

على المترشح أن يعالج أحد الموضوعين على الخيار

الموضوع الأول

التمرين الأول 4 نقاط

(-1) نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(E) \dots \dots [z^2 - 4z + 13][z^2 - 2(2 - 3\sqrt{2})z + 49 - 30\sqrt{2}] = 0$

(°1) أنشر العبارة: $(3\sqrt{2} - 3)^2$ ، ثم حل المعادلة (E) .

في المستوي المركب (P) النقط: $A; B; C; D$ التي لواحقها على الترتيب: $z_\omega = -1; z_A = 2 - 3i; z_B = \overline{z_A}$ و $z_D = \overline{z_C}; z_C = (2 - 3\sqrt{2}) + (3\sqrt{2} - 3)i$.

(°2) أكتب العددين $z_A - z_\omega$ و $\frac{z_B - z_\omega}{z_A - z_\omega}$ على الشكل الأسّي ، ثم استنتج طبيعة المثلث ωAB .

(°3) أكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_D}{z_B - z_A}$ على الشكل الجبري ، ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

(°4) (-) أكتب العددين $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_D}$ و $\frac{z_C - z_D}{z_B - z_A}$ على الشكل الجبري ثم استنتج عمدة كل منهما .

(ب-) أكتب المعادلة الديكارتيّة لـ (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقّة z التي تحقق: $|z - z_B| = |z - z_C|$ ، ثم جد z_I لاحقة I نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع حامل محور الفواصل .

(ج-) أحسب $|z_I - z_A|$ ، ثم استنتج أن النقط $A; B; C; D$ تنتمي إلى نفس الدائرة التي يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .

التمرين الثاني: 4 نقاط

يحتوي الصندوق A على 4 كرات بيضاء ، و 3 كرات خضراء ، و كرتان حمراوان . و يحتوي الصندوق B على 3 كرات بيضاء تحمل العدد $\frac{\pi}{4}$ ، و كرتان خضروان تحملان العدد $\frac{\pi}{2}$ ، و كرة حمراء تحمل العدد π . كل الكرات متماثلة لا نميز بينها عند اللمس .

نرمي مرتين زهرة نرد متجانسة ذات 4 أوجه مرقمة بـ: -2 ، -1 ، 1 ، 2 ، إذا حصلنا على مجموع العددين معدوم نسحب من الصندوق A 3 كرات في آن واحد ، و إلا نسحب من الصندوق B كرتين على التوالي و بدون ارجاع .
نسمي A الحدث " السحب من الصندوق A و B الحدث " السحب من الصندوق B و C الحدث " الحصول على نفس اللون " و D الحدث " الحصول على لونين مختلفين " E الحدث " الحصول على 3 ألوان مختلفة مثنى مثنى " .

(°1) أحسب : $P(A); P(C); P_A(E); P_B(D)$.

(°2) (-) شكل شجرة الاحتمالات الشرطية التي تنمذج هذه التجربة .

(ب-) باستعمال دستور الاحتمالات الكلية أحسب $P(C)$ ، ثم أحسب : $P_C(A)$.

(°3) عند السحب من الصندوق B نسمي α العدد الذي تحمله الكرة الأولى و β العدد الذي تحمله الكرة الثانية و نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية السحب العدد: $\cos(\alpha + \beta)$ إذا كان السحب من الصندوق B ، و عدد الألوان إذا كان السحب من الصندوق A .

(أ-) عين مجموعة قيم المتغير العشوائي X .

(ب-) عين قانون احتمال المتغير العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضيائي $E(X)$.

(°4) نجمع كل الكرات و نضعها في كيس ثم نسحب 4 كرات على التوالي و بالارجاع . أحسب احتمال F الحصول على ألوان العلم الوطني .

التمرين الثالث: 05 نقاط

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $14x - 5y = 26 \dots (E)$

- 1° أ-) أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فإن y زوجي .
- ب-) عين الحل الخاص $(a; a + 2)$ للمعادلة (E) ، ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) .
- 2° أ-) إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) ، عين مجموعة القيم الممكنة لـ $PGCD(x; y)$.
- ب-) عين مجموعة الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق $PGCD(x; y) = 13$.
- 3° أ-) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 13 .
- ب-) استنتج باقي القسمة على 13 للعدد A علما أن: $A = 1445^{2024} + 2974^{1444} + 2024^{1962}$.
- ج-) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $9^{2n+2}(n-1)[13] \equiv 1445^{4n+4} - 9n \times 2024^{2n+1}$ ، ثم عين مجموعة قيم n التي من أجلها يكون $9n \times 2024^{2n+1} - 1445^{4n+4}$ مضاعف 13 .
- 4° أ-) عدد طبيعي يكتب في النظام ذي الأساس 9 على الشكل $1\delta\gamma 5$ و في النظام ذي الأساس 8 على الشكل $2\beta\alpha 5$.
- أ-) عين قيمة الرقمين α و β ، ثم استنتج قيمة العدد الطبيعي N في النظام العشري . علما أن $\delta = 2\alpha\gamma = \beta + 1$
- 5° أ-) عدد طبيعي يكتب في النظام ذي الأساس $n - 1$ على الشكل $5m21$ و في النظام ذي الأساس $n + 1$ على الشكل $2mn n$. عين قيمة الرقمين n و m ، ثم استنتج قيمة العدد الطبيعي M في النظام العشري .

التمرين الرابع: 07 نقاط

- أ-) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = (x + 1)e^{-x} - e^{-2}$ ، نسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- 1° أ-) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة الأخيرة بيانيا .
- ب-) أدرس اتجاه تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .
- 2° نقبل أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين a و b حيث $a \in]-0,95; -0,9[$ و $b \in]3,5; 3,6[$. استنتج إشارة $f(x)$.
- 3° بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[a; 2]$ فإن: $0 \leq f(x) \leq 1 - e^{-2}$.
- 4° دالة عددية معرفة على المجال $[a; +\infty[$ كما يلي: $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ ، نسمي (C) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- أ-) ما ذا تمثل الدالة F بالنسبة للدالة f ، ثم استنتج اتجاه تغيرات الدالة F ، ثم شكل جدول تغيراتها .
- ب-) باستعمال المكاملة بالتجزئة عين عبارة $F(x)$ بدلالة x .
- ج-) أحسب بدلالة a مساحة الحيز من المستوي $\mathcal{A}(a)$ المحدد بالمنحنى (C_f) و محور الفواصل و المستقيمين $x = a$ و $x = 2$ معادلتي لهما ، ثم بين أن: $\mathcal{A}(a) = e^{-2} \left(a - 5 + \frac{1}{a+1} \right)$ و استنتج حصرا لـ $\mathcal{A}(a)$.
- د-) بين أن المعادلة $F(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]1; 2[$ ، ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C) و المنصف الأول $y = x$: (Δ) .
- 5° أنشئ المنحنى (C) و المنصف الأول (Δ) .
- 6° (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = a$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = F(u_n)$.
- أ-) باستعمال الشكل الذي رسمته . مثل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) ، ثم خمن اتجاه تغيراتها و تقاربها .
- ب-) برهن عن طريق التراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $a \leq u_n \leq \alpha$.
- ج-) برهن صحة التخمين السابق .
- د-) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $|u_{n+1} - \alpha| \leq (1 - e^{-2})|u_n - \alpha|$.
- هـ-) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $|u_n - \alpha| \leq (f(0))^n |\alpha - a|$ ، ثم أحسب استنتج $\lim(u_n)$.

الموضوع الثاني:

التمرين الأول (04ن):

اختر الإجابة الصحيحة مع التعليل من بين ثلاث أجوبة مقترحة:

1 - نريد تشكيل عدد ذو 3 أرقام محصور بين 300 و 500 وهذا بسحب ثلاث كريات على التوالي دون إرجاع في كيس يحتوي على 6 كريات مرقمة من 1 إلى 6 لا نفرق فيما بينها باللمس بحيث في السحب الأول نشكل رقم الأحاد وفي السحب الثاني نشكل رقم العشرات وفي السحب الثالث نشكل رقم المئات.

احتمال تشكيل هذا العدد يساوي : أ - $\frac{1}{12}$ ، ب - $\frac{1}{6}$ ، ج - $\frac{1}{3}$.

2 - نريد اختيار لجنة في مادة الرياضيات تقوم بتحضير مواضيع الاختبارات التجريبية للفصل الثالث تتكون من 4 أساتذة من بين 15 أستاذ (10 نساء و 5 رجال).

عدد طرق اختيار لجنة بحيث الأستاذة x تريد أن تكون في لجنة لا يوجد فيها السيدان y و z ولا توجد فيها السيدة t هو : أ - 165 ، ب - 330 ، ج - 220 .

3 - نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ العدد S حيث : $S = \frac{2-iz}{1-z}$ مع $z \neq 1$ من أجل $z = 2$ فإن

العدد S^{2024} أ - تخيلي صرف ، ب - حقيقي ، ج - معدوم .

4 - أكبر عدد صحيح سالب x للجملة التالية : $\begin{cases} x \equiv 2[3] \\ x \equiv 1[7] \\ x \equiv 4[5] \end{cases}$ هو : أ - -57 ، ب - -69 ، ج - -76 .

التمرين الثاني (04ن):

1 - ادرس أولية العدد 421 ثم حل في المجموعة $\mathbb{N}^2$ المعادلة : $4m + 3n = m \times n - 409$ حيث $m > n$.

2 - ABC مثلث قائم في A حيث : $AB = 29$ ، $BC = x$ ، $AC = y$ مع x و y عدنان طبيعيين غير معدومين

أ - عين قواسم مربع العدد 29

ب - عين المثلث ABC.

ج - بين أن : $PGCD(421; 29; 420) = 1$.

3 - α عدد طبيعي. استنتج قيمة العدد α التي من أجلها يكون العدنان $\alpha + 2024$ و $\alpha + 1183$ مربعين تامين.

4 - إليك عمليتين حسابيتين الأولى في نظام التعداد ذي الأساس a و الأخرى في نظام التعداد ذي الأساس b .

$$\overline{1141}^a + \overline{41}^a + \overline{1140}^a = \overline{2352}^a \dots \dots (1)$$

$$\frac{1}{2}(\overline{32}^b \times \overline{516}^b) = \overline{8316}^b \dots \dots \dots (2)$$

أ/ عين a و b .

ب/ تحقق من صحة العمليتين في النظام العشري مفسرا هندسيا العمليتين بالنسبة للمثلث ABC.

التمرين الثالث (05ن):

(U_n) متتالية عددية معرفة بعدها الأول $U_0 = \alpha$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{4U_n}{U_n+6}$ حيث α عدد طبيعي .

1 - عين قيمة α حتى تكون (U_n) متتالية ثابتة .

2 - نضع فيما يلي : $\alpha = 6$.

أ/ - برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $U_n > 0$.

ب/ - ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ثم ماذا تستنتج بالنسبة لتقاربها ؟

ج/ - بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $U_{n+1} \leq \frac{2}{3} U_n$.

د/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n \leq 6 \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

3 - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $U_n = \frac{2}{\frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}$ يطلب حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ من جديد .

4 - نعتبر (V_n) متتالية عددية حيث : $V_n = 1 - \frac{a}{U_n}$ حيث : a عدد حقيقي غير معدوم .

أ - عين قيمة العدد الحقيقي a حتى تكون (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب - أكتب V_n و U_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ مرة أخرى .

ج - أكتب بدلالة n المجاميع التالية : $S_n = \frac{1}{2U_0} + \frac{1}{2U_1} + \dots + \frac{1}{2U_n}$ و $S'_n = V_0 + 2V_1 + 2^2V_2 + \dots + 2^nV_n$.

التمرين الرابع (07ن):

I - نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب : $g(x) = x^2 - \ln(x)$.

1/ ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

2/ بين أنه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ فإن $g(x) > 0$ ثم شكل جدول إشارة الدالة g .

II - نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب : $f(x) = \frac{1}{x}(x^2 - x + 1 + \ln(x))$ ، (C) تمثيلها البياني

في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$. وحدة الرسم 1cm .

1 - أ/ احسب ما يلي : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ثم فسر بيانيا النتيجة الثانية ؟

ب/ بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\ln(x)}{x} = 0$ فسر بيانيا النتيجة ؟

ج/ ادرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x - 1$.

2 - أ/ بين أنه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ فإن $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

ب/ شكل جدول تغيرات الدالة f .

ج/ بين أن المعادلة : $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha \in]0,4; 0,5[$.

3 - أ/ اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C) الذي يوازي (Δ) عند النقطة A يطلب تحديد إحداثياتها .

ب/ بين أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف H يطلب تعيين إحداثياتها .

ج/ أنشئ المنحنى (C) و المستقيم (Δ) و المماس (T) بعناية .

4 - m وسيط حقيقي ، (D_m) مستقيم معادلته : $y = x + m$ عين قيم m بحيث المنحنى (C) و المستقيم (D_m) يتقطعان

في نقطة على الأكثر .

5 - احسب A ب cm^2 مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C) و المستقيمت $x = 1$; $x = e$; $y = x - 1$.

6 - h دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعلاقة التالية : $h(x) + f(|x|) = 2$ ، (1) ، (C_h) تمثيلها البياني .

أ/ - فسر بيانيا العلاقة (1) التي تربط بين h و f . (يمكن وضع : $u(x) = f(|x|)$) .

ب/ عين العبارة الدستورية للدالة h .

ج/ أنشئ في معلم جديد المنحنى (C_h) ثم شكل جدول تغيرات الدالة h .

انتهى الموضوع الثاني.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

السنة الدراسية : 2024/2023

اختبار الثلاثي الثالث

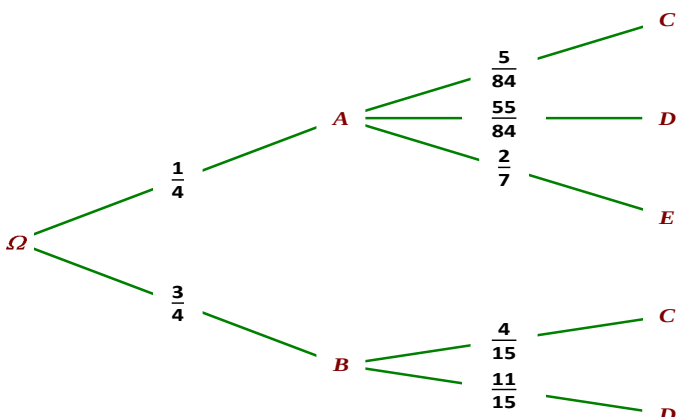
المستوى: الثالثة ثانوي الشعبة : الرياضيات

وزارة الدفاع الوطني

أركان الجيش الوطني الشعبي

مديرية مدارس أشبال الأمة

الاجابة النموذجية لاختبار الفصل الأول في مادة الرياضيات

التمرين	السؤال	الاجابة النموذجية	العلامة																
التمرين الأول	(-1)	لدينا: $(3\sqrt{2} - 3)^2 = 27 - 18\sqrt{2}$. حلول المعادلة	0,25																
	(-2) الأول	هي: $S = \{2 - 3i; 2 + 3i; (2 - 3\sqrt{2}) + (3\sqrt{2} - 3)i; (2 - 3\sqrt{2}) - (3\sqrt{2} - 3)i\}$	0,75																
		لدينا: $z_A - z_\omega = 3 - 3i = 3\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$ و $\frac{z_B - z_\omega}{z_A - z_\omega} = e^{\frac{\pi}{2}i}$ ، ومنه المثلث ωAB قائم في ω و متقايس الضلعين .	0,5																
		لدينا: $\frac{z_C - z_D}{z_B - z_A} = \frac{(3\sqrt{2} - 3)}{3}$ ومنه $(AB) \parallel (CD)$ مما يعني أن الرباعي $ABCD$ شبه منحرف .	0,5																
	(-4) أ-	لدينا: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{3\sqrt{2} + (3\sqrt{2})i}{6}$ ومنه $Arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$ و $\frac{z_C - z_D}{z_B - z_D} = \frac{(\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} - 1)i}{\sqrt{2}}$ ومنه $Arg\left(\frac{z_C - z_D}{z_B - z_D}\right) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$	0,25																
	(ب-)	لدينا: $ z - z_B = z - z_C $ يعني $\sqrt{2}x + (2 - \sqrt{2})y + 6 - 5\sqrt{2} = 0$ وهي ومعادلة محور القطعة $[BC]$ ، ومنه $z_I = 5 - 3\sqrt{2}$.	0,5																
	(ج-)	لدينا $ z_I - z_A = 3\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$. و مما سبق نستنتج أن النقط $A; B; C; D$ تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها I و نصف قطرها $3\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$.	0,25																
			0,25																
				0,25															
	التمرين الثاني	(-1)	لدينا: $P(A) = \frac{1}{4}$ و $P_A(C) = \frac{C_4^3 + C_3^3}{C_9^3} = \frac{5}{84}$ و $P_A(E) = \frac{C_4^1 \times C_3^1 \times C_2^1}{C_9^3} = \frac{2}{7}$	0,75															
(-2) أ-		و $P_B(D) = \frac{2(A_3^1 \times A_3^1 + A_2^1 \times A_2^1)}{A_6^2} = \frac{11}{15}$ و شجرة الاحتمالات :	0,25																
			0,5																
(ب-)		لدينا $P(C) = P((A \cap C) \cup (B \cap C)) = P(A) \times P_A(C) + P(B) \times P_B(C) = \frac{361}{1680}$ و $P_C(A) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{25}{361}$	0,25																
(-3) أ-		لدينا: $P\left(X = -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{4} \times \frac{2(A_3^1)^2}{A_6^2} = \frac{9}{20}$ و $P(X = -1) = \frac{3}{4} \times \frac{A_2^2}{A_6^2} = \frac{1}{20}$	0,25																
		و $P(X = 1) = \frac{1}{4} \times \frac{5}{84} = \frac{5}{336}$ ، و $P(X = 0) = \frac{3}{4} \times \frac{A_3^2 + 2A_2^1 \times A_1^1}{A_6^2} = \frac{1}{4}$ و $P(X = 3) = \frac{1}{4} \times \frac{24}{84} = \frac{24}{336}$ و $P(X = 2) = \frac{1}{4} \times \frac{55}{84} = \frac{55}{336}$	0,25																
(ب-)		<table border="1"><thead><tr><th>المجموع</th><th>3 و</th><th>2 و</th><th>1 و</th><th>0 و</th><th>$-\frac{\sqrt{2}}{2}$ و</th><th>-1 و</th><th>x_i و</th></tr></thead><tbody><tr><td>$\frac{1680}{1680}$</td><td>$\frac{24}{336}$</td><td>$\frac{55}{336}$</td><td>$\frac{5}{336}$</td><td>$\frac{1}{4}$</td><td>$\frac{9}{20}$</td><td>$\frac{1}{20}$</td><td>1</td></tr></tbody></table>	المجموع	3 و	2 و	1 و	0 و	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$ و	-1 و	x_i و	$\frac{1680}{1680}$	$\frac{24}{336}$	$\frac{55}{336}$	$\frac{5}{336}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$	1	1,25
المجموع		3 و	2 و	1 و	0 و	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$ و	-1 و	x_i و											
$\frac{1680}{1680}$		$\frac{24}{336}$	$\frac{55}{336}$	$\frac{5}{336}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$	1											
(-4)				0,25															
			0,25																

(°3

(°4(-أ

(ب-)

(ج-)

(د-)

(°5

(°6(-أ

(ب-)

(ج-)

(د-)

لدينا الدالة f تقبل قيمة حدية محلية عظمى عند 0 و هي $1 - e^{-2}$ على المجال $[a; 2]$

ولدينا $f(a) = 0$ و $f(2) = 2e^{-2}$ و منه $0 \leq f(x) \leq 1 - e^{-2}$

الدالة $F: x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال $[a; +\infty[$ والتي تتعدم عند a

الدالة F متزايدة تماما على المجال $[a;]$ و متناقصة تماما على المجال $[b; +\infty[$

x	a	b	$+\infty$
$f(x)$		$\circ$	
$F(x)$	0	$F(b)$	$-\infty$

بوضع $u'(t) = e^{-t}$ فإن $u(t) = -e^{-t}$ و $v'(t) = 1$ فإن $v(t) = (t + 1)$

إذن: $F(x) = \int_a^x f(t) dt = [- (t + 1) e^{-t}]_a^x + \int_a^x e^{-t} dt - e^{-2} \int_a^x dt$

و منه: $F(x) = \int_a^x f(t) dt = (a + 2)e^{-a} - (x + 2)e^{-x} - e^{-2}(x - a)$

لدينا $\mathcal{A}(a) = (a + 2)e^{-a} + (a - 6)e^{-2}$ و $\mathcal{A}(a) = e^{-2} \left(a - 5 + \frac{1}{a+1} \right) \mu a$ عليه $0,54 \leq \mathcal{A}(a) \leq 1,91$ ؟

و منه: $\mathcal{A}(a) = e^{-2} \left(a - 5 + \frac{1}{a+1} \right) \mu a$

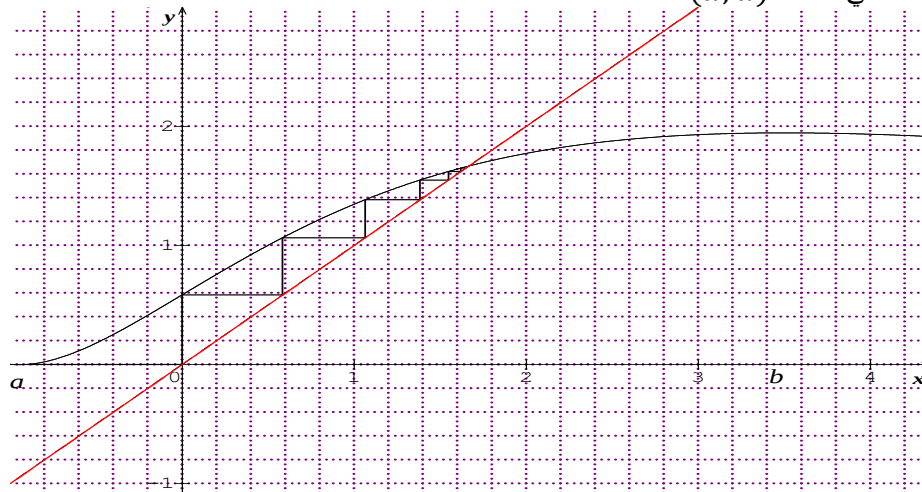
الدالة $\varphi: x \mapsto F(x) - x$ مستمرة و متناقصة تماما على $[1; 2]$ و $\varphi(1) \times \varphi(2) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $F(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]1; 2[$

x	a	a	$+\infty$
$F(x) - x$	$+$	$\circ$	$-$

و عليه المحنى (C) يقع فوق المستقيم (Δ) في المجال $[a; \alpha[$ و يقع تحته في المجال $]\alpha; +\infty[$

و يقطعه في النقطة $A(\alpha; \alpha)$



من خلال الشكل نخمن ان المتتالية (u_n) متزايدة و متقاربة نحو α

مرحلة 1 : لدينا من أجل $n = 0$ و $u_0 = a$ و منه $a \leq u_0 \leq \alpha$... (1)

مرحلة 2 : نفرض أن: $a \leq u_n \leq \alpha$ و نبهن أن $a \leq u_{n+1} \leq \alpha$

لدينا $a \leq u_n \leq \alpha$ و الدالة F متزايدة تماما على $[a;]$ و منه $F(a) \leq F(u_n) \leq F(\alpha)$

مما يعني أن: $a \leq u_{n+1} \leq \alpha$ (2)

من (1) و (2) و حسب مبدأ البرهان بالتراجع نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي: $a \leq u_n \leq \alpha$

لدينا: $u_{n+1} - u_n = F(u_n) - u_n \geq 0$ و منه المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

بما أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ و محدودة فهي متقاربة

لدينا: $0 \leq f(x) \leq 1 - e^{-2}$ و $|u_{n+1} - \alpha| = \left| \int_a^{u_n} f(x) dx \right|$

و منه $0 \leq \left| \int_a^{u_n} f(x) dx \right| \leq (1 - e^{-2}) \int_a^{u_n} dx$

و عليه: $|u_{n+1} - \alpha| \leq (1 - e^{-2}) |u_n - \alpha|$

إذا: $|u_n - \alpha| \leq (f(0))^n |\alpha - a|$ أي: $|u_n - \alpha| \leq (1 - e^{-2})^n |\alpha - a|$

و منه: $\lim u_n = \alpha$

التتقيط

ة

النموذج

الإجابة

التمرين الأول (4 نقاط):

0,25.....

1 - الإجابة ج

0,5+0,25.....

$$P(A) = \frac{A_2^1 \times A_5^2}{A_6^3} = \frac{1}{3}$$

التعليل :

0,25.....

2 - الإجابة أ

0,5+0,25..... $C_1^1 \times C_{11}^3 = 165$

التعليل:

0,25.....

3 - الإجابة ب

0,25..... $S = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right)$ أي $S = -2 + 2i$ معناه $Z=2$ من أجل $Z=2$ معناهحسب موافر : $S^{2024} = (2\sqrt{2})^{2024} (\cos(1518\pi) + i\sin(1518\pi))$ لكن :

0,25*2..... ومنه العدد المطلوب حقيقي

$$\begin{cases} \cos(1518\pi) = \cos(0) = 1 \\ \sin(1518\pi) = \sin(0) = 1 \\ S^{2024} = (2\sqrt{2})^{2024} \end{cases}$$

0,25.....

4 - الإجابة ج

0,5..... $x = 105k + 29$

التعليل: أولاً نقوم بحل الجملة : نجد :

0,25.....

من أجل $k=-1$ نجد : $x = -76$

التمرين الثاني (4 نقاط):

1 - دراسة أولية العدد 421 : لدينا $\sqrt{421} = 20,51$.نقسم العدد 421 على a الذي يمثل الاعداد الأولية الأصغر من 20 حيث q يمثل حاصل القسمة و r يمثل باقي القسمة

لنشكل الجدول التالي:

a	2	3	5	7	11	13	17	19
q	210	140	84	60	38	32	24	22
r	1	1	1	1	3	5	13	3

0,25..... بما أن البواقي كلها غير معدومة إذن العدد 421 أولي

حل في المجموعة $\mathbb{N}^2$ المعادلة المعطاة : $\begin{cases} 4m + 3n = m \times n - 409 \\ m > n \end{cases}$ تكافئ : $m \times n - 4m - 3n = 409$ تكافئ : $\begin{cases} (m-3)(n-4) = 421 \\ m-3 > n-4 \end{cases}$ بما أن 421 أولي إذن :

0,25*2.....

نجد: $m=424$ و $n=5$ وهي حلول المعادلة2 - أ / تعيين قواسم العدد 841: بما أن $841=29^2$ معناه العدد له 3 قواسم هي : $29^0; 29^1; 29^2$ وبالتالي :0,25..... $D_{841} = \{1; 29; 841\}$ ب / تعيين المثلث ABC : يعني تعيين الضلعين $x; y$.

بما أن المثلث قائم حسب فيثاغورس لدينا : $x^2 = y^2 + 29^2$ معناه $(x + y)(x - y) = 841$ 0,25*2.....

لكن $x + y > x - y$ هذا يعني : $\begin{cases} x + y = 841 \\ x - y = 1 \end{cases}$ معناه $x = 421$; $y = 420$ 0,25*3.....

ج / تبين أن $PGCD(421; 29; 420) = 1$:

بما أن العددين 420 و 421 متتابعان معناه أنهما أوليان فيما بينهما كذلك العدد 29 أولي فهو أولي مع كل الأعداد التي

ليست من مضاعفاته و بالتالي $PGCD(421, 29, 420) = PGCD(1, 29) = 1$ 0,25.....

3 - استنتاج قيمة α : $\alpha = 175217$ 0,5.....

4 - أ/ تعيين a و b: بالنسبة للعملية الأولى نجد: $a=7$ بالنسبة للعملية الثانية نجد: $b=9$ 0,25*2.....

ب / تحقق من صحة العمليتين في النظام العشري فهي محققة 0,25.....

التفسير الهندسي: العملية الأولى تمثل محيط المثلث أما الثانية تمثل مساحة المثلث 0,25.....

التمرين الثالث (5 نقاط):

1 - تعيين قيمة α الطبيعية : $\alpha = 0$ 0,25.....

2 - أ / البرهان بالتراجع أن $U_n > 0$ 0,25*2.....

ب / دراسة اتجاه تغير المتتالية ندرس إشارة الفرق 0,25.....

استنتاج أن المتتالية متقاربة مما سبق 0,25.....

ج/ تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} \leq \frac{2}{3} U_n$ معناه $U_{n+1} - \frac{2}{3} U_n \leq 0$

يكافئ $0 \leq \frac{2}{3} \frac{(U_n)^2}{(U_n+6)}$ 0,5.....

د/ استنتاج أن: $U_n \leq 6 \left(\frac{2}{3}\right)^n$ من العلاقة السابقة من أجل $n=0$ نجد $U_1 \leq \frac{2}{3} U_0$

من أجل $n=1$ نجد $U_2 \leq \frac{2}{3} U_1$

" " "

من أجل $n-1$ نجد $U_n \leq \frac{2}{3} U_{n-1}$

بالضرب طرف لطرف مع الاختزال نجد : $U_n \leq 6 \left(\frac{2}{3}\right)^n$ 0,25.....

حساب النهاية : $\lim U_n = 0$ لأن $1 < \frac{2}{3} < -1$ أساس متتالية هندسية 0,25.....

3 - برهان بالتراجع أن $U_n = \frac{2}{\frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}$ 0,25*2.....

حساب النهاية من جديد : $\lim U_n = 0$ لأن : $\frac{3}{2} > 1$ أساس متتالية هندسية 0,25.....

4 - أ/ تعيين قيمة a حتى تكون المتتالية (V_n) هندسية : نجد $a=-2$ و الأساس $q = \frac{3}{2}$ و $V_0 = \frac{4}{3}$ 0,25*3.....

ب/ V_n ; U_n بدلالة n : $V_n = \frac{4}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^n$ و $U_n = \frac{2}{\frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}$ 0,25*2.....

حساب النهاية من جديد: $\lim U_n = 0$ لأن $\lim V_n = +\infty$ 0,25.....

ج/ كتابة المجاميع بدلالة n : $S_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{1}{4}n - \frac{11}{12}$ 0,25.....

0,25..... $S'_n = \frac{2}{3}[3^{n+1} - 1]$

التمرين الرابع (7 نقاط):

الجزء الأول:

1 - دراسة تغيرات الدالة g :
أولا النهايات: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$ 0,25*2.....

ثانيا اتجاه التغير : $g'(x) = \frac{2x^2-1}{x}$ 0,25.....
معناه $g'(x) = 0$:

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2} + \infty$
g'(x)	-	0 +

من أجل كل $x \in]0, \frac{\sqrt{2}}{2}[$ الدالة g متناقصة تماما.

من أجل كل $x \in]\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty[$ الدالة g متزايدة تماما 0,25.....

ثالثا تشكيل جدول التغيرات: 0,25.....

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
g'(x)	-	0	+
g(x)	$+\infty$	$g(\frac{\sqrt{2}}{2})$	$+\infty$

حيث : $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0,84$.

2 - تبيان أنه من أجل كل $x > 0$ فإن $g(x) > 0$:

من جدول التغيرات نلاحظ أن للدالة g قيمة حدية صغرى 0,84 عند $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و بالتالي $g(x) > 0$.

و عليه جدول الإشارة يكون كما يلي: 0,25.....

x	0	$+\infty$
g(x)	+	

الجزء الثاني:

1 - أ/ حساب النهايات: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 0,25*2.....

تفسير النهاية الثانية : المنحنى (C) يقبل محور الترتيب مقارب له معادلته $x = 0$ 0,25

ب/ تبيان أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x} = 0$ حسب التزايد المقارن 0,25.....

تفسير النتيجة بيانيا : لدينا $f(x) = x - 1 + \frac{1+\ln(x)}{x}$ معناه $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\ln(x)}{x}$

و بالتالي المنحنى (C) يقبل مقارب مائل معادلته $y = x - 1$ 0,25.....

ج/ دراسة الوضع النسبي : إشارة الفرق من إشارة البسط $1 + \ln(x)$ معناه $x = e^{-1}$.

جدول الإشارة:

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$1+\ln(x)$	-	0	+

من أجل كل $x \in]0 ; e^{-1}[$ المنحنى (C) يقع تحت (Δ)

من أجل كل $x > e^{-1}$ المنحنى (C) يقع فوق (Δ) .

0,25.....

0,25.....

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} / \text{أ} - 2$$

0,25.....

استنتاج اتجاه التغير : الدالة f متزايدة تماما

0,25.....

ب/ تشكيل جدول التغيرات:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

ج/ تبيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α : حسب مبرهنة القيم المتوسطة

0,25.....

3 - كتابة معادلة المماس (T) : $y = x$ عند النقطة $A(1; 1)$

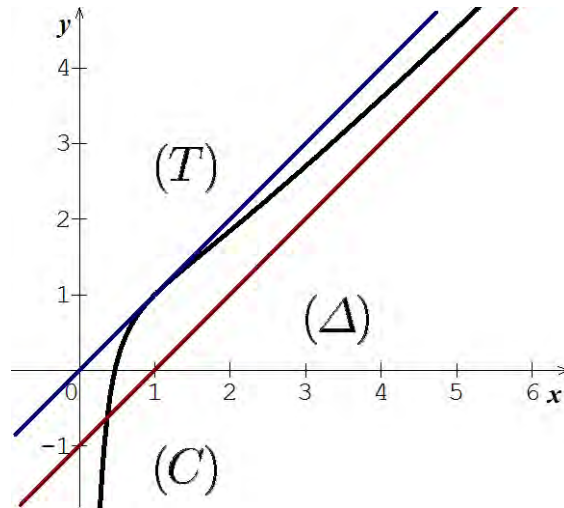
ب/ تبيان أن المنحنى يقبل H نقطة انعطاف:

0,25.....

$$\text{نجد: } f''(x) = \frac{2 \ln(x) - 1}{x^3} \text{ و } H(\sqrt{2} ; 1,55)$$

0,25*3.....

ج/ انشاء المنحنى (C) والمقارب (Δ) و المماس (T):



4 - قيم m بحيث المنحنى و المستقيم يتقطعان في نقطة على الأكثر هي : $m \in]-\infty ; -1] \cup [0 ; +\infty[$

0,25.....

$$A = \frac{3}{2} cm^2 \text{ نجد : حساب المساحة } A$$

6- أ/ تفسير بياني للعلاقة (1): إذا وضعنا $u(x) = f(|x|)$ معناه $h(x) + u(x) = 2 \times 1$

هذا يعني (C_u) ; (C_h) متناظران بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y = 1$ 0,25.....

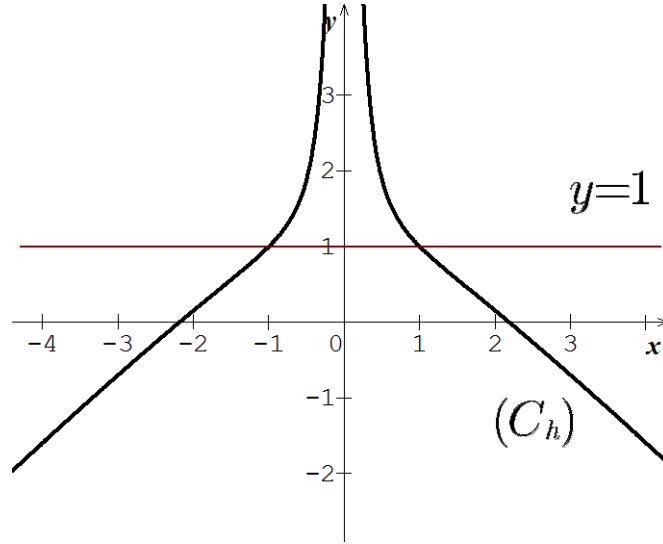
علما أن الدالة $u(x)$ زوجية منحناها البياني يكون كما يلي :

من أجل كل $x > 0$ المنحنيين (C) و (C_u) متطابقان ,

من أجل كل $x < 0$ نكمل رسم (C_u) بالتناظر بالنسبة لمحور الترتيب .

ب/ تعيين العبارة الدستورية للدالة h : $h(x) = 2 - \frac{1}{|x|} [x^2 - |x| + 1 + \ln|x|]$ 0,25.....

ج/ انشاء (C_h) في معلم جديد: 0,25.....



0,25.....

تشكيل جدول تغيرات الدالة u :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$+$		$-$
$h(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$

انتهى