



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04,5 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = \alpha 2^n + \beta (-3)^n$ حيث α و β عدنان صحيحان.

(1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+2} + u_{n+1} - 6u_n = 0$

(2) أ- باستعمال خوارزمية إقليدس، أوجد ثنائية $(\alpha; \beta)$ حل للمعادلة $8\alpha - 27\beta = -11$

ب- أوجد العدد الصحيح k حتى تكون الثنائية $(110 + 27k; 33 + 8k)$ حلا للمعادلة $4\alpha + 9\beta = 17$

ج- استنتج قيمتي α و β بحيث يكون $u_2 = 17$ و $u_3 = -11$

(3) أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \equiv 3 \cdot 2^n [5]$

ب- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد u_n على 5

(4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $w_n = 2^{n+1} + (-3)^n$ و $S_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$

أ- برهن أن: $S_n \equiv 2 - 4 \times 2^n [5]$

ب- استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد S_{2024} على 5

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي وعاء على 12 بطاقة منها 4 بطاقات تحمل العدد 1 وبطاعتان تحملان العدد e و 6 بطاقات تحمل العدد $\frac{1}{e}$

كل البطاقات متماثلة ولا نفرق بينها باللمس.

نسحب على التوالي بطاقتين من الوعاء مع إرجاع البطاقة المسحوبة إلى الوعاء في كل مرة.

ليكن x الرقم المسجل على البطاقة المسحوبة أولا و y الرقم المسجل على البطاقة المسحوبة ثانيا.

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقطة M ذات اللاحقة z حيث:

$z = \ln x + i \ln y$ ونعتبر الأحداث التالية:

A : " M نقطة من حامل محور الفواصل "

B : "قيس الزاوية الموجهة $(\vec{OM}; \vec{u})$ هو $-\frac{\pi}{4}$ "

C : " M نقطة من الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1 "

(1) أحسب $p(A)$ و $p(B)$

(2) بين أن $p(C) = \frac{4}{9}$

(3) علما أن النقطة M من حامل محور الفواصل، ما احتمال أن تكون من الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1؟

(4) المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لكرتين المسافة OM

أ- برر أن قيم المتغير العشوائي X هي: 0، 1 و $\sqrt{2}$

ب- عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضي $E(X)$

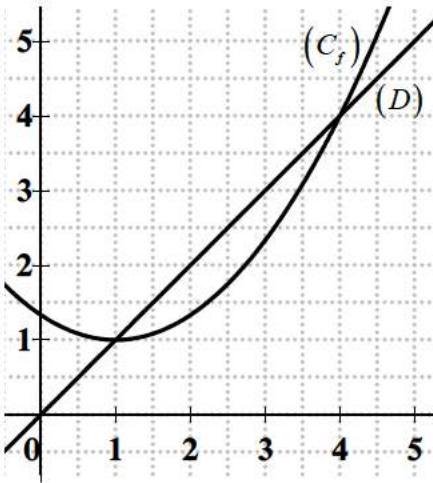
التمرين الثالث: (04,5 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1)^2$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{i}; \vec{j})$ و (D) المستقيم ذو المعادلة $y = x$

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$

(1) أ- أعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2 و u_3 مبرزاً خطوط الإنشاء.



ب- ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

(2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leq u_n \leq 4$

ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(u_n - 1)(u_n - 4)$

استنتج أن المتتالية (u_n) متناقصة.

ج- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

(3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln\left(\frac{u_n - 1}{3}\right)$

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 يطلب تعيين حددها الأول.

ب- عبر عن v_n بدلالة n

(4) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $w_n = \left(\frac{(u_0 - 1)(u_1 - 1)(u_2 - 1) \dots (u_{n-1} - 1)}{3^n}\right)$

أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $\frac{1}{2^n} \ln(w_n) = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \ln\left(\frac{2}{3}\right)$

ب- استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \ln(w_n)$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ: $g(x) = \frac{x}{x-1} - \ln|x-1|$

(1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$ (يمكن وضع: $t = x - 1$)

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $4 < \alpha < 5$

(4) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R} - \{1\}$

(II) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln|x-1|}{x} & ; x > 0 \\ f(x) = \frac{-6e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2} & ; x \leq 0 \end{cases}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}; \vec{j})$ (وحدة الطول 2cm)

(1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجةين بيانيا.

ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ثم فسر النتيجةين بيانيا.

(2) أ- بين أن: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\frac{1}{6}$

ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ (إرشاد: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) + x}{x^2} = -\frac{1}{2}$)

ج- فسر النتيجةين بيانيا.

(3) بين أن: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$

(4) أ- أحسب $f'(x)$

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(5) أحسب $f(-1)$ ، $f(0)$ ، $f(2)$ و $f(5)$ ثم أنشئ (C_f) (نأخذ $\alpha \approx 4,5$)

(6) أ- أوجد العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل $x \neq -1$ و $x \neq -2$ ، $\frac{-6x}{x^2 + 3x + 2} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+1}$

ب- استنتج أن: $\frac{-6e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2} = \frac{-12e^{-x}}{1 + 2e^{-x}} + \frac{6e^{-x}}{1 + e^{-x}}$

ج- أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين $x = -\ln 2$ و

$x = 0$

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

- x عدد طبيعي أكبر أو يساوي 5
- M و N عدنان طبيعيان يكتبان على الترتيب $\overline{100x}$ و $\overline{x001}$ في نظام التعداد الذي أساسه $x+1$
- (1) أكتب كلا من M و N في النظام الذي أساسه x
- (2) أ- أكتب $M+N$ في النظام الذي أساسه $x+1$
- ب- استنتج أن $M+N=k(x+1)$ حيث k عدد طبيعي يطلب تعيينه بدلالة x
- ج- أكتب k في النظام الذي أساسه x
- (3) برهن أنه يوجد عددين طبيعيين غير معدومين a و b يحققان: $\overline{ab}^x \times \overline{aaa}^x = k$
- (4) أوجد جميع الثنائيات $(\alpha; \beta)$ من الأعداد الطبيعية غير المعدومة التي تحقق: $d+m=\beta+9$
- حيث: $d = PGCD(\alpha; \beta)$ و $m = PPCM(\alpha; \beta)$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

- (I_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $I_0 = \int_0^1 e^{-x} dx$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$
- (1) أ- تحقق أن: $I_0 = 1 - \frac{1}{e}$
- ب- باستعمال المكاملة بالتجزئة، برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $I_{n+1} = (n+1)I_n - e^{-1}$
- (2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $\frac{1}{(n+1)e} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ ثم استنتج نهاية المتتالية (I_n)
- (3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{1}{n!} I_n$
- أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = -\frac{e^{-1}}{(n+1)!}$
- ب- استنتج أن: $e(1-u_n) = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

- (1) عين العددين المركبين α و β حيث:
$$\begin{cases} 2\alpha - \beta = -3 \\ 2\bar{\alpha} + \bar{\beta} = -3 - 2i\sqrt{3} \end{cases}$$
 مع $\bar{\alpha}$ مرافق α و $\bar{\beta}$ مرافق β
- (2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$
- A ، B و C النقط التي لواحقتها $z_A = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = z_A e^{i\frac{\pi}{3}}$ على الترتيب.
- أ- أكتب z_A و z_C على الشكل الأسّي.

ب- عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا.

ج- تحقق أن العدد المركب $2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2024} + \left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962} - \left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1445}$ تخيلي صرف.

(3) D النقطة ذات اللاحقة $1+i$

أ- حدد نسبة وزاوية التشابه المباشر S الذي مركزه O ويحول D إلى A

ب- أكتب $\frac{z_A}{z_D}$ على الشكل الجبري ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

(4) عين (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق: $z = k(1+i)e^{i\frac{7\pi}{12}}$ حيث k يمسح $\mathbb{R}^+$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) n عدد طبيعي غير معدوم.

$f_n(x) = x^n e^{1-x}$ ب: الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$

(C_n) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}; \vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$)

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$

(2) بين أن جميع المنحنيات (C_n) تمرّ من نقطتين ثابتتين يطلب تعيين إحداثيتهما.

(3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'_n(x) = (n-x)f_{n-1}(x)$

(4) أ- أدرس حسب شفعية n اتجاه تغير الدالة f_n ثم شكل جدول تغيراتها.

ب- أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1})

ج- أنشئ في نفس المعلم المنحنيات (C_1) ، (C_2) و (C_3)

(II) (I_n) المتتالية العددية المعرفة ب: $I_0 = \int_0^1 e^{1-x} dx$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$

(1) أحسب I_0 و I_1

(2) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$

ب- استنتج I_2

(III) A_n مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_n) و (C_{n+1}) والمستقيمين $x=0$ و $x=1$

عبر عن A_n بدلالة n و I_n

(2) α عدد حقيقي أكبر تماما من 1

$S(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_1) و (C_2) والمستقيمين $x=0$ و $x=\alpha$

أ- برهن أن $S(\alpha) = 24 - 4e - 4(\alpha^2 + \alpha + 1)e^{1-\alpha}$

ب- بين أن $[2A_1 = S(\alpha)]$ تكافئ $[e^\alpha = \alpha^2 + \alpha + 1]$ ثم استنتج وجود وحدانية للعدد α

انتهى الموضوع الثاني