

الإختبار التجريبي رقم 4 (Bac 2024)

التمرين 01 (4 نقاط)

يحتوي كيس على أربع كريات بيضاء و ثلاث كريات سوداء كل الكريات متماثلة وغير متميزة عند اللمس
نسحب من الصندوق أربع كريات في آن واحد

1 أحسب احتمال الحدث A : "الحصول على الأقل على كرية بيضاء "

2 ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب العدد $ax + y$

حيث x يمثل عدد الكريات البيضاء و y يمثل عدد الكريات السوداء و a عدد حقيقي
أ/ عين قيم المتغير العشوائي X

ب/ عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$ بدلالة a

ج/ عين قيمة العدد الحقيقي a حتى يكون $E(X) = \frac{32396}{7}$

3 نسحب الآن من هذا الكيس أربع كريات على التوالي بالإرجاع

أحسب احتمال الحدث B : "الحصول على الأقل على كرية بيضاء "

التمرين 02 (4 نقاط)

(I) لتكن في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2 - (3 + i)z + 4 = 0 \dots (E)$

1 عين الجذرين التربيعيين للعدد المركب $-8 + 6i$

2 حل المعادلة (E) نرمز إلى الحلين بـ z_1 و z_2 حيث $|z_1| < |z_2|$

(II) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط A ، B ، C التي

لواحقها على الترتيب i ، z_1 و z_2

1 أكتب العدد المركب $L = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي

2 بين أن النقطة C هي صورة النقطة B بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيين عناصره المميزة

3 استنتج طبيعة المثلث ABC

التمرين 03 (5 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ : $u_1 = \frac{1}{2}$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $u_{n+1} = \left(\frac{n+1}{2n}\right) u_n$

1 أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n \geq 0$

ب/ أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة ، ثم عين نهاية المتتالية (u_n)

2 نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $v_n = \frac{u_n}{n}$

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_1

ب/ أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

3 نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $w_n = \ln(v_n)$

أ/ أثبت أن المتتالية (w_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول w_1

ب/ أحسب بدلالة n كل من P_n و $S_n = w_1 + w_2 + \dots + w_n$ حيث $P_n = \frac{u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n}{n!}$

التمرين 04 (7 نقاط)

I- f هي الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - 2\ln x) + 1$; $x \in]0; +\infty[$
 $f(0) = 1$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (الوحدة 2cm)

1 أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، فسر بيانها النتيجة المحصل عليها ، ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2 أدرس قابلية الاشتقاق لـ f عند $x_0 = 0$

ب/ أثبت أن f قابلة للاشتقاق على المجال $[0; +\infty[$

3 أحسب $f'(x)$ على المجال $[0; +\infty[$ ، ثم إستنتج إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

4 بين ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيدا α حيث $4,6 < \alpha < 4,7$

5 أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

II- g هي الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ : $g(x) = f(x) - 2x - \frac{1}{2}$

1 أحسب $g'(x)$ و $g''(x)$ ، ثم أدرس إتجاه تغير الدالة g'

2 إستنتج إشارة $g'(x)$ على المجال $[0; +\infty[$

3 أدرس إتجاه تغير الدالة g

4 إستنتج الوضع النسبي بين (C_f) و (T)

5 أحسب $f(6)$ ثم أنشئ كلا من (C_f) و (T) .

6 بإستعمال التكامل بالتجزئة أحسب بدلالة n : $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 x^2 \ln x \, dx$ حيث n عدد طبيعي

7 إستنتج بدلالة n المساحة $A(n)$ بـ cm^2 للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمماس (T)

والمستقيمين اللذين معادلتيهما : $x = \frac{1}{n}$ و $x = 1$ ،

بالتوفيق إن شاء الله

إذا أدار الله سفينتك لليمين فتأذيت وتألمت ، فاعلم ان
 اليسار كان موتك المحتم ، فاحمد الله دائما



1 عين الجذرين التربيعين للعدد المركب $-8 + 6i$

نضع $w = x + iy$ حيث $w^2 = -8 + 6i$ ومنه

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \dots (1) \\ x^2 - y^2 = -8 \dots (2) \\ 2xy = 6 \dots (3) \end{cases} \text{ لدينا } \begin{cases} x = 1 \\ \text{أو} \\ x = -1 \end{cases} \text{ نجد } 2x^2 = 2 \text{ ومنه } y = 3 \text{ أو } y = -3$$

بالتعويض في (3) نجد

✓ إذا كان $x = 1$ ، فإن $2y = 6$ ، أي أن

$y = 3$ ، ومنه نستنتج أن : $w = 1 + 3i$

✓ إذا كان $x = -1$ ، فإن $-2y = 6$ ، أي أن

$y = -3$ ، ومنه نستنتج أن : $w = -1 - 3i$

2 حل المعادلة (E)

لدينا : $\Delta = -8 + 6i$ ، ومنه $\Delta = (1 + 3i)^2$

ومن المعادلة (E) تقبل حلان هما

$$z_1 = \frac{3 + i + 1 + 3i}{2} = 2 + 2i$$

$$z_2 = \frac{3 + i - 1 - 3i}{2} = 1 - i$$

II 1 أكتب العدد المركب $L = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي

$$L = \frac{1 - i - i}{2 + 2i - i} = \frac{1 - 2i}{2 + i} \times \frac{2 - i}{2 - i} = -i$$

$$L = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-\frac{\pi}{2}i}$$

2 بين أن النقطة C هي صورة النقطة B

لدينا $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-\frac{\pi}{2}i}$ ، ومنه $z_C - z_A = e^{-\frac{\pi}{2}i}(z_B - z_A)$

ومنه نستنتج أن النقطة C هي صورة النقطة B بدوران

مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

3 استنتج طبيعة المثلث ABC

$$\left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = 1 \Rightarrow \frac{AC}{AB} = 1 \Rightarrow AC = AB$$

$$\arg \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow (\vec{AB}; \vec{AC}) = -\frac{\pi}{2}$$

ومنه نستنتج أن المثلث ABC متساوي الساقين وقائم في A

عدد الحالات الممكنة : $C_7^4 = 35$

1 حساب $P(A)$

$$P(A) = \frac{C_4^1 C_3^3 + C_4^2 C_3^2 + C_4^3 C_3^1 + C_4^4 C_3^0}{35} = \frac{35}{35} = 1$$

2 أ/ عين قيم المتغير العشوائي X

$$\begin{cases} a(1) + 3 = a + 3 \\ a(2) + 2 = 2a + 2 \\ a(3) + 1 = 3a + 1 \\ a(4) + 0 = 4a \end{cases} \text{ عند سحب أربع كريات نميز مايلي :}$$

ومن قيم المتغير العشوائي X هي

$$\{a + 3; 2a + 2; 3a + 1; 4a\}$$

ب/ عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X

$$P(X = a + 3) = \frac{C_4^1 C_3^3}{35} = \frac{4}{35}$$

$$P(X = 2a + 2) = \frac{C_4^2 C_3^2}{35} = \frac{18}{35}$$

$$P(X = 3a + 1) = \frac{C_4^3 C_3^1}{35} = \frac{12}{35}$$

$$P(X = 4a) = \frac{C_4^4 C_3^0}{35} = \frac{1}{35}$$

x_i	$a + 3$	$2a + 2$	$3a + 1$	$4a$
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

❖ أحسب أمله الرياضي $E(X)$

$$E(X) = \sum_{i=1}^4 x_i P_i = \frac{4(a + 3) + 18(2a + 2) + 12(3a + 1) + 4a(1)}{35} = \frac{80a + 60}{35} = \frac{16a + 12}{7}$$

$$E(X) = \frac{80a + 60}{35} = \frac{16a + 12}{7}$$

ج/ عين قيمة العدد الحقيقي a حتى يكون $E(X) = \frac{32396}{7}$

$$\frac{16a + 12}{7} = \frac{32396}{7} \Rightarrow 16a + 12 = 32396$$

ومنه $16a + 12 = 32396$ ، ومنه $a = 2024$

3 نسحب الآن من هذا الكيس أربع كريات على التوالي بالإرجاع

أحسب احتمال الحدث B : " الحصول على الأقل على

كرية بيضاء "

$$P(B) = \frac{4(4^1 \times 3^3) + 6(4^2 \times 3^2) + 4(4^3 \times 3^1) + 4^4}{7^4} = \frac{2320}{2401}$$

1/ أ/ برهن بالتراجع أنه $u_n \geq 0$

نسمي الخاصية $p(n) : u_n \geq 0$

من أجل $n = 1$ ، لدينا $u_1 = \frac{1}{2} \geq 0$ ، ومنه $u_1 = \frac{1}{2} \geq 0$

ومنه الخاصية محققة من أجل $n = 1$

نفرض صحة $p(n)$ من أجل n كفي حيث $n \geq 1$

ونبرهن صحة $p(n+1)$ أن $u_{n+1} \geq 0$

لدينا $u_n \geq 0$ ، ومنه $\left(\frac{n+1}{2n}\right) u_n \geq 0$

ومنه الخاصية محققة من أجل $n+1$

ومنه نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

فإن $u_n \geq 0$

ب/ أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{n+1}{2n}\right) u_n - u_n = u_n \left[\frac{n+1}{2n} - 1\right]$$

$$u_{n+1} - u_n = u_n \left[\frac{-n+1}{2n}\right]$$

من أجل كل $n \geq 1$ فإن $-n+1 \leq 0$

ومنه $u_{n+1} - u_n \leq 0$ ، ومنه نستنتج أن (u_n) متناقصة

❖ استنتج أنها متقاربة : بما أن (u_n) متناقصة

ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 فهي متقاربة

❖ تعيين نهاية المتتالية (u_n)

بما أن (u_n) متقاربة والدالة f المعرفة بـ $f(x) = x$

مستمرة من أجل كل $x \geq 1$ فإن نهاية (u_n) تحقق

$$l = \frac{1}{2}l$$

حيث $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{n+1}{2n}\right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{n}{2n}\right] = \frac{1}{2}$ لدينا $l = \frac{1}{2}l$ معناه $l - \frac{1}{2}l = 0$ معناه $\frac{1}{2}l = 0$ ، ومنه

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \text{ ، ومنه } l = 0$$

2/ أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{\left(\frac{n+1}{2n}\right) u_n}{n+1} = \frac{u_n}{2n} = \frac{1}{2} v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

حدها الأول $v_1 = \frac{u_1}{1} = \frac{1}{2}$

ب/ أكتب عبارة v_n بدلالة n

$$v_n = v_1 \times q^{n-1} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$$

❖ استنتج عبارة u_n بدلالة n

بما أن $v_n = \frac{u_n}{n}$ فإن $u_n = n \times v_n$ ، ومنه $u_n = \frac{n}{2^n}$

3/ أ/ أثبت أن المتتالية (w_n) حسابية

$$w_{n+1} = \ln(v_{n+1}) = \ln\left(\frac{1}{2} v_n\right) = \ln \frac{1}{2} + \ln(v_n)$$

$$w_{n+1} = \ln \frac{1}{2} + w_n$$

ومنه (w_n) متتالية حسابية أساسها $r = \ln \frac{1}{2}$

حدها الأول $w_1 = \ln(v_1) = \ln \frac{1}{2}$

عبارة w_n بدلالة n

$$w_n = w_1 + (n-1)r$$

$$w_n = \ln \frac{1}{2} + (n-1) \ln \frac{1}{2} = n \ln \frac{1}{2}$$

ب/ أحسب بدلالة n كل من S_n و P_n

$$S_n = w_1 + w_2 + \dots + w_n$$

نلاحظ أن S_n هي حدود متتابعة لمتتالية حسابية ومنه

$$S_n = \frac{n}{2} \left(\ln \frac{1}{2} + n \ln \frac{1}{2} \right) = \frac{n}{2} \left[(n+1) \ln \frac{1}{2} \right]$$

$$P_n = \frac{u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n}{n!}$$

$$P_n = \frac{u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n}{1 \times 2 \times \dots \times n} = \frac{u_1}{1} \times \frac{u_2}{2} \times \dots \times \frac{u_n}{n}$$

$$P_n = v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$$

$$P_n = \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \dots \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{1+2+\dots+n}$$

$$P_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

1/ أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{3}{2} x^2 - x^2 \ln x + 1 \right] = 1$$

فسر بيانيا النتيجة المحصل عليها

بما أن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$ فإن الدالة f

مستمرة عند $x_0 = 0$

$$(T): y = 2(x - 1) + \frac{5}{2}$$

$$(T): y = 2x + \frac{1}{2}$$

g-II دالة معرفة بـ: $g(x) = f(x) - 2x - \frac{1}{2}$

① أحسب $g'(x)$ و $g''(x)$ ، ثم أدرس إتجاه تغير الدالة g'

$$g'(x) = f'(x) - 2$$

$$g''(x) = f''(x) = 2(1 - \ln x) - \frac{1}{x} \times 2x$$

$$g''(x) = -2 \ln x$$

x	0	1	$+\infty$
$g''(x)$		+	-
$g'(x)$	-2	0	$-\infty$

ومنه الدالة g' متزايدة تماما على المجال $]0; 1]$

ومتناقصة تماما على المجال $[1; +\infty[$

② إستنتج إشارة $g'(x)$ على المجال $]0; +\infty[$

بما أن الدالة g' تقبل قيمة حدية عظمى هي 0 عند

$x = 1$ ومنه نستنتج أنه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$

$$\text{فإن } g'(x) \leq 0$$

③ أدرس إتجاه تغير الدالة g

الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0; +\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		0	-
$g(x)$	$\frac{1}{2}$	0	$-\infty$

④ إستنتج الوضع النسبي بين (C_f) و (T)

ندرس إشارة الفرق $f(x) - 2x - \frac{1}{2} = g(x)$

لما $x \in]0; 1[$ فإن (C_f) يقع فوق (T)

لما $x \in]1; +\infty[$ فإن (C_f) يقع تحت (T)

لما $x = 1$ فإن (C_f) يخترق (T) في $(1; \frac{5}{2})$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} x^2 (3 - 2 \ln x) + 1 \right] = -\infty$$

② أ/ أدرس قابلية الإستنتاج لـ f عند $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{3}{2} x - x \ln x \right] = 0$$

ومنه f قابلة للإشتقاق عند $x_0 = 0$

ب/ أثبت أن f قابلة للإشتقاق على المجال $]0; +\infty[$

لدينا من جهة f قابلة للإشتقاق عند $x_0 = 0$

ومن جهة أخرى f هي عبارة عن جداء ومجموع

دوال قابلة للإشتقاق على $]0; +\infty[$

ومنه نستنتج أن f قابلة للإشتقاق على المجال $]0; +\infty[$

③ أحسب $f'(x)$ على المجال $]0; +\infty[$

$$f'(x) = x(3 - 2 \ln x) - \frac{2}{x} \times \frac{x^2}{2}$$

$$f'(x) = 3x - 2x \ln x - x = 2x(1 - \ln x)$$

❖ إستنتج إتجاه تغير الدالة f

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 1 - \ln x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = e \end{cases}$$

x	0	e	$+\infty$
$2x$		+	+
$1 - \ln x$		+	-
$f'(x)$		+	-

ومنه f متزايدة تماما على المجال $]0; e]$ ومتناقصة

تماما على المجال $[e; +\infty[$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	1	$\approx 4,7$	$-\infty$

④ بين ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيدا α

f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[4,6; 4,7]$

$$\begin{cases} f(4,6) = 0,44 \\ f(4,7) = -0,05 \end{cases} \Rightarrow f(4,6) \times f(4,7) < 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة

$f(x) = 0$ تقبل حل وحيدا α حيث $4,6 < \alpha < 4,7$

⑤ أكتب معادلة المماس (T) عند الفاصلة 1

$$(T): y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$A(n) = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(f(x) - 2x - \frac{1}{2} \right) dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 g(x) dx$$

$$A(n) = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\frac{3}{2}x^2 - x^2 \ln x + 1 - 2x - \frac{1}{2} \right) dx$$

$$A(n) = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\frac{3}{2}x^2 - 2x - x^2 \ln x + \frac{1}{2} \right) dx$$

$$A(n) = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2} \right) dx - I_n$$

$$A(n) = \left[\frac{x^3}{2} - x^2 + \frac{x}{2} \right]_{\frac{1}{n}}^1 - I_n = \left[\frac{x^3 - 2x^2 + x}{2} \right]_{\frac{1}{n}}^1 - I_n$$

$$A(n) = - \left(\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}}{2} \right) - I_n$$

$$A(n) = - \left(\frac{\frac{1}{n^3} - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n}}{2} \right) - I_n$$

$$A(n) = - \left(\frac{\frac{1-2n+n^2}{n^3}}{2} \right) - I_n = - \frac{1-2n+n^2}{2n^3} - I_n$$

$$A(n) = \frac{-n^2+2n-1}{2n^3} - \frac{\ln n}{3n^3} - \frac{1}{9n^3} + \frac{1}{9}$$

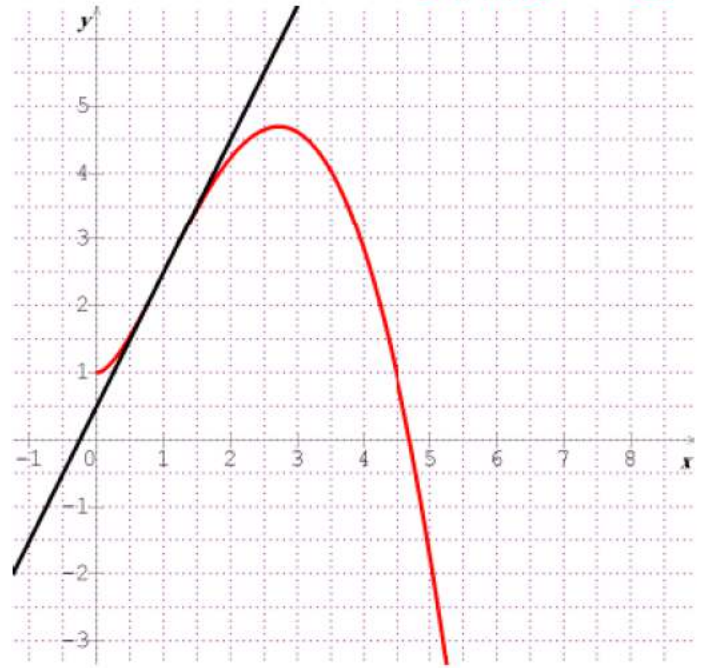
$$A(n) = \frac{-9n^2+18n-9-6\ln n-2+2n^3}{18n^3}$$

$$A(n) = \left(\frac{2n^3-9n^2+18n-11-6\ln n}{18n^3} \right) \times 4 \text{ (u.a.)}$$

5 أحسب $f(6)$

$$f(6) = -9,5$$

أنشئ كلا من (C_f) و (T)



6 أحسب بدلالة n : $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 x^2 \ln x dx$

$u(x) = \ln x$	$u'(x) = \frac{1}{x}$
$v(x) = \frac{x^3}{3}$	$v'(x) = x^2$

$$I_n = \left[\frac{x^3}{3} \ln x \right]_{\frac{1}{n}}^1 - \frac{1}{3} \int_{\frac{1}{n}}^1 x^2 dx$$

$$I_n = \left[\frac{x^3}{3} \ln x \right]_{\frac{1}{n}}^1 - \left[\frac{x^3}{9} \right]_{\frac{1}{n}}^1 =$$

$$I_n = - \left(\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^3}{3} \ln \frac{1}{n} \right) - \left(\frac{1}{9} - \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^3}{9} \right)$$

$$I_n = - \left(\frac{1}{3n^3} (-\ln n) \right) - \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{9n^3} \right)$$

$$I_n = \frac{\ln n}{3n^3} + \frac{1}{9n^3} - \frac{1}{9}$$

7 إستنتج المساحة $A(n)$ بـ cm^2 لحيز المستوي

المحدد بالمنحني (C_f) والمماس (T) والمستقيمين

الذين معادليهما: $x = 1$ و $x = \frac{1}{n}$

بما أن $0 < \frac{1}{n} \leq x \leq 1$ أي أن $0 \leq x \leq 1$

ومنه (C_f) يقع فوق (T) في المجال $[0; 1]$ ومنه