) 4x - 5y = 33 \dots$ ذات المجهول $(x; y)$ حيث x و y عدنان صحيحان.

أ) عيّن الأعداد الصحيحة x بحيث: $4x \equiv 33[5]$

ب) استنتج حلا خاصا $(x_0; y_0)$ للمعادلة (E) بحيث: $2 < x_0 < 10$ ثم حل المعادلة (E) .

ج) عيّن الثنائية الوحيدة $(a; b)$ من $\mathbb{N}^2$ حلا للمعادلة (E) بحيث: $PGCD(a; b) = 3$ و $PPCM(a; b) = 135$.

(2) عيّن الأعداد الصحيحة α حلول الجملة $\begin{cases} \alpha \equiv 55[5] \\ \alpha \equiv 22[4] \end{cases}$.

(3 أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 11.

(ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد: $10^{10n} + 16^{5n+4} + 38^{20n+1}$ على 11.

$$(ج) \text{ عيّن قيم العدد الطبيعي } n \text{ بحيث : } \begin{cases} n - 5^n \equiv 0[11] \\ n \equiv 2[5] \end{cases}$$

(4) N العدد الطبيعي الذي يكتب في نظام التعداد ذي الأساس أربعة كما يلي: $\overline{abbaba}^4$.

- عيّن a و b حتى يقبل العدد N القسمة على 33 ثم اكتب N في النظام العشري.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

α عدد حقيقي يختلف عن -2.

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0 = \alpha + 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{(\alpha + 2)u_n}{u_n + 2 - \alpha}$

$$(v_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ: } v_n = \frac{u_n}{u_n - 2\alpha},$$

I) نضع $\alpha = 1$:

$$(1) \text{ أ) تحقق أنّه من أجل كل عدد طبيعي } n: u_{n+1} = 3 - \frac{3}{u_n + 1}.$$

(ب) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 < u_n < 4$.

(ج) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n). هل المتتالية (u_n) متقاربة؟ برّر إجابتك.

$$(2) \text{ أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي } n: u_n = \frac{6}{3 - 3^{-n}} \text{ ثم احسب } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n.$$

(ب) استنتج عبارة v_n بدلالة n ثم عيّن أصغر عدد طبيعي n يحقق: $v_n \geq e^{66}$.

$$(3) \text{ احسب بدلالة } n \text{ المجموع } S_n \text{ بحيث: } S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n}.$$

II) نفرض أن: $-2 < \alpha < 0$

$$(1) \text{ أ) بيّن أنّ المتتالية } (v_n) \text{ هندسية أساسها } \frac{2 + \alpha}{2 - \alpha} \text{ يطلب تعيين حدّها الأوّل.}$$

(ب) أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة α و n . هل المتتالية (v_n) متقاربة؟ برّر إجابتك.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) نعتبر الدالتين العدديتين g و h المعرفتين على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x - 1 - \ln x$ و $h(x) = x + (x - 2)\ln x$

(1) أ) ادرس اتجاه تغير الدالة g .

(ب) احسب $g(1)$ ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

- (2) أ) تحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$: $h(x) = 1 + g(x) + (x-1)\ln x$.
 ب) بيّن أنّه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $(x-1)\ln x \geq 0$ ، ثمّ استنتج أنّ $h(x) > 0$ على المجال $]0; +\infty[$.
- II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = 1 + x \ln x - (\ln x)^2$.

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، (وحدة الطول $2cm$) .

(1) أ) تحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$: $f(x) = 1 + x \ln x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$

ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ثمّ فسّر النتيجة الثانية هندسياً .

(2) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{h(x)}{x}$

(3) استنتج ممّا سبق اتجاه تغيّر الدالة f على $]0; +\infty[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها .

(4) أ) اكتب معادلة للمستقيم (T) مماس المنحنى (C_f) في النّقطة التي فاصلتها 1 .

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$: $f(x) - x = (-1 + \ln x)g(x)$.

ج) ادرس إشارة $[f(x) - x]$ على المجال $]0; +\infty[$ ثمّ استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (T) .

(5) عيّن العدد الحقيقي β من المجال $]1; +\infty[$ والذي يحقّق $h(\beta) = \beta$ ، ثمّ استنتج أنّ (C_f) يقبل مماساً (T') يوازي (T) يطلب تعيين معادلة له .

(6) برهن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث : $0,4 < \alpha < 0,5$.

(7) أنشئ في المعلم السابق المماسين (T) و (T') والمنحنى (C_f) .

(8) باستعمال المنحنى (C_f) ، عيّن قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة $f(x) = x + m$ ثلاثة حلول مختلفة .

الموضوع الثاني (شعبة رياضيات)

التمرين الأول: (04 نقاط)

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدّها الأول u_1 .

$$(1) \text{ أ) تحقّق أنّ: } u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = (u_1 - u_2 + u_3)(u_1 + u_2 + u_3)$$

$$(2) \text{ ب) عيّن الحدود } u_1, u_2, u_3 \text{ علماً أنّ: } \begin{cases} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 2275 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 65 \end{cases}$$

(ج) استنتج أساس المتتالية (u_n) ثمّ بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n , $u_n = 5 \times 3^{n-1}$.

(2) أ) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 8.

(ب) بيّن أنّ العدد $u_{2024} - u_{1445} - 2$ يقبل القسمة على 8

(3) x و y عدنان صحيحان، نعتبر المعادلة ذات المجهول $(x; y)$ التّالية: $u_2 = 7u_1x - u_3y$ (E)

أ) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).

(ب) عيّن الثنائيات $(x; y)$ حلا المعادلة (E) بحيث: $y < x < 10$

(4) نفرض أنّ x و y عدنان طبيعيين. نضع: $d = PGCD(x; y)$ بحيث، $(x; y)$ حلا لـ (E)

أ) عيّن القيم الممكنة لـ d .

(ب) عيّن الثنائيات $(x; y)$ من الأعداد الطبيعية حلا لـ (E) بحيث: $d = 3$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي صندوق على 12 كرية متماثلة لا نفرق بينها باللمس، منها α كرية بيضاء و β كرية سوداء، حيث α و β عدنان طبيعيين غير معدومان.

(1) نسحب من الصندوق وبصفة عشوائية كرتين على التّوالي دون إرجاع.

نعتبر الحادثة E : "الحصول على كرتين من لونين مختلفين".

$$- \text{ عيّن الثنائيتين } (\alpha; \beta) \text{ من الأعداد الطبيعية إذا علمنا أنّ: } P(E) = \frac{16}{33}$$

(2) نضع: $\alpha = 8$ و $\beta = 4$

نسحب الآن من الصندوق ثلاث كريات على التّوالي مع إرجاع الكرية المسحوبة إلى الصندوق قبل السّحب الموالي.

احسب احتمال الحوادث التالية: A : "من بين الكريات المسحوبة، الأولى فقط بيضاء"

B : "من بين الكريات الثلاث المسحوبة، واحدة بالضبط بيضاء"

C : "من بين الكريات الثلاث المسحوبة توجد واحدة على الأقل بيضاء وواحدة على الأقل سوداء"

- (3) نقترح اللعبة التالية للمشاركة يدفع اللاعب $200DA$ ثم يسحب في آن واحد ثلاث كريات من الصندوق. يربح اللاعب $100DA$ عن كل كرية بيضاء تحصل عليها خلال السحب.
- نسمي X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لثلاث كريات الربح الصافي أو خسارة اللاعب.
- (أ) عيّن القيم الممكنة للمتغير العشوائي X .
- (ب) عيّن قانون احتمال المتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضي $E(X)$. هل اللعبة عادلة ؟
- التمرين الثالث: (05 نقاط)**

(1) (أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2 - 6z + 10 = 0$.

(ب) استنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة ذات المجهول z التالية: $(\bar{z} + 2)^2 - 6(\bar{z} + 2) + 10 = 0$

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A, B, C, D

التي لاحتقاتها على الترتيب: $z_A = 3 - i$ ، $z_B = 3 + i$ ، $z_C = 1 + i$ و $z_D = 1 - i$

(أ) أكتب على الشكل الأسّي العدد المركب $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}$.

(ب) بيّن أنّ النقطة D هي صورة النقطة B بدوران R يطلب تعيين عناصره المميزة.

(3) E النقطة التي لاحتقتها $z_E = 7 - 3i$ و F صورتها بالدوران R .

(أ) تحقق أنّ لاحقة F هي: $z_F = 5 + 3i$

(ب) عيّن لاحقة النقطة H صورة F بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AE}$

(ج) استنتج بدقة طبيعة الرباعي $AEHF$

(4) عيّن المجموعة (Γ) للنقط M ذات اللاحقة z حيث: $z = 1 - i + ke^{-i\frac{\pi}{4}}$ وذلك عندما k يسمح $\mathbb{R}_+$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 - 2(x^2 - x)e^{2x}$

(1) (أ) بيّن أنّ: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$ ثمّ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

(ب) بيّن أنّ: $g'(x) = 2(1 - 2x^2)e^{2x}$ ثمّ استنتج اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$

(2) (أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1,05 < \alpha < 1,06$

(ب) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x ، إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x - 1 + (x + 1)^2 e^{-2x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) (أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(ب) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

(ج) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

(2) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(-x)$ ثم استنتج إشارة $f'(x)$.

ب) حدّد اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ثم شكّل جدول تغيراتها

(3) أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة التي فاصلتها 0.

(4) نضع: $-2,1 \approx f(-\alpha)$ ، أحسب $f(-2)$ ثم أرسم (Δ) و (T) و المنحنى (C_f)

(5) عيّن قيم الوسيط الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة : $(x+1)^2 e^{-2x} - e^m = 0$ ذات المجهول الحقيقي x ثلاثة حلول.

(6) الدالة h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = (x+1)e^{-2x}$

أ) بيّن أنّ: $2h(x) + h'(x) - e^{-2x} = 0$ ثم أحسب $\int_{-1}^{\lambda} h(x)dx$ حيث λ عدد حقيقي أكبر تماماً من -1

ب) باستعمال المكاملة بالتجزئة ونتيجة السؤال 6. أ)، أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى

(C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = -1$ و $x = \lambda$.